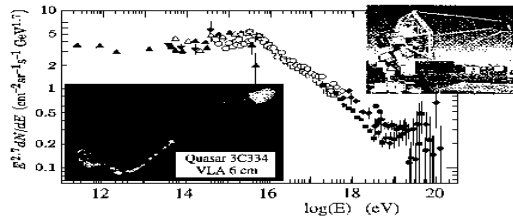


LPHE



Laboratoire de Physique des Hautes Energies
EPFL

PARTICULES ELEMENTAIRES

Aurelio Bay, BSP, bureau 616 Tél : (021)693 0474
Aurelio.Bay@lphe.epfl.ch <http://lphe.epfl.ch/~bay>

Remerciements

Cette nouvelle version du cours de Physique des particules a été entièrement revue par le Prof. Maurice Gaillard et traduite en LaTeX par Mme Christiane Roth et Mme Marianne Chave. J'aimerais les remercier.

A. Bay

Quelques références

- 1 Table du Particle Data Group (PDG). Accès en ligne : <http://pdg.lbl.gov>.
- 2 Quarks and Leptons. F. Halzen, A.D. Martin. Ed. John Wiley & Sons, Inc.
- 3 An introduction to Quarks and Partons. F.E. Close. Ed. Academic Press.
- 4 Introduction to High Energy Physics. D.H. Perkins. Ed. Addison-Wesley.
- 5 Weak interactions of leptons and quarks. E.D. Commins, P.H. Bucksbaum. Ed. Cambridge University Press
- 6 Gauge Theories in Particle Physics. I.J.R. Aitchison, A.J. Hey. Ed. Adam Hilger LTD
- 7 An introduction to gauge theories and the “new physics”. E. Leader, E. Predazzi. Ed. Cambridge University Press
- 8 Relativistic Quantum Mechanics. J.D. Bjorken, S.D. Drell. Ed. McGraw-Hill.
- 9 Elementary particle physics. D.C. Cheng, G.K. O’Neill. Ed. Addison-Wesley
- 10 Introduction to Elementary Particles. D. Griffiths. Ed. John Wiley & Sons, Inc.
- 11 The physics of Elementary Particles. H. Muirhead. Ed. Pergamon Press.
- 12 Nuclear and Particle Physics. W.E. Burcham, M. Jobes. Ed. Longman Scientific & Technical.

1 Introduction

Cette introduction est un panoramique de la matière qui sera traitée au cours de l'année académique. Elle contient un résumé de certains concepts qui ont été présentés au cours "Introduction à la Physique Nucléaire et Corpusculaire" de 3ème année. On y trouve quelques notions complémentaires sur les détecteurs, les accélérateurs et sur les rayons cosmiques. On y développe aussi quelques aspects du rapport entre la physique des particules, l'astrophysique et la cosmologie.

1.1 Motivations et historique

La physique des particules décrit l'Univers comme un ensemble de particules "ponctuelles" qui communiquent par des interactions. Elle n'est pas une science "géométrique" ou un édifice bâti sur quelques postulats de base. Toutefois cette vision s'appuie solidement sur des fondements mathématiques et certaines des prédictions théoriques (par exemple le "Modèle Standard", abrégé en SM par la suite) sont en accord remarquable avec les faits d'observation.

Dans ce cours on sacrifiera quelque peu le côté formel de la théorie pour laisser place à un point de vue plus intuitif et expérimental.

Différents critères peuvent être considérés pour juger de la qualité d'une théorie. L'un d'eux est le **principe d'économie** (le rasoir d'Occam) qui demande que le nombre des entités utilisées soit réduit au strict minimum. Dans le cas présent il s'agit du nombre des "particules élémentaires" + le nombre des "types d'interactions" + le nombre des "lois fondamentales" reliant le tout. On a ici un point de vue -réductionniste- : décomposition du phénomène dans ses éléments les plus simples. Le point de vue opposé -l'holisme- est de dire qu'on ne doit pas perdre de vue les corrélations à grande échelle.

Un autre critère applicable est que la **théorie soit complète**, c'est-à-dire qu'elle couvre convenablement le domaine qu'elle décrit, sans superflu. Elle ne doit pas laisser certains "mystères" de côté. A la fin du XIX siècle, Maxwell avait marié l'électricité et le magnétisme dans sa théorie de l'**électromagnétisme** (e.m.). Hertz et d'autres expérimentateurs avaient confirmé l'existence des ondes e.m.. Un savant bien connu avait affirmé qu'on avait tout compris ; il ne restait qu'à expliquer les résultats de l'expérience de Michelson et Morley et le problème du corps noir...

Le **Modèle Standard** en vogue au XXI siècle s'en sort avec 12 "particules élémentaires + 12 antiparticules" (6 quarks + 6 antiquarks et 6 leptons + 6 antileptons), et un mécanisme d'échange intervenant dans les différents types connus de champs d'interaction : gravifique, faible, électromagnétique et fort. Les quanta de ces champs sont le **graviton** pour l'interaction gravifique, le système γ , Z , W^\pm pour l'interaction électro-faible et les **gluons** pour l'interaction forte. A cela il faut rajouter la particule de **Higgs**.

Le SM introduit un nombre élevé de paramètres à ajuster, au moins 18 voire

25 paramètres si les neutrinos s'avèrent massifs. De plus, il requiert la présence simultanée des 6 quarks (antiquarks) et des 6 leptons (antileptons) pour que certaines grandeurs physiques (par ex. des sections efficaces) restent finies. Le SM sous-entend l'existence d'un pont entre ces deux mondes, mais ne nous dit pas où se situe ce pont. Par ailleurs, il contient des choix arbitraires, il n'explique pas l'origine de la violation de CP (Chapitre 4); la théorie de la gravitation y est absente.

Des tentatives sont en cours en vue de relier les traitements des différents types d'interaction, voire à la limite de les **unifier**. Dans les **Grand Unified Théories** (GUT), on s'efforce de cerner la nature du pont entre quarks et leptons. Les théories "Super Strings", **Super Symmetry** (SUSY), etc., ont l'ambition d'amener à une théorie globale incluant la gravitation. Toutefois, elles impliquent une entorse dans le nombre des particules élémentaires; par exemple, dans SUSY, on est amené à introduire des "super partenaires" aux constituants originels (les squarks, sleptons,....).

Notre vision actuelle des constituants élémentaires de la matière est très différente de celle prévalant dans la décennie 1960, alors que des dizaines de particules qualifiées "d'élémentaires" peuplaient le Zoo des physiciens des hautes énergies (**High Energy Physics** : HEP). La procédure suivie pour effectuer cette mise en ordre s'est inspirée de la méthode classique des savants du 18ème siècle : classer les données en mettant en évidence leurs éléments communs, chercher à constituer des familles, s'efforcer de trouver une explication rationnelle à ce classement. Le catalogue des plantes et animaux sur terre a trouvé une explication "dynamique" raisonnable dans la théorie évolutionniste de Darwin. Il a été établi que les briques élémentaires engendrant le monde biologique sont les 4 bases qui composent l'ADN (**a**cide **d**ésoxyribo**n**ucléique). Mendeleev a construit le tableau des éléments chimiques, qui a été expliqué par la suite par le modèle atomique.

A titre d'illustration, on a représenté dans le tableau 1.1.1 une classification des particules élémentaires qui ferait abstraction de l'existence des quarks.

	familles	genres	espèces	interactions
1	leptons		$e \mu \tau$ et les ν	EW
2	hadrons	mesons	$\pi \eta K...$	toutes
3		baryons	$p n \Lambda \Omega \Delta$	toutes
4	quanta		$G \gamma Z W^\pm$ gluons	

TAB. 1.1.1 – Classification des particules élémentaires sans prendre en compte l'existence des quarks

Les leptons sont caractérisés par le fait qu'ils subissent l'influence de l'interaction électro-faible (EW) et ne sont pas affectés directement par l'interaction

forte.

Les hadrons subissent l'interaction forte. En particulier protons et neutrons se lient dans le noyau de l'atome par une manifestation de l'interaction forte, la "force nucléaire", un peu comme la force de Van der Waals qui est une manifestation de la force e.m. liant les molécules. Les hadrons sont subdivisés en mésons de spin entier et en baryons de spin demi-entier.

A la quatrième ligne du tableau 1.1.1, on donne les quanta des champs qu'on associe **aujourd'hui** aux différents types d'interaction.

L'examen de ce tableau amène tout naturellement à la question : les particules des lignes 1 à 3 sont-elles ou non élémentaires ? La réponse à cette question est fournie par une expérience "à la Rutherford" susceptible de révéler l'existence d'une structure. Plus précisément, on cherche à établir que la particule examinée n'a pas de structure jusqu'à une échelle spatiale

$$\delta x \approx \frac{\hbar}{p} \approx \frac{\hbar c}{E} \quad (1.1.1)$$

ou p est la quantité de mouvement du projectile-sonde.

En d'autres termes, cette particule de taille inférieure à δx est considérée comme ponctuelle. Les leptons sont ponctuels ¹ (de taille $< 10^{-16}$ cm), et toute déviation par rapport au comportement ponctuel est explicable par la théorie **Electrodynamique Quantique, (QED)**, comme on le verra par la suite (Chapitre 5). Il est établi que le proton, par contre, est non ponctuel ; sa taille est de l'ordre de 10^{-13} cm, ($\langle r^2 \rangle^{1/2} = 0.74 \pm 0.24$ fm) ², résultat obtenu par l'étude de la diffusion élastique e-p avec un faisceau d'électrons de 188 MeV et une cible d'H₂. Ultérieurement, on a utilisé un faisceau d'électrons de plus de 7 GeV et la diffusion inélastique sur le proton pour révéler la présence de "**partons**" (qui sont - à l'échelle d'énergie utilisée - des corpuscules "ponctuels").

Remarquons que le grand nombre de hadrons identifiés est en lui-même un indice de l'existence d'une structure interne. L'étude de familles de hadrons montre un certain ordre quand on classe les particules de même spin-parité J^P selon la troisième composante de leur isospin I_3 et leur étrangeté S (voir figures 1.1.1 à 1.1.4)³. On observe que les hadrons de même isospin I ont une masse comparable (donc indépendante de I_3). Par exemple, la masse des π^\pm ne diffère que de 4% de la masse du π^0 . L'isospin apparaît être une bonne **symétrie du système**, ce qui signifie qu'une "rotation dans l'espace d'isospin" laisse invariante l'énergie du système (à quelques % près). De plus, l'isospin I se révèle être conservé dans les processus engendrés par l'interaction forte. L'invariance en fonction de l'étrangeté S apparaît moins évidente : la masse du Kaon est de l'ordre de 3 fois la masse du

¹D. P. Barber et al. Phys. Rev. Lett. 43, (1979) 1915.

²R. Hofstadter et R.W. McAllister Phys. Rev. 98 (1955) 217 et Phys. Rev.102,(1956) 851.

³Une classification alternative est celle de T. Regge : au lieu de classer les hadrons de même J^P en fonction de leurs nombres quantiques internes, on reporte la masse des hadrons en fonction de leur spin, à nombres quantiques internes fixés.

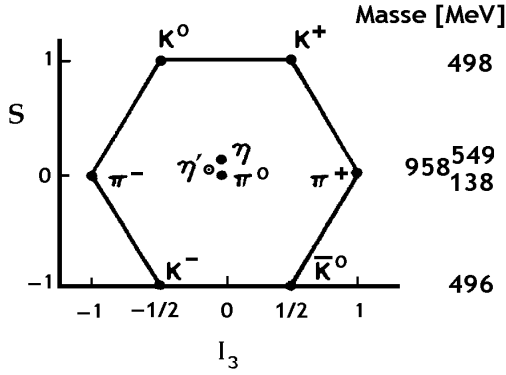


FIG. 1.1.1 – Nonet de mésons $J^P = 0^-$ (octet+singulet η')

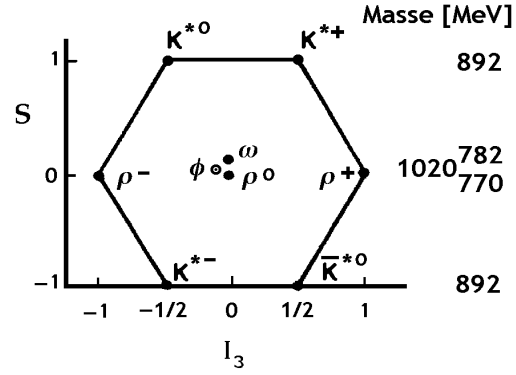


FIG. 1.1.2 – Nonet de mésons $J^P = 1^-$ (octet+singulet ϕ)

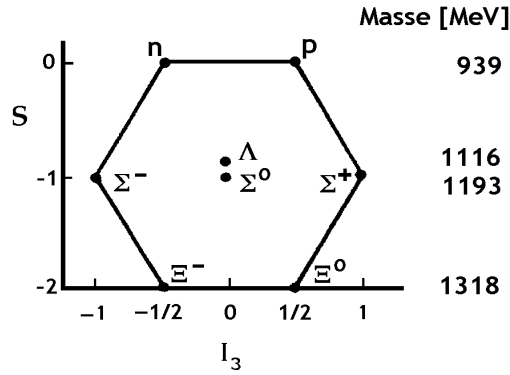


FIG. 1.1.3 – Octet de baryons $J^P = 1/2^+$

pion. Toutefois, une différence d'une unité d'étrangeté S correspond à une même différence de masse (à 10% près) chez les baryons que chez les mésons (voir par ex. figure 1.1.4). Cette régularité a conduit à la prédiction de l'existence de l'hypéron Ω^- avant la découverte de celui-ci ⁴. D'autre part, elle a amené Gell-Mann et Zweig en 1964 à émettre l'hypothèse de la structure en quarks des hadrons. Le tableau 1.1.2 donne les nombres quantiques internes des 3 quarks nécessaires pour rendre compte de l'ensemble des états hadroniques connus à l'époque.

Dès lors, si l'on admet une différence de masse de l'ordre de 150 MeV entre le doublet de quarks u, d et le quark étrange s , on peut expliquer les figures 1.1.1 à 1.1.4 en postulant que les mésons sont des paires quark-antiquark (états $q\bar{q}$) et les baryons des combinaisons de trois quarks qqq (ou $\bar{q}\bar{q}\bar{q}$). Par exemple le π^+ est un système $u\bar{d}$, le K^0 un système $d\bar{s}$, le proton un système uud , le neutron un système udd , etc..

⁴Expérience à Brookhaven National Laboratory. V.E. Barnes et al. Phys. Rev. Lett. 12, 204 (1964)

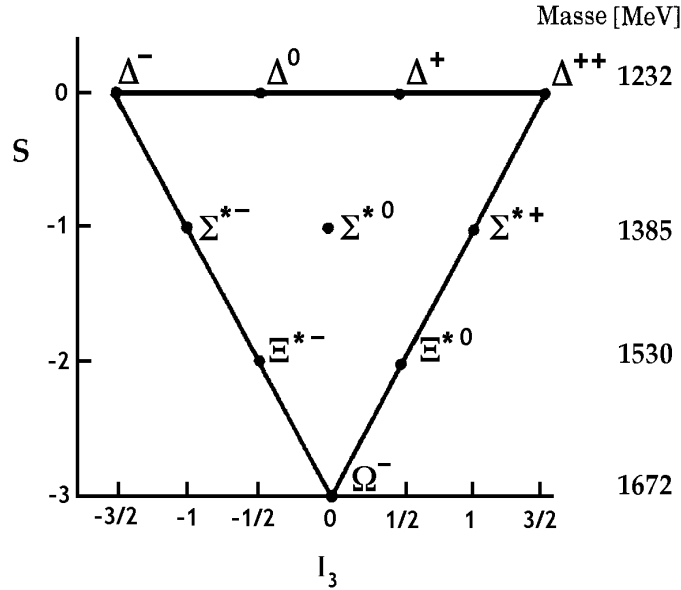


FIG. 1.1.4 – Décuplet de baryons $3/2^+$

Saveur	B	J	I	I_3	S	Q
u	1/3	1/2	1/2	+1/2	0	+2/3
d	1/3	1/2	1/2	-1/2	0	-1/3
s	1/3	1/2	0	0	-1	-1/3

TAB. 1.1.2 – Nombres quantiques internes des quarks du modèle original de Gell-Mann et Zweig

Dans le SM actuel, l'ensemble des 6 quarks (et 6 antiquarks) : u, d, c, s, t, b (voir le tableau 1.1.3⁵ sont impliqués dans la formation d'états liés de hadrons, en conséquence de l'interaction forte transmise par les gluons. Ces quarks ont-ils une réalité physique ou sont-ils seulement des artifices mathématiques ? Peut-on assimiler les quarks aux partons et satisfaire ainsi aux principe d'économie énoncé précédemment ? Pourquoi n'a-t-on pas observé jusqu'ici de quark à l'état libre (isolé) ? Comment expliquer par exemple le mécanisme de l'événement représenté dans la figure 1.1.9 ? Nous laissons ces questions ouvertes pour le moment.

Avant de conclure ce survol, nous revenons sur le sujet des interactions entre les particules élémentaires. Le tableau 1.1.4 donne un certain nombre de caractéristiques de chacun des types d'interaction connus.

Q. : le temps de vie du neutron est de 15 min environ. Il s'agit d'un processus

⁵on a donné le qualificatif anglais auquel se rapporte le symbole de saveur usuellement utilisé

saveur/ qualificatif	charge electr.	autre nbre quantique interne	masse constituante MeV/c ²	masse lagrangienne MeV/c ²
d “down”	-1/3	I ₃ =-1/2	350	5 à 15
u “up”	2/3	I ₃ =+1/2	350	2 à 8
s “strange”	-1/3	S=-1	550	100 à 300
c “charm”	2/3	C=+1	1300 à 1800	
b “bottom”	-1/3	B=-1	4700 à 5300	
t “top”	2/3	T=+1	170000	

TAB. 1.1.3 – Caractéristiques des quarks du Modèle Standard. Notons que les mêmes symboles S, C, B et T sont utilisables dans d’autres contextes. Par ex. le symbole B désigne le nbre baryonique dans le tableau 1.1.2

faible. Comment expliquer un temps si long, si l’on compare aux valeurs canoniques de la table ?

A chaque type d’interaction on associe une “charge”, par extension de la charge électrique dans l’interaction e.m..

La conditio sine qua non pour que la portée du champ d’interaction soit infinie est que son quantum ait une masse nulle. Cette condition n’est toutefois pas suffisante ; par exemple, on admet sur la base des données expérimentales actuelles que le gluon, vecteur de l’interaction forte, a une masse nulle bien que la portée du champ fort soit de l’ordre du fm.

On introduit des facteurs de **couplage** (mot à retenir) sans dimension, pour pouvoir comparer les intensités des “forces” en action. Ces facteurs de couplage sont dans les rapports $1/10^{-2}/10^{-5}/10^{-38}$ respectivement pour les interactions forte/e.m./faible/gravifique.

Dans la dernière ligne du tableau 1.1.4, on donne les temps de vie de particules qui se désintègrent sous l’effet de l’interaction concernée. Il apparaît que plus intense est l’interaction, plus courte est la durée de vie de la particule.

Quelles sont les sources d’information disponibles sur les quanta des champs d’interaction ?

Nous laissons ici de côté le cas du graviton, car il ne joue pas de rôle en HEP aux énergies accessibles actuellement..

Pour le photon on dispose de beaucoup de résultats d’observation et de mesure des processus tels que : l’effet photoélectrique, l’effet Compton, la diffusion Coulombienne sur le champ d’un noyau (figure 1.1.5 and figure 1.1.6), le rayonnement de freinage ou Bremsstrahlung (p.ex. figure 1.1.10), la radiation γ cosmique.

Les bosons W et Z sont produits et observés au collisionneur $p\bar{p}$ du Fermi-

interaction	gravifique	e.m	faible	forte
exemple de manifestation	poids des corps	cohésion de l'atome ondes e.m.	radioactivité β	cohésion du noyau
quantum	graviton	photon	W^\pm, Z	gluon
spin ^{parité}	2	1 ⁻	1	1 ⁻
masse [GeV/c ²]	0	0	80.2(W) 91.2(Z)	0(?)
portée [m]	∞	∞	10^{-18}	$\leq 10^{-15}$ (1 fm)
"charge"	masse	ch. électrique	ch. faible	ch. de couleur
couplage	K(Newton)		G_F (Fermi)	"g"
pot. statique	$-K m_1 m_2 / r$	$-q_1 q_2 / 4\pi r$		$-g_{\text{eff}} \frac{e^{-\mu r}}{4\pi r}$
couplage sans dimension	$K M^2 / \hbar c = 0.59 \times 10^{-38}$	$\alpha = e^2 / 4\pi \hbar c = 1/137.036$ (1/128 au LEP)	$(M c^2)^2 G_F / (\hbar c)^3 = 1.01 \times 10^{-5}$	$\alpha_s = g^2 / 4\pi \hbar c = 1 \text{ à } 10$ (0.113 au LEP)
σ typique [m ²] à 1 GeV		10^{-33}	10^{-44}	10^{-30}
temps de vie [sec]		$10^{-16} \text{ à } -21$	$10^{-7} \text{ à } -13$	$10^{-22} \text{ à } -24$

TAB. 1.1.4 – Caractéristiques des types d'interaction. M est la masse du proton, e la charge du proton

lab(dans l'Illinois), au LEP (au CERN) et au SLC (à Stanford, Californie). Par exemple, le LEP a été ajusté dans une première phase sur la production du boson Z, et dans une seconde phase sur la production de couples W^+W^- . La figure 1.1.7 donne un exemple de désintégration faible où intervient l'échange d'un boson W. Les figures 1.1.8 à 1.1.11 représentent des processus d'interaction typiques observés au LEP.

Le gluon comme le quark n'est pas observable isolément. Sa mise en évidence est indirecte via la formation d'un jet de hadrons. La figure 1.1.11 illustre un tel processus. Nos connaissances actuelles à ce sujet se fondent essentiellement sur les expériences auprès des collisionneurs de particules.

Q. : calculer la valeur de μ (table 1.1.4, interaction forte) qui correspond à une portée de 1 fm.

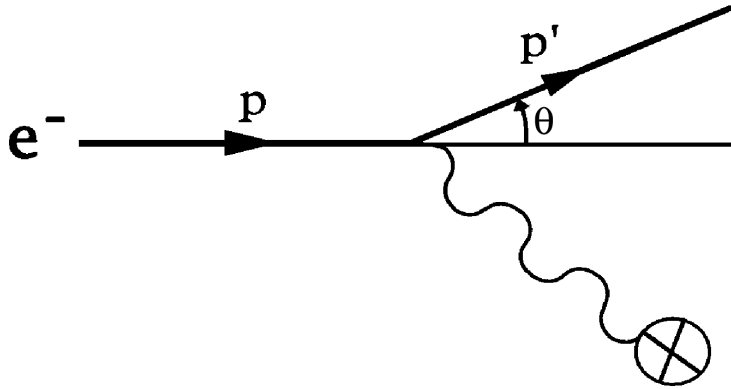


FIG. 1.1.5 – Diffusion Coulombienne : un e^- interagit avec le champ e.m. d'un noyau ; l'électron est diffusé sous l'angle θ . (voir chapitre 5)

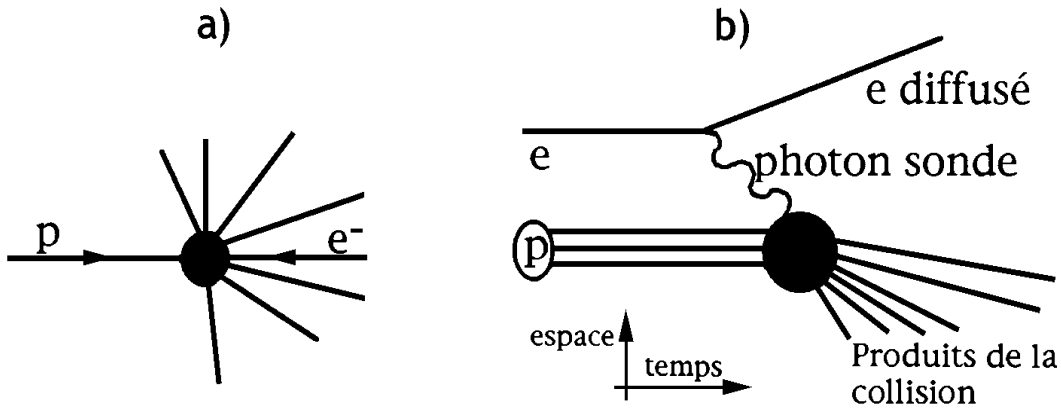


FIG. 1.1.6 – En a) : collision électron - proton. En b) interprétation physique où l'on considère un photon virtuel sondant la structure e.m. du proton (“diffusion inélastique profonde”, voir chapitre 6)

1.2 Sources radioactives⁶

On peut dire que la physique des particules est née avec l'observation par Becquerel (1885) que les sels d'uranium émettent une radiation qui peut impressionner les plaques photographiques après avoir traversé un écran opaque.

Les sources radioactives peuvent être naturelles ou produites par activation, dans un réacteur par exemple. Les produits radiopharmaceutiques utilisés dans les hôpitaux sont en général produits par des cyclotrons (p. ex. le desoxyglucose activé au ^{18}F , qui sert comme traceur du métabolisme du glucose, ou l'eau marquée à l'

⁶Voir cours d'introduction, notice des TP3 et cours sur les modèles nucléaires.

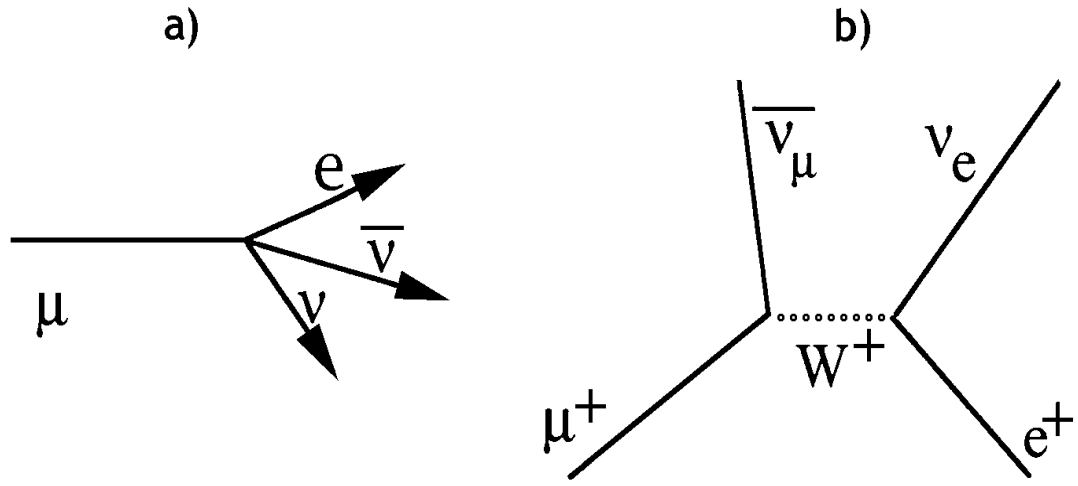


FIG. 1.1.7 – En a) : désintégration du muon (μ). En b) interprétation du mécanisme de la désintégration du μ^+ par l'échange d'un boson virtuel W de l'interaction faible (voir chapitre 7)

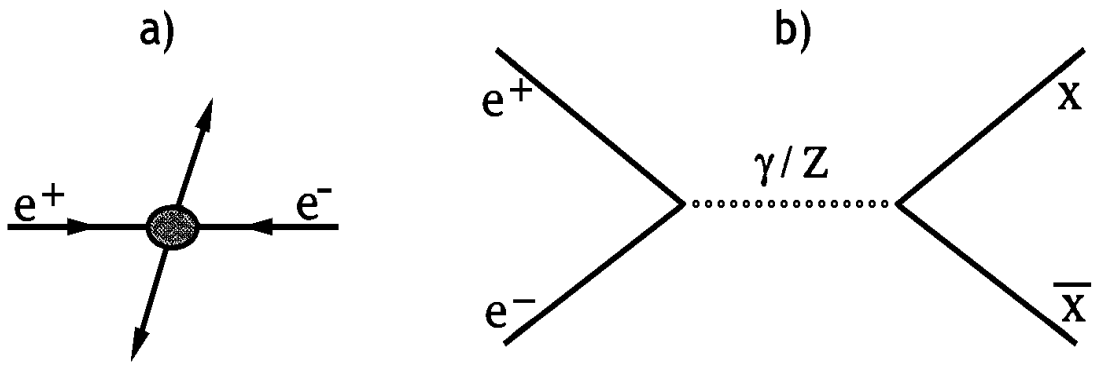


FIG. 1.1.8 – Annihilation d'une paire électron - positron, création d'un photon (ou Z) et désintégration de ce dernier en un paire particule-antiparticule. S'il s'agit d'une paire quark-antiquark, on observe deux jets d'hadrons comme montré à la figure 1.1.9

¹⁵O).

Au laboratoire de physique des particules, on utilise des sources d' α, β, γ et de neutrons. Il s'agit souvent d'outils de calibration de détecteurs et de test. Les énergies accessibles vont du keV à quelques MeV. Par exemple l' ⁸⁸Y émet des photons de 1.8 MeV. Pour obtenir une énergie plus élevée on peut utiliser des sources composées, comme la source Pu-Be qui émet des photons de 4.43 MeV. Dans cette source, un émetteur α (le Pu) est entouré de Be. Ce dernier, après

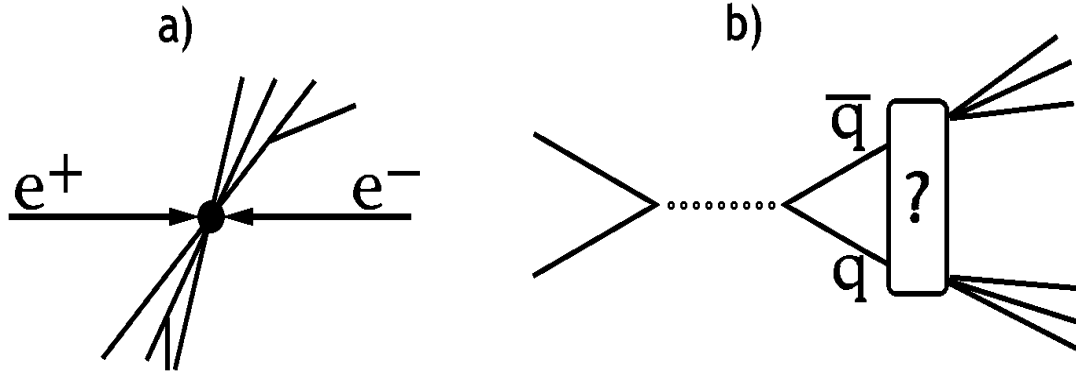


FIG. 1.1.9 – Processus d’hadronisation. La paire quark-antiquark n’est pas visible directement dans l’état final. Lorsque l’énergie disponible est suffisante (~ 10 GeV), il se forme deux groupes de particules (essentiellement des pions) - les **jets** -. Le mécanisme dit de l’**hadronisation** est représenté par une boîte

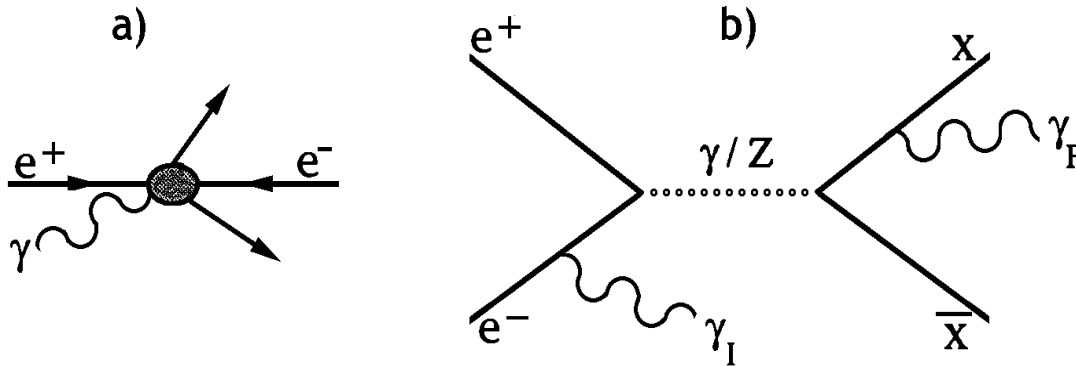


FIG. 1.1.10 – Production additionnelle d’un (ou plusieurs) photon. Le diagramme montre deux cas possibles : γ_I correspond à l’émission du photon dans “l’état initial”, γ_F l’émission dans “l’état final” (quand X est une particule chargée). Dans le calcul du processus, il intervient une contribution d’interférence entre ces deux possibilités

capture de la particule α , devient du $^{12}\text{C}^*$ qui peut se trouver dans un état excité à un niveau de 4.43 MeV. Ce dernier se désexcite par émission γ .

1.3 Les particules cosmiques

En 1912 V. F. Hess découvre qu’un électroscope à bord d’un ballon enregistre des charges électriques. Vingt ans plus tard, avec l’invention du compteur Geiger, on met en évidence une activité continue de particules cosmiques au niveau de

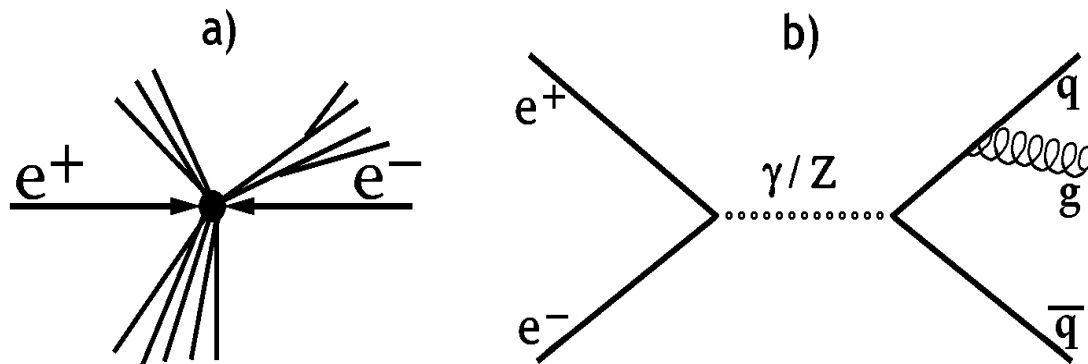


FIG. 1.1.11 – Événement à trois (ou plus) jets d’hadrons. Le processus imaginé est l’émission d’un (ou plusieurs) gluon par un des quarks de l’état final

la mer. L’exposition d’émulsions photographiques nucléaires permet la découverte du positron (1932), du muon (1933-1938), du pion (1947) ainsi que des particules “étranges” (Λ , K^0 , K^+). La création de paire $\gamma \rightarrow e^+ e^-$ est également observée pour la première fois dans le rayonnement cosmique. En 1948 on y découvre des ions He puis ceux d’éléments plus lourds, jusqu’à l’U.

La présence de **neutrinos** a pu être révélée grâce à des détecteurs composés de tonnes de matière pour compenser la très faible probabilité d’interaction. Il est apparu que ces neutrinos peuvent être de provenance solaire, galactique et extragalactique.

Des **photons de très grande énergie** (jusqu’à 100 TeV) sont observés à l’aide de détecteurs couvrant une surface de l’ordre du km^2 , de calorimètres en orbite et, plus récemment, à l’aide de détecteurs à lumière Cherenkov.

Remarquons par ailleurs que nous nous trouvons dans un bain de photons cosmologiques du fond à environ 2.7 K.

Q. : quelle est la densité d’énergie et le nombre de ces photons ?

La Galaxie a une luminosité de 10^{33} à 10^{34} W dans la bande de fréquences du rayonnement cosmique, à comparer à 10^{37} W dans le spectre visible et à 10^{32} W dans la bande des rayons X.

En plus de son intérêt en astrophysique et en cosmologie, le rayonnement cosmique trouve une utilisation importante comme source de haute énergie pour la calibration des détecteurs. A la surface de la terre, le taux intégré sur l’angle solide est de l’ordre de 500 particules/ m^2/sec .

Le rayonnement cosmique primaire (“à la source”) est essentiellement constitué de protons, d’ α et de noyaux lourds dans les proportions de 86/12/1 % ; on y trouve en plus environ 1% d’électrons, 0.1% de γ et des traces d’antiprotons et de positrons. Ce rayonnement traverse le milieu interstellaire où il interagit (*spallation*) avec une matière de faible densité mais sur des parcours énormes. Les par-

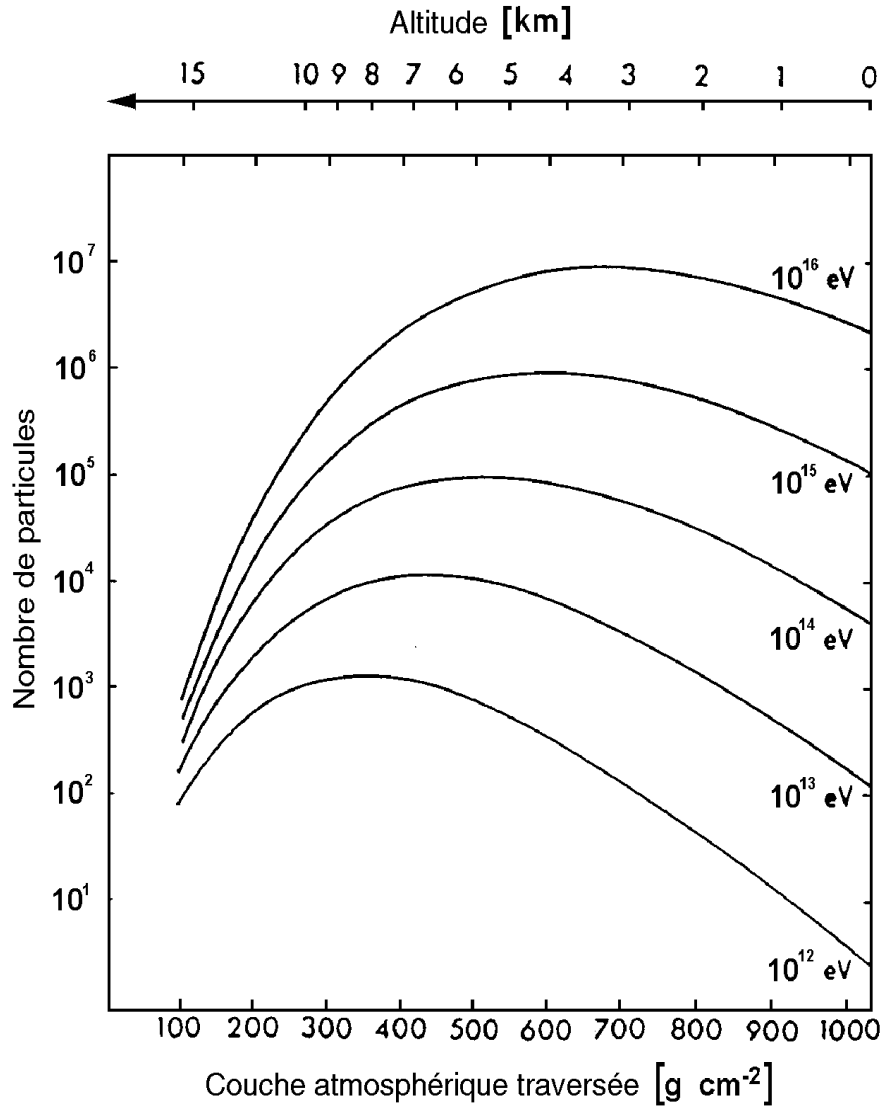


FIG. 1.3.1 – Nombre de particules dans une gerbe e.m. en fonction de l'altitude ; en paramètre : énergie du photon primaire

ticules chargées sont déviées par les champs magnétiques interstellaires, célestes, solaire et terrestre. L'information sur la composition initiale du rayonnement et sur sa provenance s'en trouve dégradée. On voit ici l'intérêt de se concentrer sur les gamma de haute énergie. Les neutrinos donnent aussi une bonne information sur leur source, entre autre sur la direction de celle-ci, mais avec un taux d'événements très faible. Ce qu'on observe sur terre dépend encore de l'interaction des particules avec le milieu atmosphérique. L'atmosphère a une longueur d'interaction de 70 g/cm^2 et une longueur de radiation X_0 de 34 g/cm^2 . Au niveau de

la mer, les gerbes e.m. engendrées par les γ ont traversé environ $30 X_0$. L'atmosphère est donc un excellent calorimètre; l'ennui est que le maximum du nombre des particules de la gerbe e.m. se trouve à quelques km d'altitude (4 km pour des gerbes de γ de 10^{16} eV et 8 km à 10^{12} eV, voir figure 1.3.1).

La figure 1.3.2 donne la composition des particules secondaires au niveau de la mer⁷. La diffusion latérale à ce niveau est de l'ordre du km^2 pour les gerbes e.m. et de quelques km^2 pour les gerbes hadroniques. Dans les deux cas on peut estimer l'énergie initiale en comptant le nombre des particules (résolution mauvaise). Les gerbes hadroniques peuvent être différenciées des gerbes e.m. par le fait qu'elles contiennent des muons (de $\pi \rightarrow \mu \nu_\mu$).

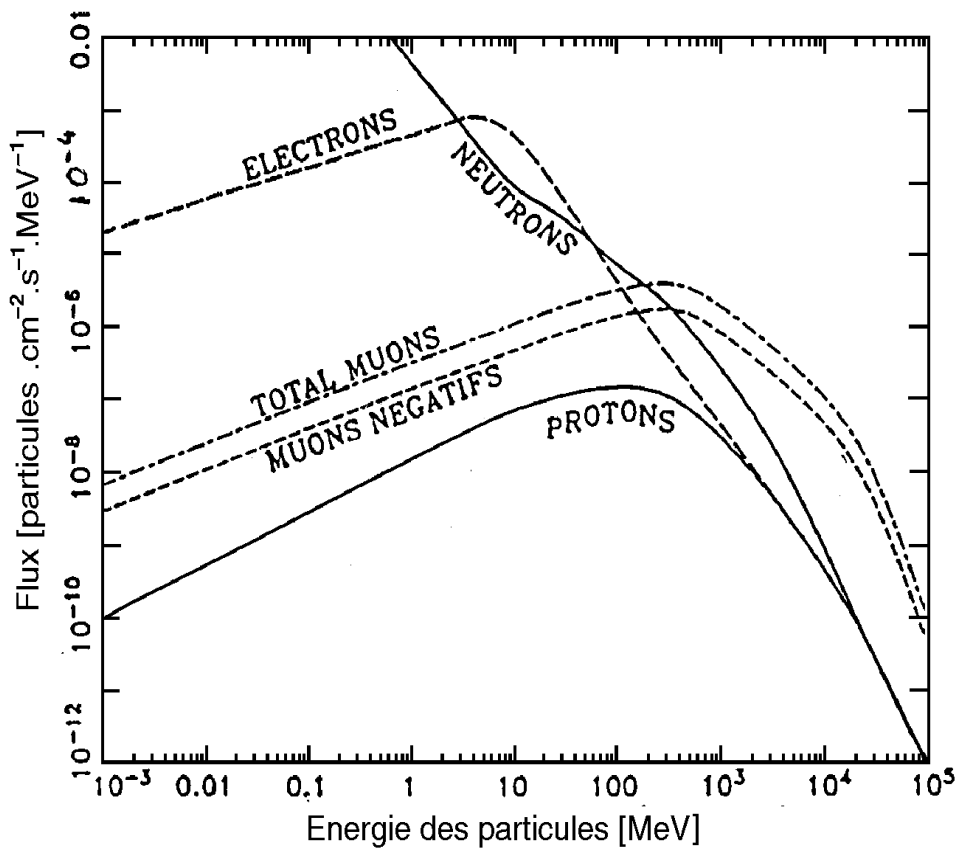


FIG. 1.3.2 – Flux du rayonnement cosmique secondaire au niveau de la mer

Les théories d'astrophysique doivent rendre compte de la composition du rayonnement cosmique primaire et de son spectre d'énergie. La figure 1.3.3 donne la compilation de plusieurs mesures du flux de particules cosmiques (essentiellement

⁷J. Ziegler, Nucl. Instr. Meth. 191 (1981) 419.

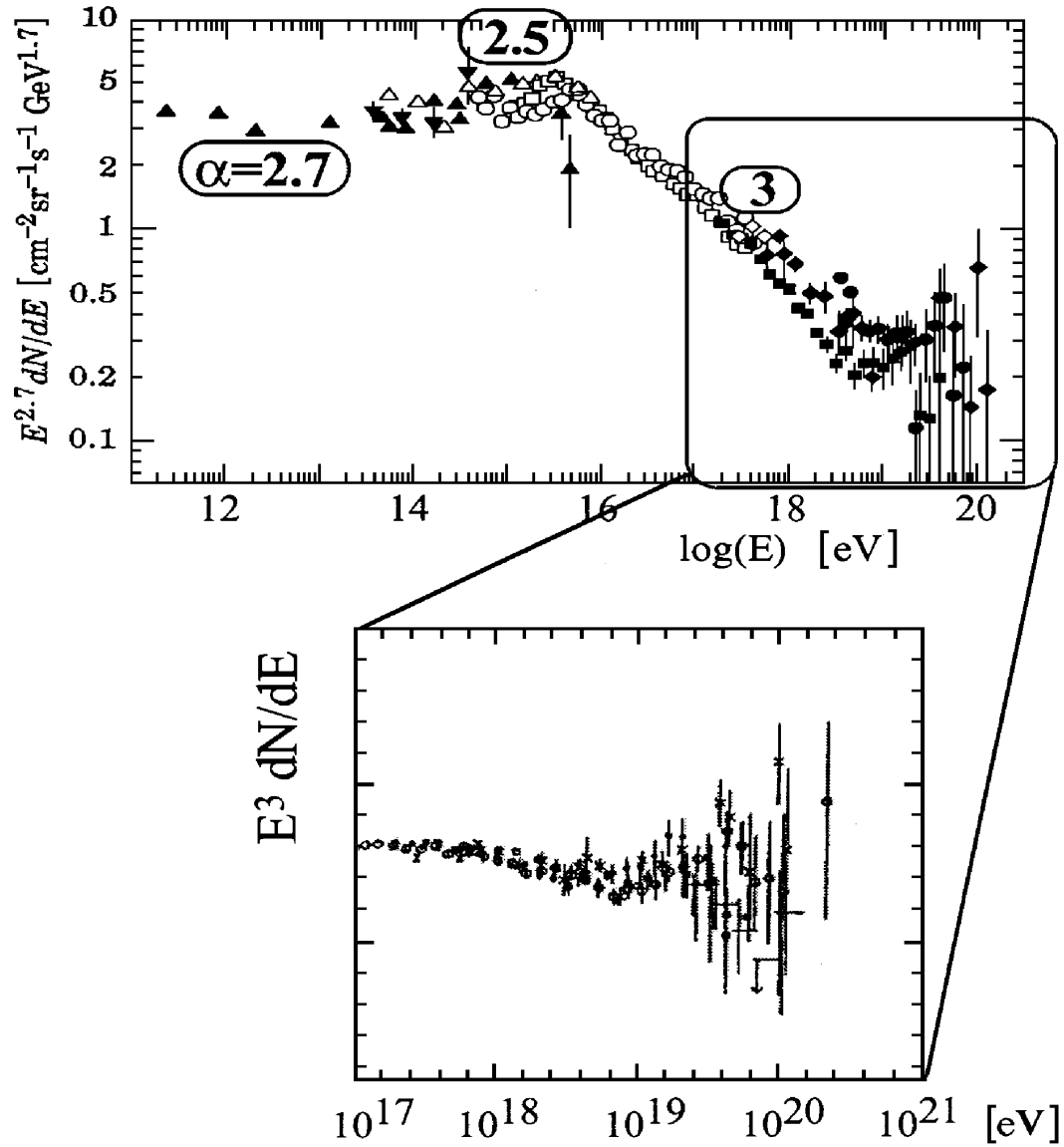


FIG. 1.3.3 – Spectre énergétique de la composante hadronique du rayonnement cosmique primaire. Pour aplatir la distribution, on a multiplié le taux par $E^{-2.7}$ (en haut) et E^{-3} (le zoom en bas)

des hadrons). On y observe une loi du type :

$$\frac{dN}{dE} \propto E^{-\alpha} \quad \text{avec } \alpha = 2.7 \text{ jusqu'à } 10^7 \text{ GeV et } 3.0 \text{ au delà}$$

Il est probable que la plus grande partie de ce rayonnement est d'origine galactique, dans les supernovae selon l'hypothèse de F. Zwicky (1938). Dans ce cas, toutefois, on s'attend à trouver une proportion d'ions lourds supérieure à ce qu'on observe. On suppose que l'interaction avec le milieu interstellaire est suffisante pour casser des ions lourds et dégrader ainsi la composition du rayonnement.

En 1949 E. Fermi a imaginé un processus d'accélération basé sur un modèle simple : des nuages "magnétiques" se déplaçant dans l'espace frappent les particules chargées et leur impartissent une accélération. Après plusieurs collisions on trouve une distribution en loi de puissance. Ce modèle ne fonctionne pas comme tel, mais il est à la base des modèles plus récents qui attribuent l'accélération à des centres diffuseurs microscopiques dans des régions turbulentes près des centres galactiques, dans les nuages en expansion des super-novae etc..

La présence d'une **composante exotique** dans le rayonnement cosmique n'est pas exclue. L'annihilation de certaines particules, postulée pour résoudre le problème de la "matière noire" (voir plus loin), peut donner des gamma de l'ordre du GeV.

La particule cosmique la plus énergétique observée jusqu'ici (il s'agit probablement un proton) a une énergie estimée à environ $3 \cdot 10^{20}$ eV. Aucun modèle actuel n'apporte d'explication quantitative sur une telle observation. Il a été suggéré que des particules cosmiques de très haute énergie proviennent de "défauts topologiques" qui perdurent depuis la création de l'Univers. Pour simplifier, après le Big Bang, l'univers s'est cristallisé en se refroidissant mais le cristal formé a des clivages et des dislocations. La procédure de "cristallisation" engendre une "brisure de symétrie", qui sera discutée au Chapitre 9. Ces défauts (parois, cordes -*strings*-, monopoles, textures,...) permettraient aussi d'expliquer la structure à grande échelle de l'Univers (amas de galaxies etc.) car ils constituent des centres d'attraction gravitationnelle.

Q. : estimer l'énergie d'une balle de fusil.

Par application du théorème du viriel aux amas de galaxies, considérées comme des systèmes isolés en équilibre, on peut faire une prédiction de la masse qui participe à la gravitation. La masse prédite équivaut à environ 10 fois la masse estimée de la matière visible (lumineuse). Par ailleurs, ce même facteur 10 est requis par les cosmologues. Plusieurs hypothèses ont été formulées pour expliquer l'origine de cette "masse manquante" ou **matière noire** : présence de neutrinos massifs, d'axions, de super-particules, de monopoles, de "cordes" cosmiques. On a postulé aussi sur l'existence de planètes froides et opaques (les MACHOs). Certaines observations indiquent l'existence d'un effet de *microlensing*, c.à.d. de focalisation de la lumière d'une étoile appartenant au Nuage de Magellan par un objet opaque se situant entre la source et l'observateur. En 1999, l'étude des supernovae (de type Ia) a montré que l'expansion de l'univers est en phase d'accélération. Ce phénomène inattendu est maintenant décrit par une forme (inconnue) d'**énergie noire**, qui produit une sorte de pression négative. En combinant toutes

les données des mesures cosmologiques (supernovae, fond cosmologique à 2.7 K, mesures gravitationnelles,...) on arrive à un ensemble de paramètres qui montrent que l'univers est "plat" (au sens de la relativité), constitué d'énergie noire pour environ 70 %, et matière pour le reste. La matière visible est seulement quelques %. De plus, le nombre de photons (du fond à 2.7 K) est plus que 10^9 fois le nombre de baryons (protons + neutrons). D'après le modèle, l'univers a $14 \cdot 10^9$ années. (Voir articles annexés sur matière et énergie noire.)

1.4 Particules et Astrophysique (les astroparticules)

La physique des particules joue un rôle important en astrophysique et réciproquement. Les informations recueillies dans l'une de ces disciplines ont souvent d'étroites répercussions dans l'autre. Par exemple, si la masse manquante de l'Univers est due à l'existence de neutrinos massifs, une limite supérieure est assignée à cette masse. Autre exemple : les contraintes sur les proportions des baryons et des photons dans l'univers fixent le nombre d'espèces de neutrinos ; l'estimation de 2.3 ± 0.8 espèces a été fournie bien avant les résultats des expériences du LEP.

La **physique stellaire** a été dominée durant de nombreuses années par un problème qui a mobilisé l'attention des experts de ce secteur : le flux de neutrinos solaires mesuré était de 40 à 70% inférieur au flux prédit par le "**Modèle solaire standard**"⁸.

Relevons ici quelques unes des expériences de pointe réalisées à ce sujet. Ces expériences sont en général sensibles à une certaine bande d'énergie des ν , comme indiqué sur la figure 1.4.1. . Le détecteur HOMESTAKE utilisait l'absorption de ν par le ^{37}Cl qui se transforme en ^{37}Ar . Le taux mesuré était de 2.2 ± 0.2 SNU ($1 \text{ SNU} = 10^{-36}$ captures par atome et par seconde) à comparer avec les prédictions théoriques de 8.0 ± 3.0 (modèle de Bahcall ⁹) ou 6.4 ± 1.2 (chez Turck-Chièze ¹⁰).

L'expérience KAMIOKANDE utilisait la lumière Cherenkov émise par les électrons de recul issus de collisions $\nu - e$ dans l'eau ; elle a confirmé l'existence du déficit. Elle a aussi prouvé que le signal observé vient bien du soleil (voir figure 1.4.2).

L'expérience GALLEX utilisait l'absorption de ν par le ^{71}Ga qui se transforme en ^{71}Ge ; elle a mesuré un taux de $87 \pm 14 \pm 7$ SNU, à comparer à un taux attendu de plus de 130 SNU.

Le Modèle Standard du Soleil est considéré par les experts comme fournissant des prédictions fiables sur le flux de neutrinos produit. Il restait donc à suspecter la prise en compte incorrecte d'effets en rapport avec les propriétés des ν ou avec leur détection.

On peut supposer que les ν disparaissent par désintégration spontanée. Cette

⁸notez que ce modèle n'a rien à voir avec la Modèle Standard (SM) mentionné au § 1.1

⁹J.N. Bahcall and Pinsonneault, Rev. Mod. Phys., 64 (1992) 885.

¹⁰S. Turck-Chièze et al, Astrophys. J. 335 (1988) 4415.

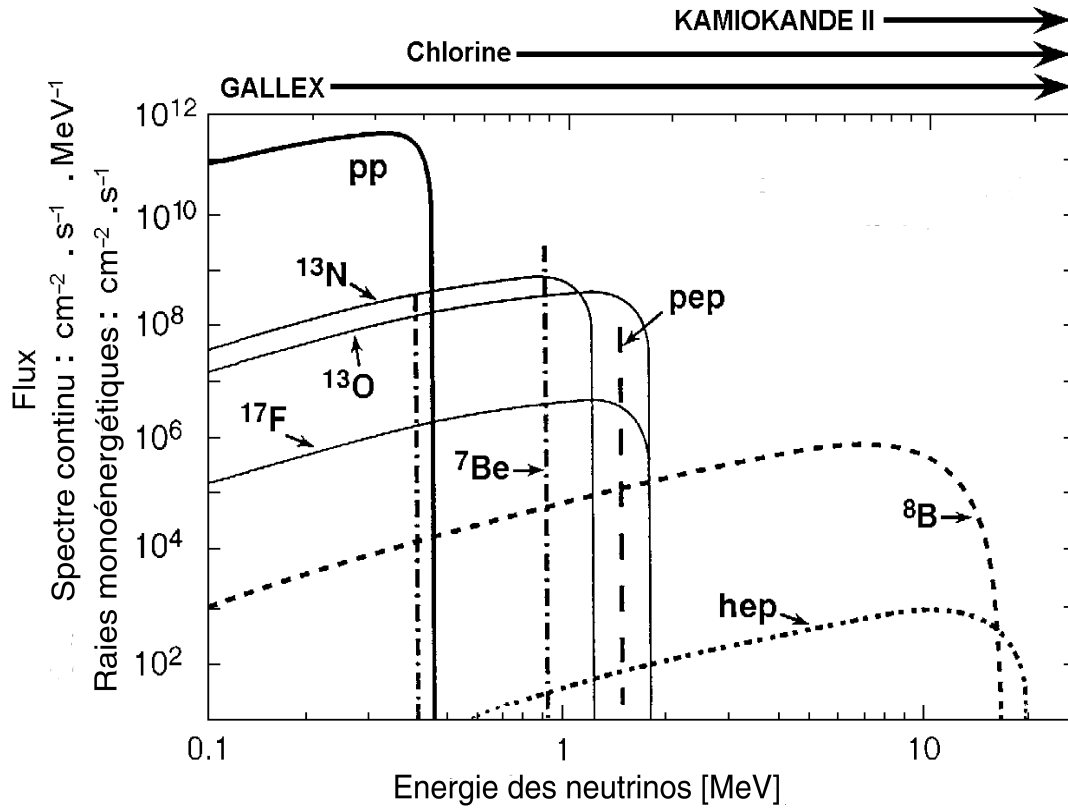


FIG. 1.4.1 – Spectre de neutrinos solaires. Les indications en paramètres concernent les processus de production. Voir J.N.Bahcall Neutrinos Astrophysics chap.3. Ed.Cambridge Univ.Press

hypothèse est en contradiction avec l'observation d'une bouffée (*burst*) de ces particules lors de l'explosion de la Supernova 1987a qui se trouve à 165000 années lumière.

On peut postuler que les ν sont massifs. Dans ce cas, des transmutations $\nu_e \rightarrow \nu_\mu$ et $\nu_\mu \rightarrow \nu_\tau$ deviennent possibles. Les résultats des expériences susmentionnées reposent sur l'emploi de détecteurs sensibles exclusivement aux ν_e ; ce qui pourrait entraîner un défaut dans le taux de comptage mesuré.

Sur la base de nos connaissances actuelles de l'interaction faible, (voir chapitre 7), il apparaît que dans chacune de ces expériences le détecteur n'est sensible qu'à l'une des composantes d'interaction : soit celle due au courant chargé (échange de W), soit celle due au courant neutre (échange de Z). Cet état de fait pourrait être la cause du déficit de flux constaté et du faible accord entre les résultats.

Récemment une nouvelle génération d'expériences ont été initiées, parmi lesquelles celle de l'Observatoire Sudbury dont le détecteur (SNO) à lumière Cheren-

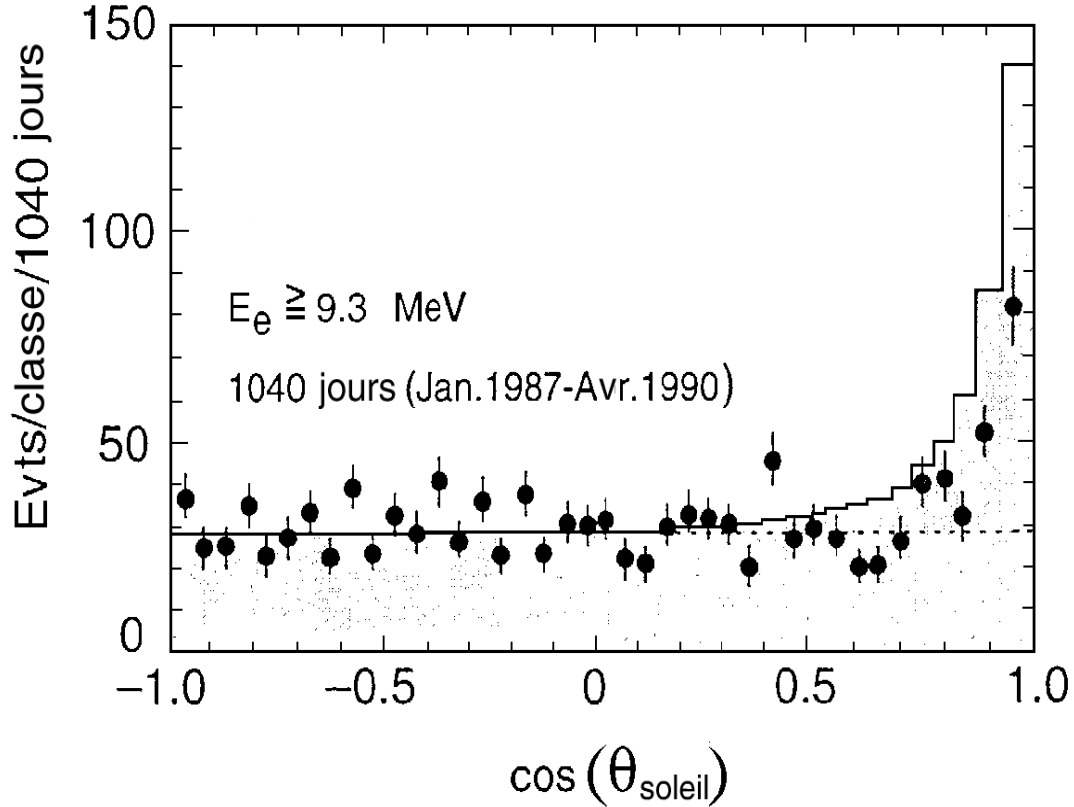


FIG. 1.4.2 – Distribution angulaire des événements ν - e enregistrés par le détecteur de l'expérience KAMIOKANDE ; la direction du soleil est prise comme axe de référence

kov exploite les deux composantes de l'interaction faible¹¹. Les premiers résultats obtenus apportent une réponse non ambiguë aux questions soulevées ci-dessus. Le flux de neutrinos déduit du total des interactions enregistrées est en parfait accord avec les prédictions théoriques du Modèle solaire Standard. De plus, des neutrinos transmutés sont mis en évidence dans le flux de ν solaires¹². La transmutation de saveur est confirmée, ce qui amène à la conclusion que les neutrinos sont massifs. Notons qu'en 1998 la collaboration Super-Kamiokande avait annoncé l'observation d'une anomalie dans le flux de ν présents dans les gerbes du rayonnement cosmique (voir URL : http://www-sk.icrr.u-tokyo.ac.jp/sk/index_e.html et <http://www.phys.hawaii.edu/~superk/>). Approximativement le nombre de ν_μ devrait être le double de celui de ν_e . L'observation montre un déficit dans le

¹¹The SNO Collaboration. Nucl. Instr. Meth. A449(2000)172, <http://www.sno.phy.queensu.ca>

¹²le détecteur SNO permet de sélectionner les ν_e engendrés dans le soleil par la réaction ${}^8B \rightarrow {}^8Be^* + e^+ + \nu_e$

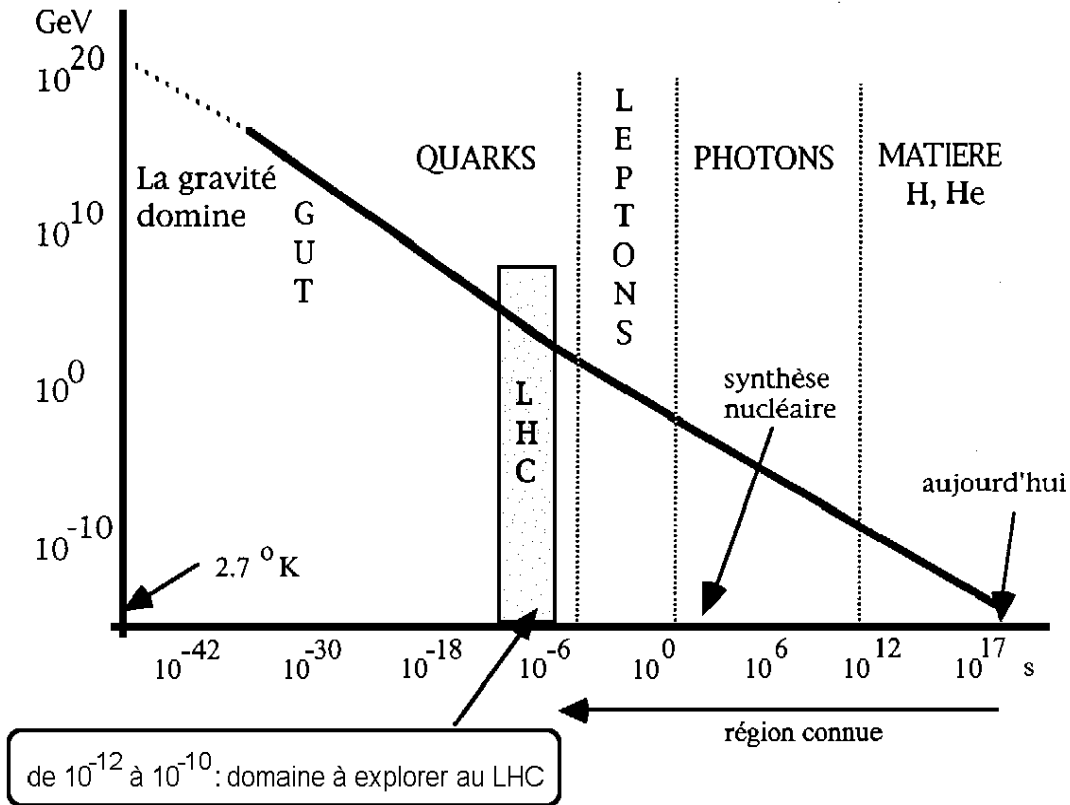


FIG. 1.4.3 – Température de l’Univers primitif, en fonction du temps. La situation du LEP correspond à 10^{-10} s. La subdivision en “ères dominantes” est indiquée. 1 GeV correspond à 10^{13} Kelvin

comptage des ν_μ compatible avec $\Delta m^2 = (m_{\nu_\mu} - m_{\nu_e})^2 \approx 3 \times 10^{-3} \text{ eV}^2$.

On a là des exemples supplémentaires d’interconnexions entre la physique des particules et l’astrophysique.

En **Cosmologie**, citons parmi les problèmes étudiés auxquels on n’a pas encore de réponse définitive : l’origine de l’asymétrie matière-antimatière, la structure à grande échelle de l’Univers, la nature de la masse manquante et de l’énergie noire. Les énergies mises en oeuvre dans les collisionneurs tels que LEP sont du même ordre que celles qui renaissent dans l’Univers à 10^{-10} sec (figure 1.4.3). Le futur LHC au CERN permettra de gagner 1-2 ordres de grandeur. On voit que l’accroissement des énergies accessibles dans les expériences de physique des particules donne accès à des informations concernant l’état d’un univers de plus en plus jeune. En **astrophysique des “hautes énergies”** l’effort actuel se concentre sur l’observation dans la radiation cosmique de γ et de ν à des énergies de l’ordre du TeV. On s’intéresse tout particulièrement aux mécanismes de production et/ou d’accélération des particules ; différentes hypothèses ont été émises à ce sujet :

quasars, étoiles à neutrons, trous noirs, accélérateurs galactiques et autres sources exotiques. Dans ce contexte, mentionnons une expérience réalisée à l’université de Genève dans laquelle on a observé des coïncidences associées à des gerbes d’origine galactique (à ne pas confondre avec les gerbes produites dans l’atmosphère).

L’Univers renferme un grand nombre de secrets qui restent à percer. Les études en Cosmologie touchant à la création de l’Univers sont de nature à contribuer de manière décisive aux tests des théories de grande unification (GUT) (c’est le point de vue holistique).

Les chercheurs en physique des particules, en astrophysique et en cosmologie sont engagés dans un futur de collaboration fructueuse ; on parle dorénavant de **la physique des astroparticules**.

1.5 Les accélérateurs

En HEP on peut travailler en régime de collisionneur ou en régime de cible fixe. Dans le premier cas, deux faisceaux se rencontrent au centre du détecteur et font une collision “frontale”. Le carré de l’énergie dans le centre de masse est alors :

$$s = 2E_1 E_2 \{1 + \sqrt{[1 - (m_1/E_1)^2][1 - (m_2/E_2)^2]}\} + m_1^2 + m_2^2 \quad (1.5.1)$$

Dans un collisionneur tel que le LEP : $m_1=m_2=m$ et $E_1=E_2=E$. La relation 1.5.1 donne :

$$\sqrt{s} = 2E$$

Par contre, en régime de cible fixe, le projectile 1 frappe le noyau cible 2 au repos ($E_2=m_2$). Si $E_1 \gg m_1$ et m_2 on peut déduire de la relation 1.5.1 que :

$$\sqrt{s} \cong \sqrt{2m_2 E_1}$$

La figure 1.5.1 donne un historique des collisionneurs utilisés jusqu’à aujourd’hui et en projet.

L’avantage du régime collisionneur sur le régime cible fixe est compensé par le fait que le nombre d’interactions y est beaucoup plus faible. On introduit le concept de **Luminosité L** de la machine ; la luminosité est définie comme le taux d’interactions par unité de section efficace :

$$\boxed{\text{Taux d'interactions } [s^{-1}] = \sigma L} \quad (1.5.2)$$

La luminosité L est proportionnelle à l’intensité des faisceaux et inversement proportionnelle à leur section. Dans une collisionneur comme le LEP, les faisceaux sont discontinus et groupés en paquets (“*bunches*”). On s’arrange pour qu’un “*bunch*” e^+ rencontre son homologue e^- précisément à l’endroit où l’on a installé le détecteur. Si l’on a b “*bunches*” dans chaque faisceau :

$$L = \frac{n_1 n_2 b f}{A} = \frac{I_1 I_2}{e^2 b f A} \quad (1.5.3)$$

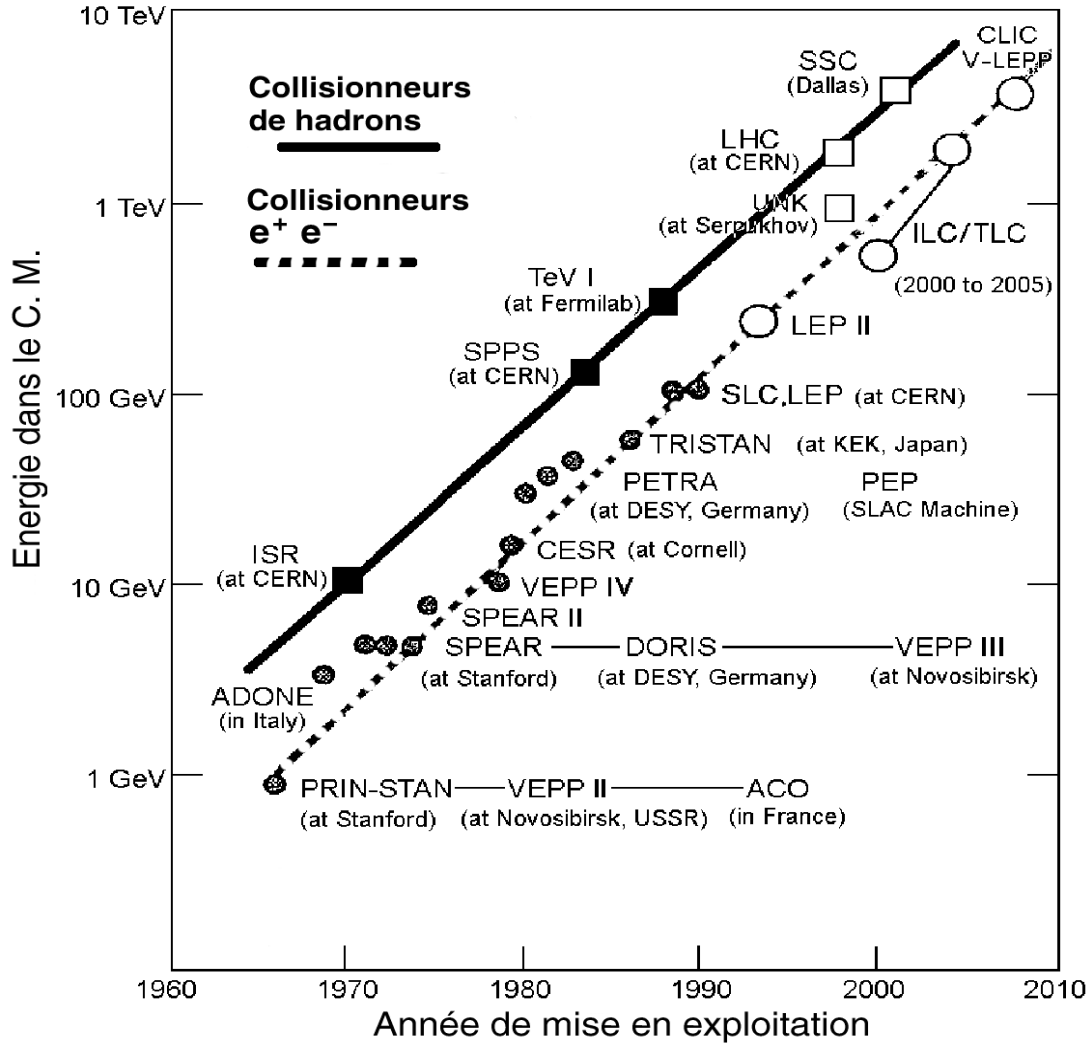


FIG. 1.5.1 – Les collisionneurs : les cercles désignent les e^+e^- , les carrés les collisionneurs hadroniques. Les collisionneurs en service ont des symboles noirs

où n_i est le nombre de particules/bunch, f la fréquence de révolution et A la section du faisceau. Les I_i sont les courants moyens, e la charge de l'électron. Si les "bunches" sont à peu près gaussiens, on obtient : $A=4\pi\sigma_x\sigma_y$. La figure 1.5.2 montre la situation du LEP le 23-7-1994. Si l'on tient compte des informations complémentaires suivantes :

$$b=8$$

$$f=3 \cdot 10^5 \text{ km/s} / 26.7 \text{ km}=11.2 \cdot 10^3 \text{ s}^{-1}$$

$$\sigma_y \approx 10 \mu\text{m}$$

Comments (17:01): Mode = Calibration		Fill # 2326 Colls ??? Coasted 0.6h
		L3 Aleph Opal Delphi
End of fill MD started		SpecL 2.01 1.54 1.70 1.91E31
- energy calibration		Lumin 5.27 4.04 4.46 5.00E30
- polarization with bunch train bumps		Int L 10.29 16.44 -0.01 7.53/nb
		Bkg 1 0.75 1.84 2.13 0.20
		Bkg 2 0.32 0.11 0.80 0.53
Beams stay in collision; experiments can take data until further notice.		Bkg 3 0.000 R/H
		Magnt 30320 4970 6995 5000(A)
		L3 HV TTtTESLHHHFRMMFVFMHET8
		usw IOzFBBDBCMVAPBBRVVDW8
EBeam Nomi 45.572		
(GeV) Hall 45.670	V-BeamSep @ 17:16	-*- This space for rent -*-
Flip@17:13 45.630	= 0.00 [um]	
NMR @17:11 0.000	BetaV nom 5.00[m]	

SPS @ 17:15	LEP @ 23-AUG-1994 17:15:51 (8p x 8e)	Tot(uA) tau(h)
e+ 0. 0.	173 173 175 178 168 176 167 169	1381 26.2 e+
e- 0. 0.	193 187 189 187 188 189 189 191	1519 32.9 e-
Page101@-L3TBox @-Live-Acc-En1-Tec-M*S-Sin-Lum-LST-Bem-STB-Mu1-Mu0-En0-SPh----		
17:16:32 17:16:41 94% 6.7 1.7 2.5 1.5 .24 .86 .02 .09 .00 1.9 36. 507 .76 HzP		

FIG. 1.5.2 – Le LEP au 23-AUG-1994 17 :18 :18. L'énergie nominale est de 45.572 GeV, les courants d'e⁺ et d'e⁻ sont de 1.381 mA, et 1.519 mA. Les moniteurs de luminosité des expériences donnent une luminosité de 4 à 5 10³⁰ cm⁻² s⁻¹

$$\sigma_x \approx 250 \mu\text{m} \quad \text{donc} \quad A \approx 2.5 \cdot 10^{-8} \text{ m}^2$$

la relation (1.5.3) donne (pour I₁ = 1.4 C s⁻¹, I₂ = 1.5 C s⁻¹ et e = 1.6 10⁻¹⁹ C) : L = 3.7 10³⁰ s⁻¹ cm⁻². Ce résultat est voisin des valeurs mesurées par les **moniteurs de Luminosité** des expériences.

L'ancêtre des collisionneurs e⁺e⁻ est la machine AdA (**A**nello **d**i **A**ccumulazione), construite à Frascati, dont les faisceaux avaient une énergie de 250 MeV.

La figure 1.5.3 montre la variation de la section efficace d'interaction e⁺e⁻ en fonction de l'énergie dans le c.m. Entre 1991 et 1995 l'énergie accessible au LEP (phase I) était située au voisinage immédiat de la masse du Z (91.173 GeV). Au pic (à la résonance) le taux d'interactions est maximal : on a mesuré une section efficace de e⁺e⁻ → Z → hadrons de 30.4 ± 0.1 nb¹³ et une section efficace e⁺e⁻ → Z → μ⁺μ⁻ de 1.5 nb.

Pour L = 10³¹ cm⁻² s⁻¹, le taux d'événements hadroniques est de 0.3 s⁻¹ et de 0.015 s⁻¹ dans la voie di-muon. En un an (on utilise normalement un intervalle de temps "efficace" correspondant à 1/3 d'année) et une luminosité intégrée

¹³rappel : 1 nb = 10⁻³³ cm²

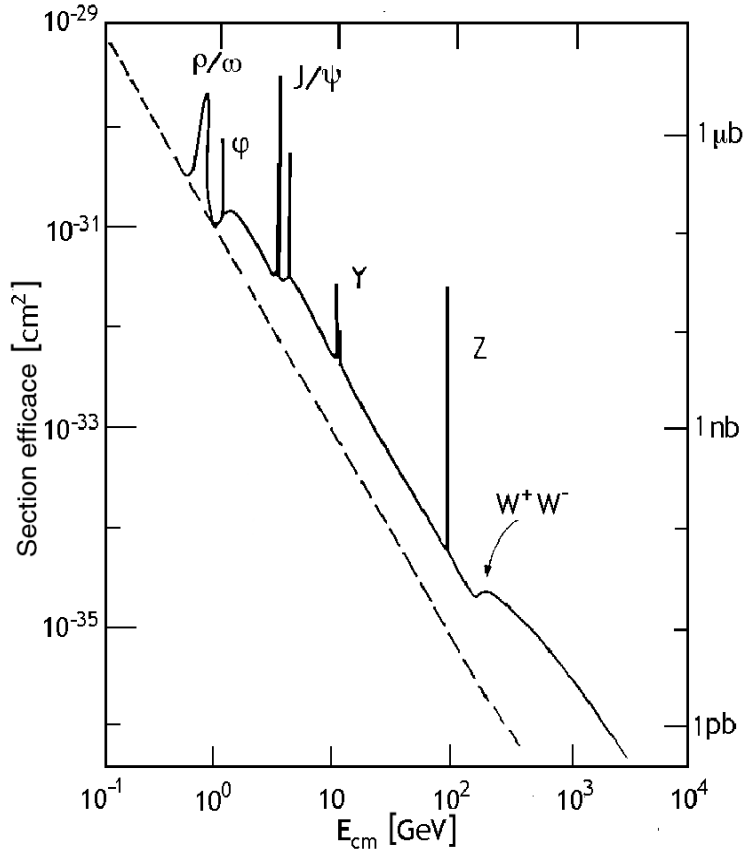


FIG. 1.5.3 – La section efficace d’interaction e^+e^- en fonction de l’énergie dans le c.m.

de $10^5 \text{nb}^{-1} = 100 \text{pb}^{-1} = 10^{38} \text{cm}^{-2}$ on s’attend à recueillir environ 3 millions d’événements hadroniques, si on reste au pic de la résonance et si l’efficacité d’acquisition reste proche de 100%.

Entre 1996 et 2000, l’énergie du LEP (phase II) a atteint environ 100 GeV par faisceau, permettant entre autre la production de paires W^+W^- sur leur couche de masse.

1.6 Les détecteurs

Le détecteur ¹⁴ est l’interface entre le phénomène physique étudié et le physicien. Dans une description quantique, l’observation interfère sur le processus physique élémentaire, afin que ce processus devienne “phénomène” (étymologie : ce qui apparaît). La détection se base sur la physique des interactions particule-matière. Une courte introduction sur ce sujet est donnée en fin de chapitre.

¹⁴Voir cours d’introduction

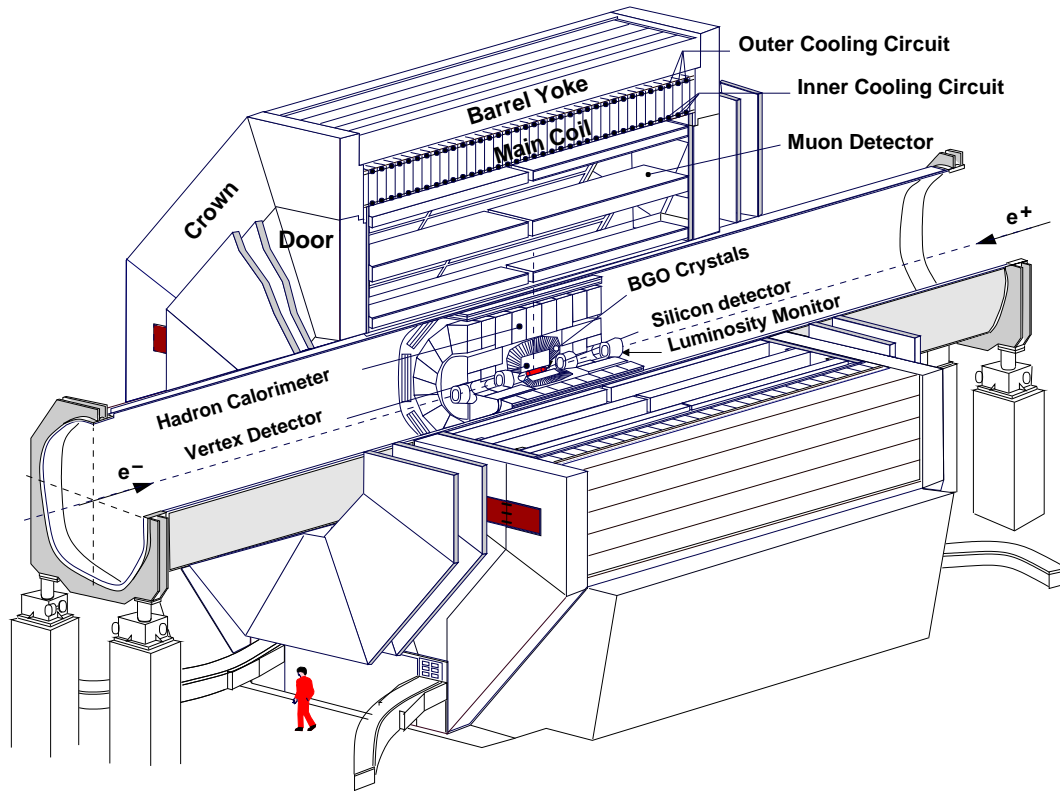


FIG. 1.6.1 – Ensemble des sous-détecteurs de l'expérience L3 au LEP

Des exemples de détecteurs seront donnés au fur et à mesure de la présentation des expériences. Les “gros détecteurs” sont très souvent constitués par l'assemblage de sous-détecteurs. Dans les expériences sur collisionneur (le LEP, p.ex.), on utilise essentiellement des détecteurs disposés “en couches”. La figure 1.6.1 montre le détecteur de l'expérience L3. Voici quelques données concernant une expérience au LEP :

- poids : plus d'acier que la tour Eiffel
- dimensions : $\mathcal{O}(10^1)$ m
- coût : $\mathcal{O}(10^2)$ MCHF
- nombre de physiciens : $\mathcal{O}(10^2)$ ($\mathcal{O}(10^3)$ pour les détecteurs LHC).

A partir du point de collision, on décrit ci-dessous les sous-détecteurs composant un gros détecteur typique, avec leurs dimensions.

- 0.1-0.2 m : détecteur de **micro-vertex**. Il s'agit d'un détecteur à l'état solide, constitué d'un grand nombre de diodes (10^5 ou plus au LHC), qui peut donner la position de la trajectoire de particules chargées avec une précision de

quelques dizaines de microns (figure 1.6.2). Il aide en particulier à résoudre un vertex secondaire rapproché du vertex primaire (exemple d désintégration d'un méson B^0 fig :1.6.2 b).

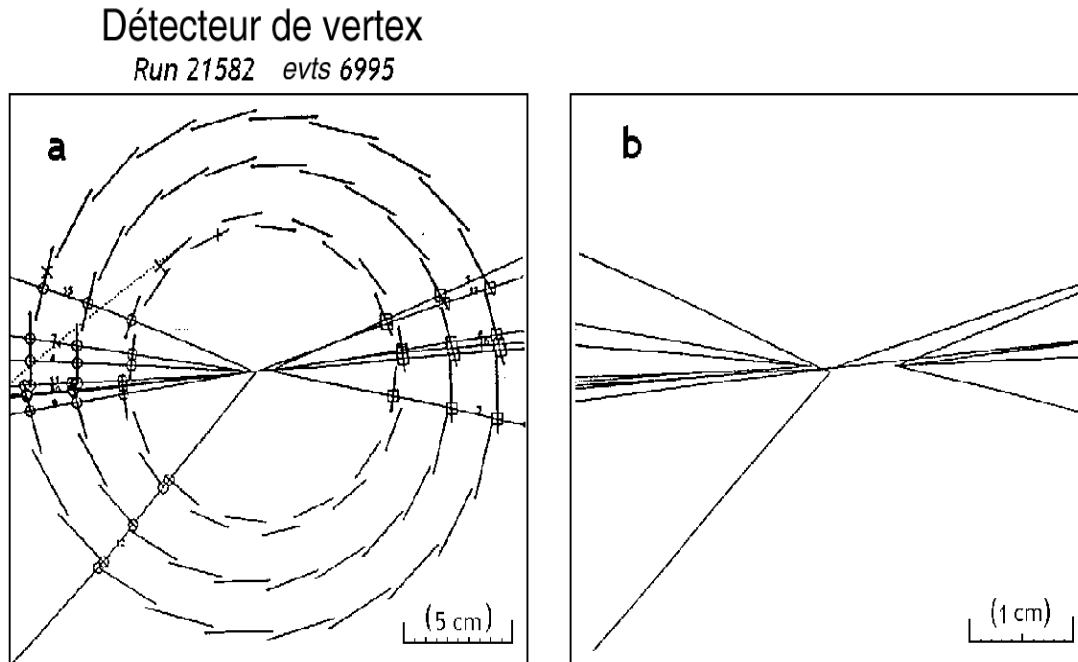


FIG. 1.6.2 – En a) : détecteur de microvertex de l'expérience Delphi au LEP. En b) : événement candidat de $Z \rightarrow b\bar{b}$

- 0.2-1 m : *traceur* (“*tracker*”) **interne**. Il s'agit d'un détecteur à l'état gazeux qui permet d'enregistrer la trajectoire de particules chargées sur un parcours important. Un champ magnétique de 0.5-1.5 Tesla permet alors d'effectuer la mesure de l'impulsion des particules à partir de la courbure de leur trajectoire. Dans une Time Projection Chamber (TPC) la résolution en impulsion transversale peut être paramétrisée par : $\sigma_{p_t}/p_t[\%] = \sqrt{0.42 \times p_t^2 + 2.3}$. L'expérience L3 était équipée d'une Time Expansion Chamber TEC de 1 m diamètre, permettant d'atteindre une résolution de $\sigma_{p_t}/p_t = \sqrt{0.5 \times p_t^2 + 8.0}$. Avec une TPC on peut aussi estimer l'énergie déposée par ionisation par unité de longueur (dE/dx), grandeur liée à la masse de la particule, à sa charge et à sa vitesse. Cette information aide à l'identification d'une particule, si on en connaît l'impulsion (figure 1.6.3).

- 1-1.5 m : **calorimètre e.m.**. Il permet la détection et la mesure des photons et des e^+ , e^- . Ces particules produisent des gerbes e.m.¹⁵. La conversion en signal électrique se fait par des scintillateurs, des chambres à ionisation, des cristaux

¹⁵pour un modèle simple de gerbe e.m. voir annexe

scintillants, etc. Avec les cristaux de BGO de l'expérience L3, on a une résolution en énergie de : $\sigma_E/E[\%] = 1.5/\sqrt{E[GeV]} + 0.8$ (1% à 50 GeV par exemple), et une résolution sur le point d'impact d'environ 1 mm.

Le développement d'une gerbe e.m. est caractérisé par la longueur de radiation X_0 du milieu (qui vaut approximativement $190A/Z^2$). On peut le comprendre, car la structure d'une gerbe est étroitement liée à ce paramètre : un photon qui traverse $1X_0$ de matière a une probabilité de 0.55 d'être converti en une paire e^+e^- et la perte d'énergie d'un électron est en moyenne de $1/e$ sur cette même épaisseur. La résolution atteinte dépend, entre autre, de la fraction de la gerbe contenue dans le calorimètre. On considère qu'une profondeur de $20X_0$ est nécessaire pour contenir 95% de l'énergie dissipée.

- **1.5-3 m calorimètre hadronique.** Il permet la détection et la mesure des hadrons. Les gerbes hadroniques sont beaucoup plus pénétrantes que les gerbes e.m. et requièrent plus de matière absorbante. Les matériaux de base communément utilisés sont le Cu, le Pb, l'U... Dans l'expérience L3 on a des plaques de ^{238}U appauvri alternant avec des chambres à fils proportionnelles ; la résolution en énergie est de $\sigma_E/E[\%] = 55/\sqrt{E[GeV]} + 5\%$ (13% à 50 GeV). Une gerbe hadronique est formée des particules rapides créées lors de l'interaction forte entre le hadron incident et les nucléons du milieu. Ces particules secondaires sont principalement des pions et des nucléons. Les π^0 se désintègrent en photons et sont la source de gerbes e.m. (pour un hadron de 10 GeV, environ 20% de l'énergie est convertie en gerbes e.m.). Une fraction de l'énergie échappe à la mesure parce que convertie en énergie d'excitation et de fission nucléaire ou émise sous la forme de neutrinos non détectés (voire de muons non détectés).

La géométrie des gerbes hadroniques peut être paramétrisée en terme de la longueur d'interaction λ qui vaut approximativement $390 A^{-2/3}$ [cm]. Cette grandeur est liée à la probabilité d'interaction hadronique. Un bon calorimètre hadronique devrait avoir au moins 5λ .

- **3-10 m détecteur de muons.** A l'extérieur des calorimètres ci-dessus il ne subsiste essentiellement que des μ et des ν . Les muons rapides peuvent traverser de grandes épaisseurs de matière, la perte d'énergie se faisant presque exclusivement par l'ionisation courante (p.ex. $dE/dx=12$ MeV/cm dans le Fe). L'impulsion des muons est déterminée par l'analyse de la courbure magnétique des trajectoires repérées à l'aide de chambres multifilaires. Dans l'expérience L3 la résolution en impulsion était d'environ 3% pour les muons de 50 GeV.

Les détecteurs sont des systèmes complexes, asservis à des stations d'ordinateurs qui supervisent les fonctions vitales : qualité des données par l'analyse dite **on-line**, fonctionnement des alimentations, surveillance des liquides de refroidissement et des gaz alimentant les détecteurs, contrôle du champ magnétique, du niveau de radiation. Les ordinateurs effectuent également le transfert des données acquises vers un support du type bande magnétique, disque optique,... Ces données

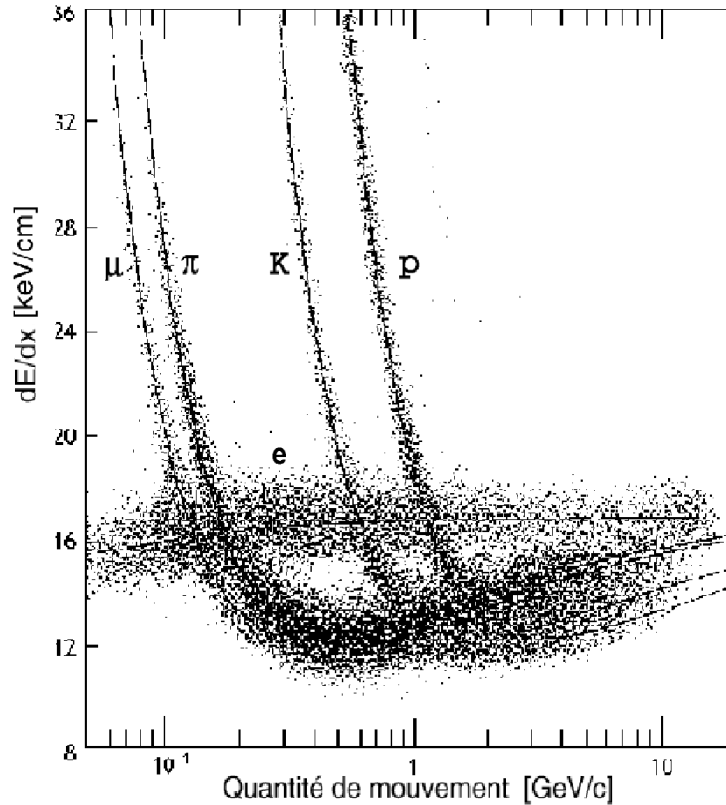


FIG. 1.6.3 – dE/dx mesurées pour différents types de particules en fonction de leur quantité de mouvement dans la TPC de l'expérience PEP4/9 au SLAC

sont ensuite analysées **off-line**, les calibrations sont appliquées et les résultats physiques en sont extraits. Il est en général nécessaire de comparer ces résultats avec ceux provenant d'un programme de simulation qui contient ce qu'on sait théoriquement des processus à étudier, de la géométrie du détecteur et de l'évolution de son état de fonctionnement avec l'âge (canaux de lecture morts ou bruyants etc.). Un programme de simulation de ce type est appelé programme de Monte-Carlo, parce que les événements sont générés à partir de tirages de nombres aléatoires. Les événements simulés peuvent être traités par le programme d'analyse standard comme les événements réels. Le développement des gerbes e.m. peut être simulé de manière très précise (au niveau de $\mathcal{O}(1)\%$ dans le programme EGS de SLAC). La simulation des gerbes hadroniques est nettement plus grossière (programmes FLUKA, GEISHA,...); toutefois la précision requise y est plus faible, car elle est de toute manière limitée par la résolution intrinsèque.

1.7 Interaction des particules avec la matière

1.7.1 Photons et électrons

On peut décrire phénoménologiquement l'interaction de **photons** qui traversent une épaisseur dx de matière homogène par l'absorption d'une fraction :

$$\frac{dN}{N} = -\mu dx$$

le signe $-$ indique que les dN sont perdus, μ est le **coefficient d'absorption**, N le nombre de photons à l'entrée.

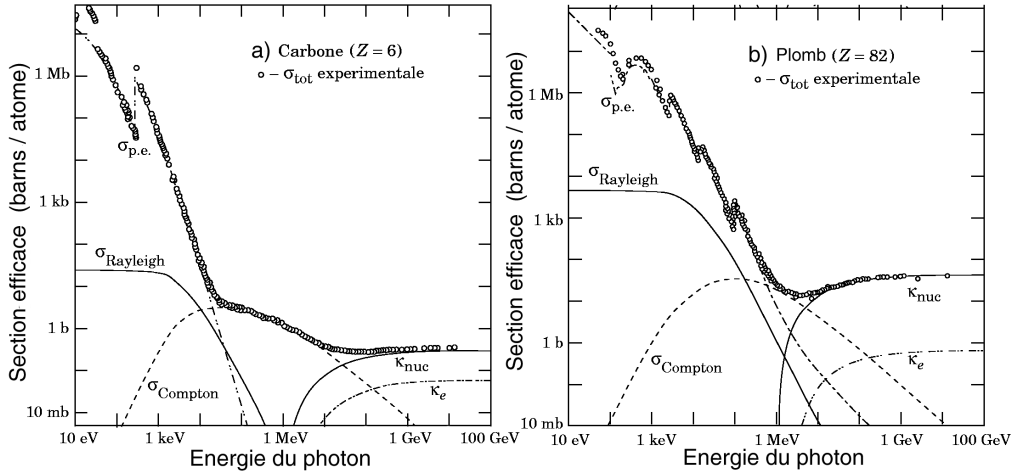


FIG. 1.7.1 – Sections efficaces d'absorption des photons en fonction de leur énergie, **a)** dans le carbone ; **b)** dans le plomb

L'intégration donne la décroissance exponentielle en fonction de l'épaisseur totale :

$$N = N_0 \exp(-\mu x)$$

μ peut être calculé théoriquement à partir de la section efficace σ d'absorption, qui représente la probabilité pour un photon d'interagir avec le milieu. Trois processus dominant (voir figure 1.7.1) :

- 1) τ : l'effet photoélectrique : $\gamma + A \rightarrow A^+ + e^-$, dominant pour $E_\gamma < 500$ KeV. Les discontinuités dans la courbe $\sigma_{p.e.}$ correspondent à des transitions entre couches électroniques de l'atome ;
- 2) l'effet Compton (σ_{Compton}) : $\gamma + e^- \rightarrow \gamma + e^-$ et la diffusion cohérente sur les atomes (σ_{Rayleigh}) : $\gamma + A \rightarrow \gamma + A$;
- 3) la production de paires dans le champ nucléaire (κ_{nuc}) et dans celui des e^- (κ_e), dominante pour $E_\gamma > 2$ MeV.

De plus, on peut observer des réactions photonucléaires avec les noyaux qui sont suivies en général par l'émission de nucléons ($\sigma_{\text{P.H.N.}}$).

La section efficace de l'effet photoélectrique est proportionnelle à Z^5 pour $E_\gamma > m_e c^2$. La section efficace de création de paires est proportionnelle à Z^2 . Le nombre total d'électrons disponibles pour effectuer une diffusion Compton est de l'ordre de Z/atome .

En conclusion, l'effet global doit être fonction du Z (moyen) de la substance.

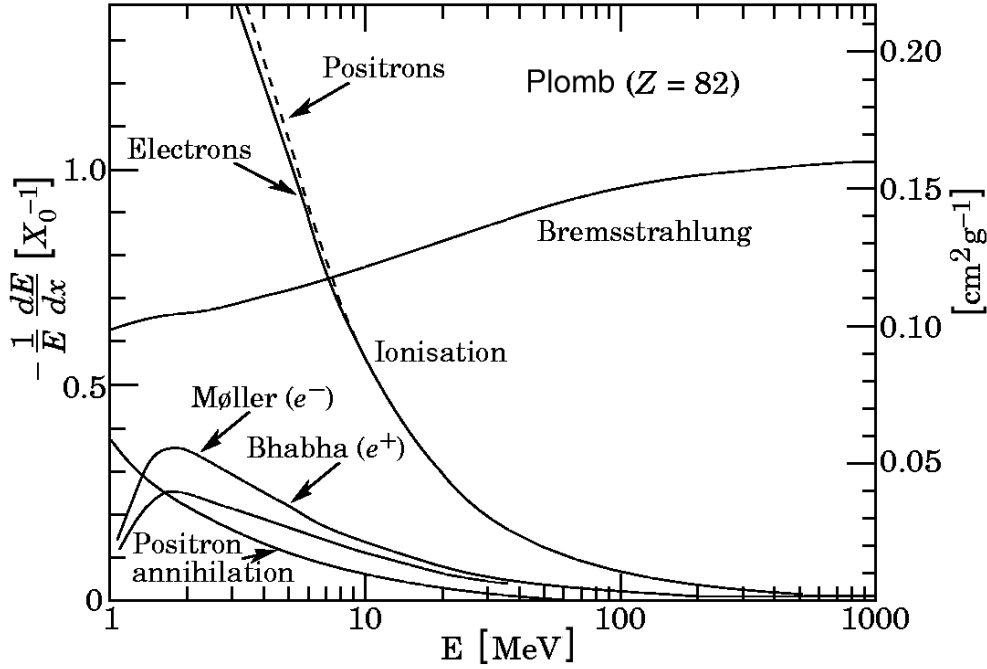


FIG. 1.7.2 – Perte d'énergie fractionnaire par unité de longueur de radiation en fonction de l'énergie des électrons (positrons)

Un **électron** qui traverse la matière perd de l'énergie par ionisation comme toute particule chargée (figure 1.7.2). Pour des énergies de plus de 10 MeV, le processus dominant est celui de Bremsstrahlung : $e \rightarrow \gamma + e$ qui a lieu dans le champ coulombien d'un noyau. L'intervention de ce champ est indispensable pour assurer la conservation de (E, \mathbf{p}) ; il s'agit en effet d'une diffusion $\gamma + e \rightarrow \gamma + e$, où le premier photon est virtuel et représente le quantum d'énergie e.m. échangée entre le noyau et l'électron.

La perte moyenne d'énergie par collision dépend du Z^2 de la substance. On trouve que l'on peut exprimer la perte d'énergie par rayonnement sous la forme :

$$\frac{dE}{dx} = -\frac{E}{X_0},$$

valable pour $E \gg m_e c^2$. X_0 est appelée la **longueur de radiation**. L'énergie moyenne des électrons à la profondeur x est donnée approximativement par :

$$\langle E(x) \rangle = E_0 \exp(-x/X_0)$$

Les fluctuations statistiques sont importantes étant donné la nature stochastique de l'interaction (théories de Landau et Vavilov). Donc, pour $x = X_0$ l'énergie moyenne est réduite d'un facteur $1/e$.

La longueur de radiation X_0 dépend du matériel traversé ; cette dépendance est donnée par une expression du type :

$$X_0 \approx 180A/Z^2 \quad [g/cm^2]$$

valable à $\sim 20\%$ pour $Z > 13$.

Par exemple dans le Fe : $180 \cdot 56/26^2 = 14.9 \text{ g/cm}^2 = 14.9/7.87 = 1.89 \text{ cm}$, à comparer avec 1.76 de la table.

Si maintenant on revient à la production de photons par rayonnement on trouve que la section efficace est aussi proportionnelle à A/Z^2 . On peut donc utiliser la longueur de radiation pour caractériser ce processus. La probabilité de conversion en paire e^+e^- est donnée par :

$$P \simeq 1 - \exp\left(-\frac{7x}{9X_0}\right)$$

Sur une distance X_0 , la probabilité de conversion d'un photon en un couple e^+e^- vaut environ $1 - e^{-0.8} = 0.55$, à peu près constante à partir de 1 GeV.

En conclusion, à haute énergie où la perte d'énergie par radiation et la création de paires dominant, l'interaction des électrons et des photons dans la matière ne dépend que de la valeur de X_0 . On peut ainsi caractériser la topologie des gerbes e.m. initiées par une de ces particules de façon indépendante de la substance.

1.7.2 Gerbes électromagnétiques

Elles sont générées par l'interaction de gamma ou d'électrons énergétiques avec la matière (interactions e.m.). Comme précédemment on est amené à normaliser les distances en terme d' X_0 la longueur de radiation. Dans ce cas, on obtient pour les électrons :

$$\delta E_{\text{radiation}} \cong -E \frac{\delta x}{X_0} \quad (E > 1 \text{ GeV})$$

De plus il y a une valeur de l'énergie de l'électron E_c (E critique) en dessous de laquelle la perte d'énergie par collision (ionisation du milieu) domine la perte par radiation :

$$E_c = 580/Z \text{ MeV}$$

valable à 10% près pour $Z > 13$.

Notons que certains auteurs désignent par ε l'énergie critique et par E_c l'énergie du seuil de détection.

Un modèle simple de génération d'une gerbe e.m. se trouve dans le livre de W. Heitler¹⁶. Un photon incident d'énergie E_0 traversant une épaisseur X_0 a une prob. = 0.55 de se convertir en une paire e^+e^- . Chaque particule générée a en moyenne une énergie $E_0/2$ (figure 1.7.3). Après une distance X_0 , l'énergie de chaque élec-

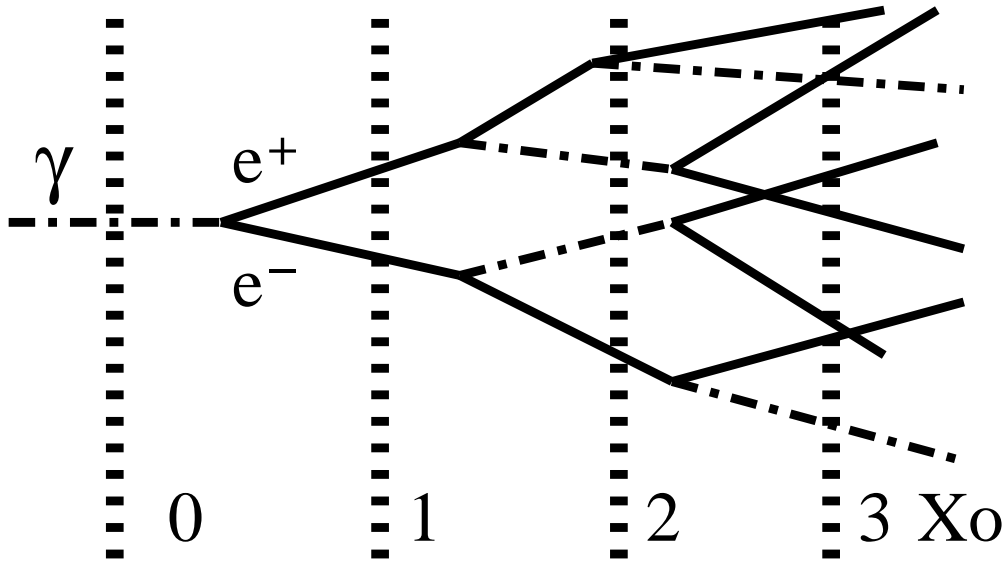


FIG. 1.7.3 – Développement d'une gerbe électromagnétique (modèle de W.Heitler)

tron est réduite par un facteur e^{-1} . Une grande partie de cette énergie est émise sous forme de photons avec une énergie comparable à E_0 . On suppose qu'un seul photon est émis avec $E = (E_0/2)/2$. On a maintenant 4 particules et on est à une profondeur de $2X_0$. Et ainsi de suite. Après tX_0 , on a 2^t particules. Le processus s'arrête quand $E_0/2^t$ devient plus petit que E_c . A ce stade, le nombre de particules est maximal : $N_{\max} = E_0/E_c$ et la profondeur vaut : $t_{\max} = \log(E_0/E_c) \log 2$.

Ce modèle simple peut être amélioré. Des programmes de simulation (comme **EGS** "électron gamma shower" de SLAC) sont capables de reproduire les caractéristiques des gerbes avec une précision de 1 à 5%. Toutefois des formules simples pour des estimations sont disponibles :

- Position du maximum : $t_{\max} = \log(E_0/E_c) - t_0$ avec $t_0 = 1.1$ pour des gerbes initialisées par des e^\pm et $t_0 = 0.3$ pour des 1 gamma. La gerbe e.m. produite par des e^\pm commence plus tôt que celle créée par un γ .

¹⁶W. Heitler : The Quantum Theory of Radiation. 3d edition. Oxford Press (1954).

- Le centre de gravité de la gerbe vaut $t_{\max} + 1.4$ et $t_{\max} + 1.7$ respectivement pour les cas e^\pm et γ .
- Un bon détecteur “calorimétrique” doit pouvoir contenir la gerbe e.m. dans sa presque totalité. La perte vers l’arrière (mais aussi le “back-scattering” vers l’avant..) fluctue autour d’une valeur moyenne et affecte la résolution de la mesure. On trouve en moyenne que la gerbe a perdu 98% de son énergie dans environ $L_{98\%} = 2.5t_{\max}$. Un bon calorimètre fait $20X_0$ au moins.
- La longueur totale des traces de particules chargées vaut $T = E/E_c$.
- D’autre part, la dimension latérale de la gerbe est fonction de la profondeur. Physiquement elle est déterminée par l’angle moyen de bremsstrahlung ($\approx p_e/m_e$) et par les effets de diffusion multiple. On trouve que la gerbe est contenue dans un rayon ρ_M : $\rho_M \cong X_0 \frac{21 \text{ MeV}}{E_c}$ (le rayon de Molière) jusqu’à la profondeur t_{\max} . Intégré sur toute la profondeur, le rayon nécessaire pour collecter 90% de l’énergie vaut : $R_{90\%} = 2\rho_M$. On a souvent besoin de paramétriser le comportement moyen des gerbes. Cela est utile pour des routines de “Fast Showering”.

1.7.3 Gerbes hadroniques

L’interaction e.m. des hadrons chargés devient négligeable à haute énergie. Les processus forts à partir de quelques GeV/c ont une section efficace totale σ_{tot} de l’ordre de 20-50 mb, dont une certaine fraction est constituée par de la diffusion élastique ($\simeq 20\%$ dans le cas $p - p$).

Pour mesurer la probabilité d’absorption d’un hadron dans la matière on utilise généralement une section efficace qui ne contient pas les contributions élastiques (diffusion cohérente sur les noyaux) ou quasi-élastiques (diffusion sur les nucléons du noyau) : $\sigma_{\text{abs}} = \sigma_{\text{tot}} - \sigma_{e1} - \sigma_{q.\text{él.}}$. Par exemple on trouve que $\sigma_{\text{abs}} \approx 41.2 A^{0.71} [mb]$ pour des neutrons sur des noyaux de poids atomique A .

On n’a pas d’approche simple pour décrire une **gerbe hadronique**. On définit une **longueur d’absorption** : $\lambda_0 = A/N_A \rho \sigma_{\text{abs}}$ qui permet de “normaliser” la topologie de la gerbe (un peu comme X_0 dans la gerbe électromagnétique). Une approximation est par exemple :

$$\lambda_0[\text{cm}] \simeq \frac{35 A^{1/3}}{\rho} \simeq 390 A^{-2/3}$$

Il existe des programmes de simulation (Geisha, Fluka,...) mais leur précision est réduite. Les fluctuations des gerbes hadroniques sont beaucoup plus grandes celles des gerbes e.m., ce qui complique la résolution du problème.

Une gerbe typique est engendrée par la création de particules rapides par interaction forte sur les nucléons de la matière. Les secondaires sont pour l’essentiel des pions et des nucléons. Souvent des π^0 sont produits, ce qui donne des sous-gerbes e.m. A 10 GeV, cela représente 20% de l’énergie dissipée ; la fraction de π^0 est donnée à peu près par $0.1 \log(E [\text{GeV}])$. Une partie de l’énergie est perdue

en excitation et fission nucléaire, ce qui réduit la part de l'énergie "visible". Une autre part de la réduction vient de la production de neutrinos non détectés. Dans certaines expériences les muons échappent aussi à la détection.

Rappelons quelques relations utiles :

- Le maximum de la gerbe (en unités λ_0) : $t_{\max} = 0.90 + 0.36 \log(E[GeV])$.
- La profondeur correspondant à une déposition de 95% de l'énergie est donnée par : $t_{95\%} = t_{\max} + 2.5 E^{0.13}$. En pratique un calorimètre hadronique devrait avoir une épaisseur d'au moins $5\lambda_0$.
- 95% de l'énergie de la gerbe est contenue dans un rayon $R_{95\%} = 1\lambda_0$.

Le tableau donne un certain nombre d'informations concernant les matériaux usuellement utilisés pour les calorimètres.

Matériel	Z	A	a)	a)	a)	b)	a)	E_c (MeV)	c)
			ρ (g/cm ²)	dE/dx (MeV/cm)	λ_0 (cm) pour N	λ_0 (cm) pour π	X_0 (cm)		e.m. $\lambda_{att}(X_0)$
C	6	12.0	≈ 1.55	≈ 2.76	49.9	64.9	≈ 27.5	75.9	
Al	13	27.0	2.70	4.37	37.2	45.8	8.9	39.3	2.7
A liquide	18	40.0	1.40	2.11	80.9	97.7	14.0	29.8	
Fe	26	55.9	7.87	11.6	17.1	18.9	1.76	20.5	
Cu	29	63.5	8.96	12.9	14.8	17.2	1.43	18.7	3.0
Sn	50	118.7	7.31	9.4	22.8	24.7	1.21	11.4	3.5
W	74	183.9	19.3	22.6	10.3	10.5	0.35	7.9	4.1
Pb	82	207.2	11.35	12.8	18.5	18.4	0.56	7.2	3.9
U	92	238.0	18.95	20.7	12.0	11.4	0.32	6.6	
NaI			3.67	4.84	41.3		2.59	12.5	
Scintillateur plastique			1.032	2.03	68.5		42.9	87.1	
Lucite			≈ 1.2	2.32	65.0		34.5	80.0	

TAB. 1.7.1 – Paramètres de matériaux utilisés pour les calorimètres. Note : λ_0 = longueur d'absorption nucléaire, X_0 = longueur de radiation, E_c = énergie critique. **a)** De la table PDG (1978). **b)** La section efficace inélastique des pions $\sigma_i = 31.2 A^{0.744}$ (mb) a été utilisée. **c)** Les valeurs correspondent à des gerbes électromagnétiques de 6 GeV

2 Relativité et mécanique quantique

Dans ce chapitre, on esquisse la procédure qui amène au mariage de la mécanique quantique et de la relativité (restreinte). La recherche de formes covariantes des équations du mouvement conduit aux équations de Klein-Gordon et de Dirac. L'équation de Klein-Gordon permet de décrire la propagation des particules de spin 0, l'équation de Dirac celle des particules (et antiparticules) de spin 1/2.

2.1 Relativité restreinte

2.1.1 Invariants et tenseurs

17

Dans la géométrie euclidienne, on a des systèmes de coordonnées particuliers, les repères "cartésiens". On passe d'un repère (observateur O) à l'autre (O') par des **transformations linéaires orthogonales** qui conservent la distance tridimensionnelle (pour l'instant composantes covariantes et contravariantes sont confondues ; leur différence apparaîtra plus loin) :

$$dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = \sum_{i=1,3} dx_i^2 \quad (2.1.1)$$

dl^2 est un **invariant** lors de transformations linéaires orthogonales du type :

$$x'_i = c_i + \sum_j b_{ij} x_j \quad \text{avec la condition} \quad \sum_j b_{ij} b_{kj} = \delta_{ik} \quad (2.1.2)$$

qui exprime l'orthogonalité de b et qui implique que le déterminant de b est $|b| = \pm 1$. Le cas $|b| = -1$ fait passer d'un système droit à un gauche et *vice versa*. Un segment dx_i se transforme par :

$$dx'_i = \sum_j b_{ij} dx_j \quad (2.1.3)$$

En vertu de cela, l'élément de volume est conservé :

$$dV' = \prod_{i=1,3} dx'_i = \frac{\partial(x'_1, x'_2, x'_3)}{\partial(x_1, x_2, x_3)} \prod_{i=1,3} dx_i = 1 \times \prod_{i=1,3} dx_i = dV \quad (2.1.4)$$

car le jacobien vaut $|b|$.

On a ainsi la possibilité de définir des grandeurs indépendantes de l'observateur O. Par exemple la grandeur $dw = dx + dy$ n'est pas un invariant, comme on peut le montrer en effectuant une rotation autour de l'axe z.

¹⁷A. Einstein, The meaning of Relativity. Ed. Princeton University Press 1955 (voir aussi ref. : 8).

On a une autre façon d'exprimer l'**invariance par rapport à l'observateur**.
 Considérons une droite :

$$x_i = A_i + \lambda \hat{B}_i \quad i = 1, 2, 3; \quad |\hat{B}| = 1 \quad (2.1.5)$$

λ parcourt la droite.

Dans le repère de O' , on obtient aussi l'équation d'une droite :

$$x'_i = A'_i + \lambda \hat{B}'_i \quad |\hat{B}'| = 1 \quad \hat{B}'_i = \sum_k b_{ik} B_k \quad etc... \quad (2.1.6)$$

Les équations (2.1.5) et (2.1.6) ont la même forme, donc l'**expression d'une droite** est la même pour les deux observateurs. C'est une **forme (formulation) covariante**. Cela vient du fait que l'élément $x_i - A_i - \lambda B_i$ se transforme comme l'intervalle dx_i . C'est cet élément qui définit les points de la droite et le voisinage de celle-ci.

Tout objet dont les coordonnées se transforment comme les éléments dx_i est appelé un **vecteur**. Par exemple, le gradient d'une fonction scalaire est un vecteur. On a vu que dl^2 est le même pour tout observateur, donc quand un vecteur est nul pour un observateur il l'est pour tous, lors d'une transformation homogène. En conclusion, la définition d'un vecteur s'exprime (presque) indépendamment de toute représentation géométrique.

On procède de même avec des **tenseurs** d'ordre 2,3,... qui se transforment par multiplication par 2,3,... fois la matrice b . Les scalaires et les vecteurs sont donc des tenseurs d'ordre 0 et 1 respectivement.

Une grandeur comme dl^2 est dite invariante parce qu'on a annihilé toute dépendance par rapport à la transformation en question. En géométrie, on réalise cela de façon formelle par l'introduction d'une métrique \mathbf{g} qui permet de calculer la longueur d'un intervalle, en tout point de l'espace. L'action de la métrique est de muter un vecteur qui se transforme via la multiplication par \mathbf{b} en un autre qui se transforme via la multiplication par \mathbf{b}^{-1} .

On va maintenant introduire une définition et une notation standard, permettant une représentation en coordonnées généralisées. Un vecteur infinitésimal $d\mathbf{P}$, dans un repère donné, peut être complètement représenté par les trois nombres dx^i (i en apex) :

$$d\mathbf{P} = \sum_i \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial x^i} dx^i$$

Les dérivées $\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial x^i}$ constituent en pratique les vecteurs de base du repère. Les trois nombres dx^i constituent un système **contravariant**, dans le sens que, pour que $d\mathbf{P}$ ait une signification "universelle", un changement dans les vecteurs de base $\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial x^i}$ doit être **contrebalancé** par un changement dans les dx^i . En effet, soit un changement de coordonnées $O \rightarrow O'$; les vecteurs de base sont changés en

$$\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial x'^i} = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial x^j} \frac{\partial x^j}{\partial x'^i}$$

(la sommation sur les indices identiques j est sous-entendue), et les éléments dx^i sont changés en $dx'^i = \frac{\partial x'^i}{\partial x^j} dx^j$.

Il est toutefois possible de décrire le même vecteur par trois nombres dx_i (i en index) : $dx_i = d\mathbf{P} \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial x^i}$. Ces trois nombres constituent un système **covariant**.

Les composantes covariantes et contravariantes représentent le même vecteur. On peut passer d'une composante à l'autre si l'on connaît la **métrique** \mathbf{g} :

$$g_{ij} = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial x^i} \cdot \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial x^j} = g_{ji} \quad (2.1.7)$$

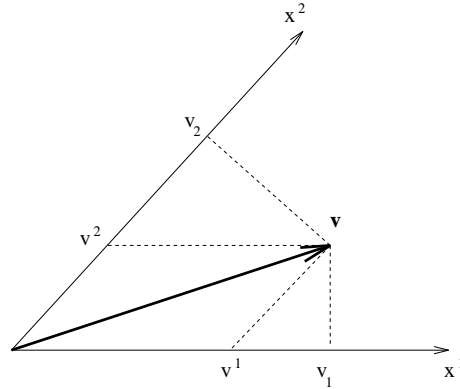


FIG. 2.1.1 – Composantes covariantes et contravariantes d'un vecteur, en coordonnées obliques

Cela se généralise à une grandeur vectorielle quelconque. Considérons 3 grandeurs fonctions d'un point de l'espace qui, lors d'un changement de coordonnées, se transforment comme les différentielles des coordonnées dx^i :

$$a'^i = \frac{\partial x'^i}{\partial x^j} a^j \quad (2.1.8)$$

On dit que les a^j sont les composantes **contravariantes** d'un vecteur (c'est la situation usuelle). La situation des composantes **covariantes** est donnée par :

$$a'_i = \frac{\partial x^i}{\partial x'^j} a_j \quad (2.1.9)$$

Dans ce sens, l'opérateur $\partial_i = \partial/\partial x^i$ est covariant (il a un comportement " $\frac{1}{\text{contravariant}}$ ").

Dans le cas euclidien $\mathbf{g} = \text{diag}(1, 1, 1)$, et $a^i = a_i$. Toutefois cela n'est pas toujours le cas : déjà en coordonnées obliques on peut distinguer les deux représentations

(figure 2.1.1). La métrique \mathbf{g} permet de transformer une composante covariante en une composante contravariante. L'expression :

$$\delta s^2 = g_{ij} \delta x^i \delta x^j = \delta x_j \delta x^j \quad (2.1.10)$$

définit l'élément de longueur (invariant) ; elle exprime le fait que la somme des produits des composantes covariantes et contravariantes est une grandeur invariante (le produit des dérivées définissant le passage d'un repère à l'autre donne l'unité).

La théorie de Maxwell et l'expérience de Michelson et Morley à la fin du XIXème siècle ont amené 1) au principe de relativité (équivalence des systèmes en mouvement relatif rectiligne et uniforme) et 2) à la conclusion que tout observateur inertiel doit mesurer la même vitesse de propagation de l'onde électromagnétique. D'où la nécessité de marier espace et temps sous la forme des transformations de Lorentz.

2.1.2 Les transformations de Lorentz

Elles sont obtenues sous les hypothèses suivantes :

- 1) tout observateur inertiel est équivalent (principe de la relativité restreinte) ;
- 2) tout observateur inertiel obtient c lors de la mesure de la vitesse de la lumière.

Soit un référentiel O . Un point de l'espace temps par rapport à O est défini par un quadrivecteur, $P = (t, \mathbf{r}) = (t, x, y, z)$. Si O' est un référentiel en mouvement rectiligne et uniforme par rapport à O de vitesse v/x , alors l'événement P est observé dans O' en P' , dont le quadrivecteur est donné par la transformation de Lorentz (voir figure 2.1.2)

Considérons dans O deux événements en $P_0 = (0, \mathbf{0})$ et $P_1 = (t, x, 0, 0)$. Leur distance quadridimensionnelle est $s = P_1 - P_0$. On peut montrer que $\delta s^2 = (ct)^2 - x^2$ est un invariant (de Lorentz), c.à.d. que tout observateur en mouvement rectiligne et uniforme par rapport à O doit obtenir la même valeur de δs^2 pour ce couple d'événements. En effet, dans O' on a :

$$P'_0 = P_0 \quad \text{et} \quad P'_1 = (\gamma(t - vx/c^2), \gamma(x - vt), 0, 0) \quad (2.1.11)$$

Le module de leur distance quadridimensionnelle est :

$$\delta s'^2 = c^2 \gamma^2 \left(t - \frac{v}{c^2} x \right)^2 - \gamma^2 (x - vt)^2 = \delta s^2 \quad (2.1.12)$$

Les expressions covariantes sont donc décrites par des quadrivecteurs a_μ , où l'index μ varie de 0 à 3.

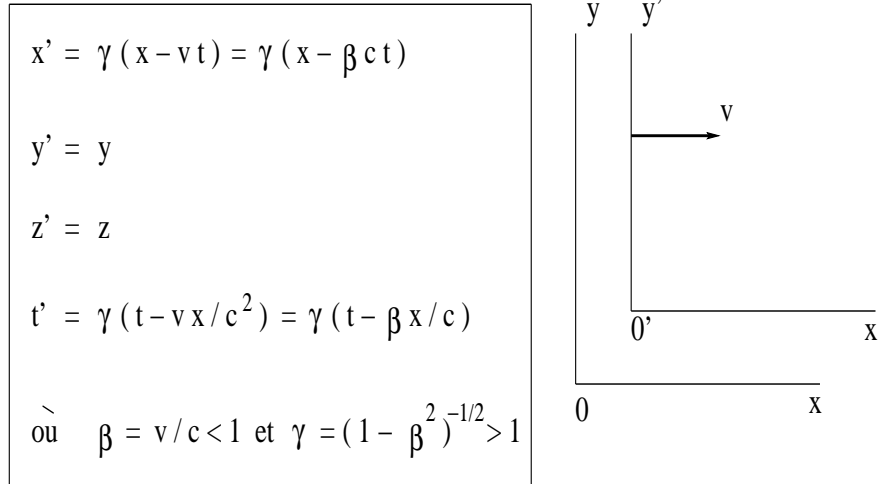


FIG. 2.1.2 – Transformation de Lorentz si v est parallèle à x . Si v est dans une autre direction, les relations sont à adapter

On introduit une métrique de l'espace-temps \mathbf{g} :

$$g = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}, \quad g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} \quad (2.1.13)$$

qui permet de définir l'invariant¹⁸ :

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = dx_\nu dx^\nu \quad (2.1.14)$$

On a posé :

$$x^0 \equiv ct, \quad x^1 \equiv x, \quad x^2 \equiv y, \quad x^3 \equiv z \quad (2.1.15)$$

Remarquons que si l'on utilise la métrique $\text{diag}(1,1,1,1)$ et $x^0 = ict$, le signe de ds^2 est inversé.

Sous la forme matricielle les transformations de Lorentz s'écrivent (dans le cas d'une vitesse $v \ll x$) :

$$x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu \quad \text{avec} \quad \Lambda = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.1.16)$$

¹⁸rappel : la sommation sur les indices identiques est sous-entendue

On peut montrer que les matrices Λ jouissent d'une structure de groupe. En effet, les transformations de Lorentz constituent une sorte de rotation dans l'espace temps. $\Lambda'\Lambda''$ est aussi une transformation de Lorentz. Quand $\beta \rightarrow 0$ alors $\Lambda \rightarrow \text{diag}(1,1,1,1)$, ce qui nous donne l'élément neutre. L'expression :

$$\Lambda_{\beta}^{\alpha} = g_{\beta\rho}g^{\alpha\sigma}\Lambda_{\sigma}^{\rho} \quad (2.1.17)$$

permet de calculer l'élément inverse.

Q. : le groupe est-il commutatif ?

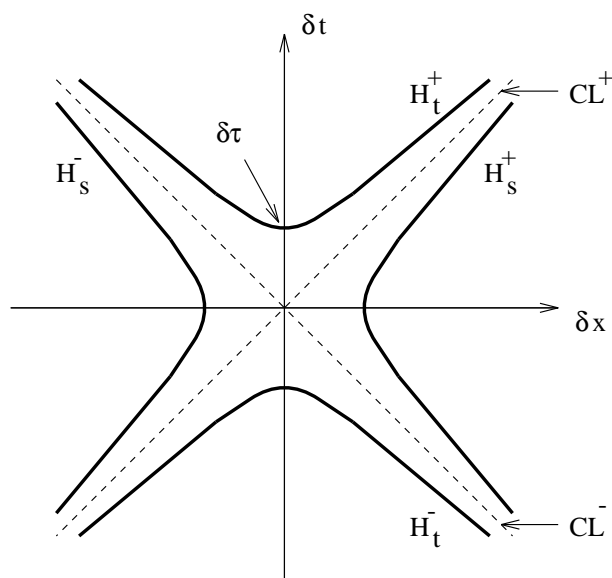


FIG. 2.1.3 – Intervalles dans l'espace-temps. Voir texte

On peut d'ailleurs compléter cette structure par les rotations dans l'espace tout court et former ainsi le **groupe de Lorentz**. Si l'on persévère et que l'on rajoute des translations dans l'espace temps, on obtient le **groupe de Poincaré**, qui a comme limite pour β petit celui de **Galilée**.

Deux événements reliés par un signal de lumière donnent $\delta s^2 = 0$. Si deux événements ont un $\delta s^2 > 0$, $(c\delta t)^2 > \delta x^2$, alors une information a pu être échangée (en tout cas à la vitesse c) et ils peuvent donc être en connexion **causale**. Si $\delta s^2 < 0$, aucune relation de cause à effet doit exister.

Pour une famille d'observateurs, deux événements P_0 et P_1 ayant une séparation δs^2 se situent dans le plan $\{\delta x, \delta t\}$ sur une des 4 **hyperboles H** qui ont comme asymptote les **cônes de lumière CL** (voir figure 2.1.3 ; les échelles ont été choisies de façon à avoir ces cônes à 45°).

Le cas $\delta s^2 > 0$ est appelé une séparation de "**genre temps**"; c'est le cas où la connexion causale est possible. Il existe un observateur (celui au repos par rapport

aux événements) pour lequel $\delta x = 0$ et $\delta t = \delta\tau$, où τ est le **temps propre**. Si P_0 est dans le passé de P_1 on est sur l'hyperbole H_t^+ (sur H_t^- si c'est l'opposé).

Le cas $\delta s^2 < 0$, dit de “**genre espace**”, interdit la connexion causale. Il existe un observateur pour lequel les deux événements ont lieu simultanément, en deux endroits différents.

Un signal de vitesse c peut coupler deux événements qui se situent sur le cône de lumière.

2.1.3 Espace et temps en relativité

Considérons l'expérience suivante (voir figure 2.1.4) : l'observateur O veut mesurer l'intervalle de temps Δt entre deux événements qui ont lieu au repos dans O' : l'opinion de O' est donc que $\Delta x' = 0$ et $\Delta t'$ vaut p. ex. 1 seconde. Supposons que les événements consistent en l'émission d'une impulsion de lumière qui peut être captée par des photodétecteurs. Pour pouvoir effectuer la mesure, O dispose un grand nombre de photodétecteurs sur le parcours de O' . Une photodétecteur donne le START du chronomètre de O . Le STOP est donné par la photodétecteur la plus proche de O' au moment du second événement. Naturellement toutes les photodétecteurs doivent être **préalablement synchronisées** par O . Pour ce faire, on peut, avant l'expérience, les amener au même point et vérifier qu'elles donnent une réponse synchrone à une même impulsion fournie.

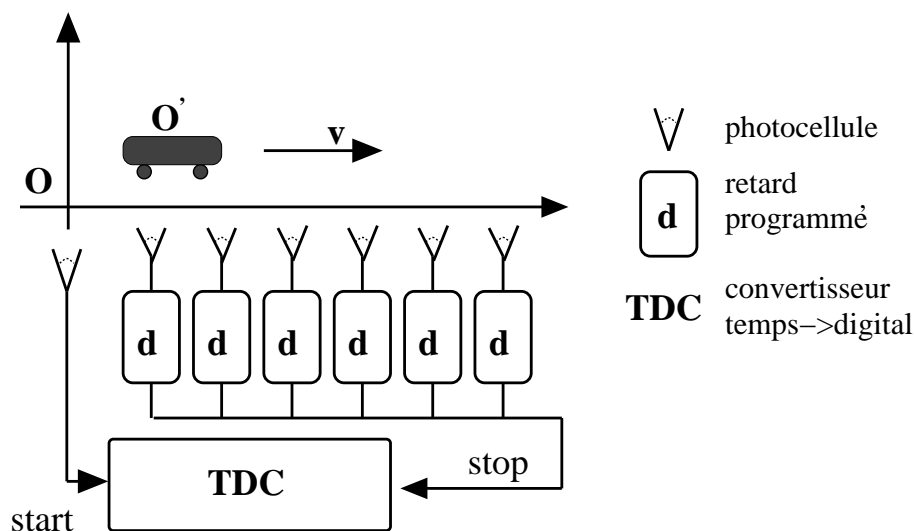


FIG. 2.1.4 – Schéma de principe d'un dispositif devant permettre la mesure de la dilatation du temps

Lors de l'expérience, on peut supposer que le premier événement a lieu alors que O et O' se croisent et que c'est à cet instant que les observateurs démarrent

les chronomètres respectifs :

$$x_0 = x'_0 = 0 \quad \text{et} \quad t_0 = t'_0 = 0$$

Le second événement a lieu en O' à l'instant t'_1 , toujours à l'origine en O' , $x'_1 = 0$, mais en $x_1 = vt_1$ en O . On applique les transformations de Lorentz :

$$x'_1 = \gamma(x_1 - vt_1) = 0 \quad \text{comme prévu}$$

$$t'_1 = \gamma(t_1 - vx_1/c^2) = \gamma(t_1 - v^2t_1/c^2) = t_1/\gamma$$

Donc $t_1 = \gamma t'_1$ est plus "long" que t'_1 . C'est la **dilatation du temps** de O' observé par O .

Ce résultat a conduit au paradoxe des jumeaux. En 1970, on¹⁹ avait compté 305 papiers qui discutaient de ce paradoxe (sans compter les ouvrages de SF, New Age, etc.).

On procède de façon analogue pour montrer la **contraction des longueurs**.

A-t-on en physique des particules des preuves expérimentales directes de la dilatation du temps ? Une mesure quantitative de ce phénomène est le *byproduct* de l'expérience g-2 (voir figures 2.1.5 2.1.6) ayant conduit à la détermination du facteur gyromagnétique du muon²⁰. Dans cette expérience, des pions chargés sont injectés dans un anneau de stockage de 14 m de diamètre. Les pions chargés se désintègrent en vol en donnant des muons : $\pi \rightarrow \mu\nu$. Les muons se placent sur des orbites stables et se désintègrent selon le schéma : $\mu \rightarrow e\nu\bar{\nu}$. Les électrons émis sont détectés par des compteurs à scintillation disposés sur le pourtour de l'anneau.

L'impulsion des μ est de 3.094 GeV/c ce qui donne un $\gamma = E/m = 3.095/0.1056 = 29.30$. Les muons au repos ont un temps de vie $\tau_\mu = 2.197 \mu\text{sec}$. En vol on observe une pente du taux de comptage compatible avec $\gamma\tau_\mu = 64.37 \mu\text{sec}$.

Q. : le paradoxe des jumeaux est-il ainsi vérifié ?

On reprendra la discussion de cette expérience lorsqu'on parlera des propriétés du muon.

2.1.4 Quadri vecteur énergie-impulsion

La notion de vitesse est généralisée par l'introduction du quadri vecteur :

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} \equiv c \left(\frac{dt}{d\tau}, \frac{1}{c} \frac{d\mathbf{x}}{d\tau} \right) \quad (2.1.18)$$

τ est le temps propre de la particule c'est à dire le temps dans le système où la particule est au repos.

¹⁹L.Marder, Time and the space traveller. Ed. Univ. of Pennsylvania Press, 1971

²⁰J. Bailey et al. Nucl. Phys. B150 (1979) 1 ; F.J.M. Farley et E. Picasso, Annu. Rev. Nucl. Part. Sci. 29 (1979) 243

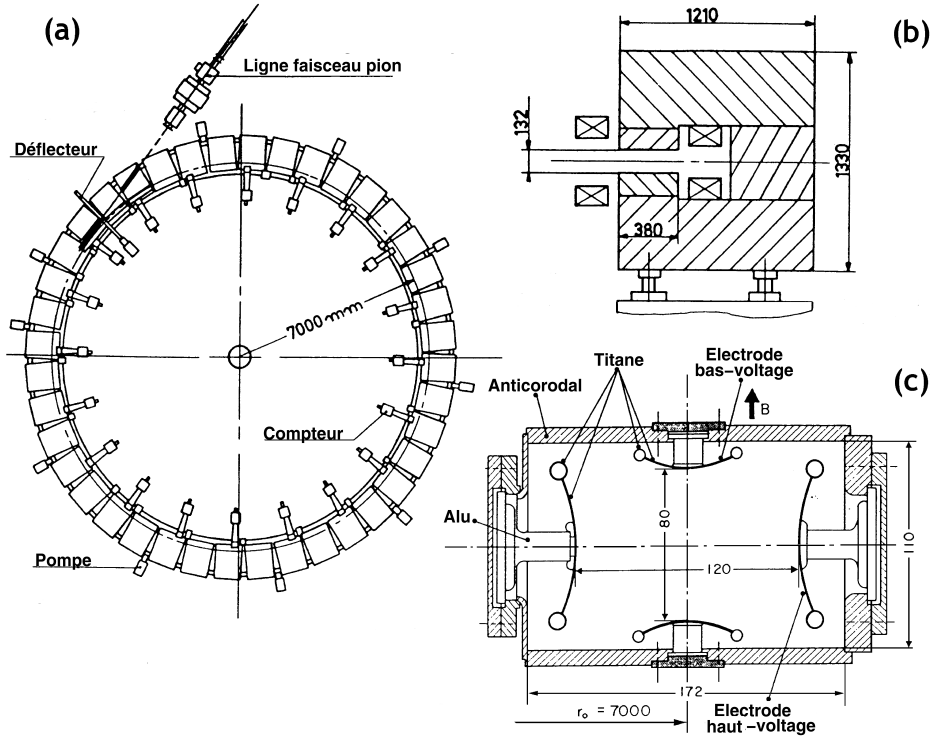


FIG. 2.1.5 – Anneau de stockage à muons : a) vue schématique de dessus, avec les 40 aimants dipolaires et les 20 compteurs de particules ; b) vue en coupe d'un aimant dipolaire en forme de C ; c) vue en coupe de la chambre à vide où circule le faisceau de muons. Cette chambre est ajustée dans l'entrefer des aimants

On a :

$$\frac{dt}{d\tau} = \gamma \quad \text{et} \quad \frac{d\mathbf{x}}{d\tau} = \frac{d\mathbf{x}}{dt} \frac{dt}{d\tau} = \mathbf{v}\gamma \quad \text{donc :} \quad u^\mu \equiv c \left(\gamma, \gamma \frac{\mathbf{v}}{c} \right) \quad (2.1.19)$$

On voit que $u^2 = c^2$ est un invariant.

En multipliant par m , la masse de la particule définie dans son système de repos, on obtient le quadrivecteur énergie-impulsion :

$$p^\mu \equiv (\gamma mc, \gamma m\mathbf{v}) = (E/c, \mathbf{p}) \quad \text{avec :} \quad p^2 = c^2 m^2 \quad (2.1.20)$$

donc p^2 est un invariant, ce qui est attendu, car il s'agit de l'énergie de masse de la particule, dans son système au repos.

L'énergie cinétique d'une particule est définie par :

$$T = E - mc^2 \quad (2.1.21)$$

Q. : montrer que $T = mv^2/2$ quand $v \ll c$.

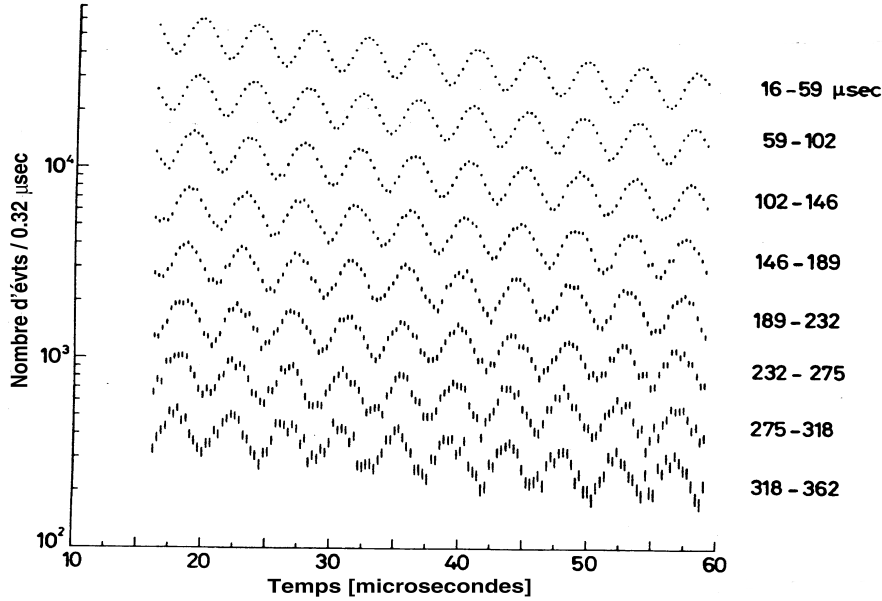


FIG. 2.1.6 – Taux de comptage en fonction du temps. La courbe supérieure se rapporte à l'échelle selon l'abscisse ; les autres courbes se rapportent à des échelles décalées

2.1.5 Covariance en électrodynamique

Un exemple d'expression covariante est celle qu'on obtient en écrivant l'équation de continuité $\frac{d\rho}{dt} + \text{div}(\mathbf{j}) = 0$ sous la forme :

$$\partial_\mu j^\mu = 0 \quad \text{où l'on pose } j^0 = c\rho \quad (2.1.22)$$

Il faut bien réaliser que la covariance de l'équation de continuité exprime une situation physique précise : tout observateur doit observer une ^{accumulation}/_{déperdition} à l'endroit où le courant diverge. De même, on peut reformuler les équations de Maxwell de façon covariante. On définit le tenseur du champ e.m. :

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -Ex & -Ey & -Ez \\ Ex & 0 & -Bz & By \\ Ey & Bz & 0 & -Bx \\ Ez & -By & Bx & 0 \end{pmatrix} \quad (2.1.23)$$

On peut ainsi combiner les deux éq. de Maxwell pour $\text{div}(\mathbf{E})$ et $\text{rot}(\mathbf{B})$ en

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} j^\nu \quad (2.1.24)$$

Ex. : prouver que l'antisymétrie $F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu}$ implique 2.1.22.

Les deux éq. de Maxwell homogènes découlent automatiquement ²¹ une fois que nous avons introduit les potentiels vecteur (A) et scalaire (V) : $\mathbf{B} = \mathbf{rot}(\mathbf{A})$ et $\mathbf{E} = -\mathbf{grad}(V) - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$.

Si l'on combine ces potentiels :

$$A^\mu \equiv (V, \mathbf{A}) \quad \text{on trouve :} \quad F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu \quad (2.1.25)$$

Ce qui permet de réécrire l'éq. 2.1.24 :

$$\partial_\mu \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu (\partial_\mu A^\mu) = \frac{4\pi}{c} j^\nu \quad (2.1.26)$$

Or, on peut effectuer une redéfinition du potentiel, ce qu'on appelle une **transformation de jauge**. Cela est possible car la transformation :

$$A^\mu \rightarrow A^\mu + \partial^\mu f(t, \mathbf{x}) \quad (2.1.27)$$

ne change pas la description physique.

On impose donc la contrainte (jauge de Lorentz) :

$$\partial_\mu A^\mu = 0 \quad (2.1.28)$$

ce qui donne :

$$\partial_\mu \partial^\mu A^\nu = \frac{4\pi}{c} j^\nu \quad \text{ou} \quad \square A^\nu = \frac{4\pi}{c} j^\nu \quad (2.1.29)$$

\square est le d'Alembertien

$$\partial_\mu \partial^\mu = \partial^\mu \partial_\mu \quad (2.1.30)$$

On obtient ainsi des expressions compactes dans lesquelles la covariance est explicite. Par exemple, l'invariance du produit $F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}$ est automatique.

Q. : que vaut ce produit ?

2.2 Les équations de Klein-Gordon et de Dirac ²²

La transition de la mécanique quantique non relativiste (QM) à son correspondant relativiste (RQM) devrait s'effectuer en douceur. On aimerait garder les principes de base :

1) Dans la mécanique quantique non relativiste, un état est mathématiquement exprimé par une **fonction d'état** ψ , qui est fonction d'un certain nombre de

²¹Les éq. homogènes peuvent s'obtenir de : $\partial_\mu \mathfrak{F}^{\mu\nu} = 0$ où $\mathfrak{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} F_{\alpha\beta}$. Voir

J. D. Jackson : Classical Electrodynamics. Ed. John Wiley & Sons, Inc. (1975) Sect. 11.9.

²²Voir ref. : 6, 8 et 9.

degrés de liberté. P. ex., on peut écrire pour l'état d'une particule : $\psi(\mathbf{q}, s, t)$, où \mathbf{q} sont les coordonnées classiques, s le spin ou tout autre degré de liberté interne, t le temps. $|\psi|^2$ est une quantité définie positive, interprétée comme la probabilité pour la particule de se trouver dans cet état.

2) Toute observable Ω est représentée par un **opérateur hermitique** $\langle \psi | \Omega \psi \rangle = \langle \Omega \psi | \psi \rangle$ En particulier, l'impulsion \mathbf{p} de la particule est donnée par :

$$p_i \rightarrow \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial q_i} \quad \text{c. à d.} \quad \mathbf{p} = i\hbar \nabla \quad (2.2.1)$$

3) Un état physique est un vecteur propre de l'observable Ω si :

$$\Omega \phi_n = \omega_n \phi_n \quad (2.2.2)$$

où ω_n est la valeur propre réelle qui correspond au vecteur propre ϕ_n .

4) Un état arbitraire s'exprime comme une superposition linéaire d'un ensemble complet de fonctions de base (vecteurs propres) :

$$\psi = \sum_n a_n \varphi_n \quad \text{avec l'orthogonalité :} \quad \langle \varphi_n | \varphi_m \rangle = \delta_{nm} \quad (2.2.3)$$

$|a_n|^2$ représente la probabilité de trouver le système dans l'état n .

5) L'espérance mathématique de l'observable Ω est donnée par :

$$\langle \Omega \rangle_\psi = \langle \psi | \Omega | \psi \rangle = \sum_n |a_n|^2 \omega_n \quad (2.2.4)$$

Dans les relations ci-dessus, le signe $\langle | \rangle$ correspond à l'intégration sur les coordonnées et la sommation sur les états internes.

6) L'évolution d'un système physique est représentée par l'**équation de Schrödinger** :

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = H \psi \quad (2.2.5)$$

H est l'Hamiltonien du système. Si le système est fermé, H est indépendant de t ; ses valeurs et vecteurs propres représentent les états stationnaires possibles du système "au repos". Si l'on considère une particule d'énergie cinétique $p^2/2m$, dans un potentiel (réel) V , l'équation devient :

$$\boxed{\left(-\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} + V \right) \psi = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi} \quad (2.2.6)$$

De façon analogue à 2.2.1, on pose :

$$E \rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \quad (2.2.7)$$

On va maintenant se restreindre au cas des particules libres ($V=0$).

Si l'on multiplie l'éq.(2.2.6 avec $V=0$) par ψ^* et on soustrait son complexe conjugué multiplié par ψ , on obtient l'équation de continuité :

$$\frac{d\rho}{dt} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0 \quad \text{avec : } \rho = \psi^* \psi \quad \text{et : } \mathbf{j} = \frac{\hbar}{2mi} [\psi^* \nabla \psi - (\nabla \psi^*) \psi] \quad (2.2.8)$$

Cette équation exprime la conservation de la probabilité, donc de la propriété d'existence de la particule et des caractéristiques qu'elle transporte. Par exemple si l'on multiplie ρ et \mathbf{j} par la charge de la particule, on exprime la continuité du courant électrique.

La première tentative de transposer tout cela dans un contexte relativiste part de l'expression de l'énergie $E^2 = (\mathbf{pc})^2 + (mc^2)^2$. En utilisant 2.2.1 et 2.2.7 on obtient :

$$-\hbar^2 \partial_t^2 \psi = (-\hbar^2 c^2 \nabla^2 + m^2 c^4) \psi \quad (2.2.9)$$

qui peut s'écrire sous la forme d'une équation d'onde :

$$\boxed{\left[\square + \left(\frac{mc}{\hbar} \right)^2 \right] \psi = 0} \quad \text{Equation de Klein-Gordon} \quad (2.2.10)$$

Observons que (2.2.10) implique des solutions à **énergie négative** ($\sim \exp(\pm iEt/\hbar)$) ! Cela découle du fait que l'on a une ambiguïté de signe dans la solution :

$$E = \pm \sqrt{(pc)^2 + (mc^2)^2}$$

On verra que cette situation n'est pathologique qu'en apparence et qu'en fin de compte elle sera utile pour décrire l'état des antiparticules.

Partant de (2.2.10), la procédure ci-dessus amène à l'équation de continuité :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\psi^* \partial_t \psi - \psi \partial_t \psi^*) + \nabla \cdot (\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*) &= 0, \quad \text{ou} \\ \partial^\mu (\psi^* \partial_\mu \psi - \psi \partial_\mu \psi^*) &= \partial^\mu j_\mu = 0 \end{aligned} \quad (2.2.11)$$

Le problème est qu'à cause du second ordre de la dérivée temporelle dans l'éq. 2.2.10, l'expression :

$$(\psi^* \partial_t \psi - \psi \partial_t \psi^*) \quad (2.2.12)$$

n'est pas définie positive, ce qui empêche de l'associer à une densité de probabilité ! En effet, si l'on considère une solution :

$$\psi(\mathbf{x}, t) = N \exp\left(-\frac{i}{\hbar}Et + \frac{i}{\hbar}\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}\right) \quad (2.2.13)$$

on obtient une densité $2N^2E$, qui est négative pour la solution avec $E < 0$. Historiquement, ce problème a amené à l'abandon provisoire de l'équation de Klein-Gordon.

En 1928, P.A.M. Dirac construit une équation covariante qui admet une densité de probabilité positive. Pour faire cela, il considère nécessaire de limiter au premier ordre la dérivation par rapport au temps, comme dans l'équation de Schrödinger. Pour obtenir une forme covariante, il faut également une dérivation du premier ordre par rapport à l'espace. Donc Dirac écrit une équation de la forme :

$$i\hbar\partial_t\psi = -i\hbar(\alpha_1\partial_1\psi + \alpha_2\partial_2\psi + \alpha_3\partial_3\psi) + \beta mc^2\psi \equiv H\psi \quad (2.2.14)$$

qui, en plus de la covariance sous les transformations de Lorentz, doit satisfaire à :

$$E = +(c^2p^2 + c^4m^2)^{1/2} \quad (2.2.15)$$

On voit que si les α_i sont des nombres, l'expression entre parenthèse dans la 2.2.14 n'est pas invariante par rotation. La conclusion de Dirac est qu'on peut obtenir une solution convenable en considérant une fonction d'onde à 4 composantes et en introduisant des matrices 4x4 pour les α_i et β .

On peut imaginer la forme de cette solution si l'on impose la covariance à l'équation. Donc on réécrit 2.2.14 sous la forme :

$$\boxed{\left(i\hbar\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} - mc\right)\psi = 0} \quad \text{Equation de Dirac} \quad (2.2.16)$$

avec les 4 paramètres γ^μ , $\mu=0,1,2,3$, à déterminer. Dans l'espace des p on a :

$$\boxed{(\gamma^\mu p_\mu - mc)\psi = 0} \quad (2.2.17)$$

La détermination de ces paramètres se fait en multipliant 2.2.16 à gauche par $(-i\hbar\gamma^\mu\partial/\partial x^\mu - mc)$, et en cherchant à récupérer une forme à la Klein-Gordon. On obtient alors les conditions :

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} \equiv \gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}I \quad \text{où} \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.2.18)$$

Il y a une famille de solutions équivalentes dont une représentation est :

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix} \quad (2.2.19)$$

Dans (2.2.18) et (2.2.19) les 1 et les 0 représentent des matrices 2x2, et les σ^i sont les matrices de Pauli. On introduit aussi :

$$\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.2.20)$$

La fonction d'onde a donc la forme d'un **double spineur** :

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} \quad (2.2.21)$$

Notons qu'il ne s'agit pas d'un quadrivecteur !

2.2.1 Le courant pour les particules de Dirac

On définit le courant par (N.B. : $a^\dagger = (a^*)^t$) :

$$\boxed{j^\mu(x) = c\psi^\dagger(x)\gamma^0\gamma^\mu\psi(x) = c\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x) \quad \text{où} \quad \bar{\psi} = \psi^\dagger(x)\gamma^0} \quad (2.2.22)$$

$\bar{\psi}$ est appelé l'adjoint de ψ . $\bar{\psi}$ satisfait l'équation de Dirac adjointe que l'on obtient en prenant le \dagger de 2.2.16 et en multipliant par γ^0 . On trouve que cette expression satisfait l'équation de continuité $\partial_\mu j^\mu = 0$. j^μ est un quadrivecteur de Lorentz, qui a pour composante temporelle la quantité définie positive $j^0 = \rho c = c\bar{\psi}\gamma^0\psi = c\psi^\dagger\psi$, comme attendu.

Notons que $\psi^\dagger\psi$ n'est pas un scalaire (un invariant) de Lorentz ; on peut montrer que $\bar{\psi}\psi$ par contre est invariant.

2.2.2 Les solutions de l'équation de Dirac

Considérons tout d'abord la situation statique, $\mathbf{p} = 0$. Dans ce cas, on a la paire de solutions :

$$\psi_\pm(t) = e^{\mp i(mc^2t/\hbar)}\psi_\pm(0) \quad (2.2.23)$$

avec :

$$\psi_+ = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \psi_- = \begin{pmatrix} \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} \quad (2.2.24)$$

mc^2 est l'énergie de la particule au repos ; la solution à l'exposant positif correspond encore à des énergies négatives. On associera ces solutions aux antiparticules. On reconnaît d'autre part dans (2.2.24) deux spineurs utilisables pour décrire un électron et un positron de spin 1/2.

Venons-en à la situation dynamique, $\mathbf{p} \neq 0$. On est intéressé à des états d'énergie définie, donc à des solutions en forme d'onde plane :

$$\psi(\mathbf{r}, t) = ae^{-i(Et - \mathbf{p} \cdot \mathbf{r})/\hbar} u(E, \mathbf{p}) \quad (2.2.25)$$

qu'on écrit de façon condensée :

$$\psi(x) = ae^{ixp/\hbar} u(p) \quad (2.2.26)$$

Si l'on insère (2.2.26) dans l'équation de Dirac, où les matrices γ sont définies en (2.2.19) et (2.2.20), on obtient les 4 solutions (notations de la ref. 9) :

$$\begin{aligned} u^{(1)} = N \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{cp_z}{E+mc^2} \\ \frac{c(p_x+ip_y)}{E+mc^2} \end{pmatrix}, \quad u^{(2)} = N \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{c(p_x-ip_y)}{E+mc^2} \\ \frac{-cp_z}{E+mc^2} \end{pmatrix} \\ \text{si } E = \sqrt{m^2c^4 + \mathbf{p}^2c^2} \\ u^{(3)} = N \begin{pmatrix} \frac{cp_z}{E-mc^2} \\ \frac{c(p_x+ip_y)}{E-mc^2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u^{(4)} = N \begin{pmatrix} \frac{c(p_x-ip_y)}{E-mc^2} \\ \frac{-cp_z}{E-mc^2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.2.27) \\ \text{si } E = -\sqrt{m^2c^4 + \mathbf{p}^2c^2} \\ \text{avec } N = \sqrt{(|E| + mc^2)/c} \end{aligned}$$

On a choisi la normalisation $2E$ particules par unité de volume (ref 2 et 9) :

$$u^\dagger u = 2 |E| / c \quad (2.2.28)$$

Remarquons que d'autres normalisations sont possibles : $u^\dagger u = 1$, $|E|/mc^2 \dots$

$u^{(1)}$ et $u^{(2)}$ sont des vecteurs propres de l'opérateur énergie avec la valeur propre $+|E|$

$u^{(3)}$ et $u^{(4)}$ sont des vecteurs propres avec la valeur propre $-|E|$.

On associe conventionnellement les vecteurs propres $u^{(3)}$ et $u^{(4)}$ au positron. On veut que pour le positron comme pour l'électron $E > 0$, ce qui s'obtient

si l'on change le signe de E et simultanément celui de \mathbf{p} . Donc on réinterprète les solutions pour des particules à E négative comme des solutions pour les antiparticules à E positive.

On obtient :

$$\begin{aligned}
 v^{(1)}(E, \mathbf{p}) = u^{(4)}(-E, -\mathbf{p}) &= N \begin{pmatrix} \frac{c(p_x - ip_y)}{E + mc^2} \\ -\frac{cp_z}{E + mc^2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
 v^{(2)}(E, \mathbf{p}) = u^{(3)}(-E, -\mathbf{p}) &= N \begin{pmatrix} \frac{cp_z}{E + mc^2} \\ \frac{c(p_x + ip_y)}{E + mc^2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.2.29)
 \end{aligned}$$

Dorénavant on laissera de côté les notations $u^{(3)}$ et $u^{(4)}$, les vecteurs propres $u^{(1)}$ et $u^{(2)}$ représentant les e^- et les vecteurs propres $v^{(1)}$ et $v^{(2)}$ les e^+ .

Les u satisfont à l'équation :

$$(\gamma^\mu p_\mu - mc)u = 0 \quad (2.2.30)$$

et les v à l'équation :

$$(\gamma^\mu p_\mu + mc)v = 0 \quad (2.2.31)$$

Remarquons que pour revenir à la forme (2.2.14) il faut faire la substitution :

$$\gamma^0 = \beta \quad \text{et} \quad \gamma^i = \beta\alpha_i \quad (2.2.32)$$

Quelques questions se posent :

- 1) Que cachent effectivement les solutions à énergie négative ?

On ne veut pas de particules de cette sorte. Une masse négative est difficile à concevoir : pensez à $F=ma...$! Dirac a donné la réponse suivante à cette interrogation : des objets à énergie négative existent dans l'Univers, mais les états de masse $-m$ et charge q qui correspondent à $(-E, -\mathbf{p})$, $E > 0$ sont normalement tous uniformément occupés. En effet on considère ici des "fermions" qui se distribuent uniformément entre les états disponibles (voir le principe d'exclusion de Pauli)²³. Si l'on apporte une certaine quantité d'énergie $\delta E > 2mc^2$ au système "vide", une paire particule-trou peut se former par passage d'une de ces pseudo-particules à

²³Cette interprétation ne s'applique donc pas aux bosons...

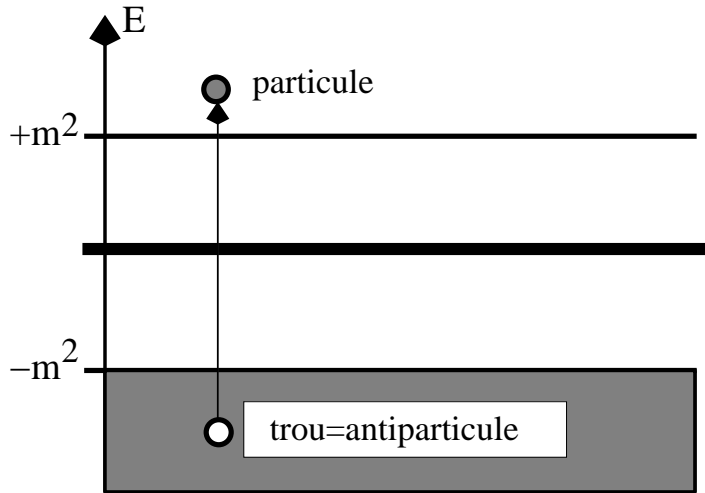


FIG. 2.2.1 – Formation d’une paire particule-trou selon Dirac

l’état de particule, de masse m et charge q . Le trou se comporte comme une antiparticule caractérisée par (E, \mathbf{p}) , masse m et charge $-q$. Un trou qui avance est équivalent à une particule qui recule ! D’où les éq. 2.2.29. Il faut remarquer que ce problème est contourné par la théorie quantique des champs.

- 2) Les vecteurs propres $u^{(1)}$ et $u^{(2)}$ représentent-ils un électron dans des états de spin $\pm 1/2$?

La réponse est : non. Si l’on définit l’opérateur de spin :

$$\mathbf{S} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\sigma} \end{pmatrix} \quad (2.2.33)$$

on peut vérifier que l’on n’a pas des vecteurs propres de S_z . La raison en est que seul le moment angulaire total $\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}$ est une quantité “conservée” et l’équation de Dirac implique cette conservation.

Exercice. : montrer que :

$$S_1 = \frac{i\hbar}{2} \gamma^2 \gamma^3 \quad S_2 = \frac{i\hbar}{2} \gamma^3 \gamma^1 \quad S_3 = \frac{i\hbar}{2} \gamma^1 \gamma^2 \quad (2.2.34)$$

et, à partir de là, que :

$$\mathbf{S} = -\frac{1}{2} \gamma^0 \boldsymbol{\gamma}^5 \boldsymbol{\gamma} \quad (2.2.35)$$

C’est seulement dans le cas particulier $p_x=p_y=0$, (quand on projette le spin le long de la direction du mouvement z et par $\mathbf{L} = 0$) qu’on obtient l’association

$u^{(1)} = |+\rangle$ et $u^{(2)} = |-\rangle$. Cette projection s'appelle l'**hélicité** et l'opérateur correspondant est :

$$\lambda \equiv \mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{p}} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}} \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad \hat{\mathbf{p}} = \mathbf{p} / |\mathbf{p}| \quad (2.2.36)$$

Les états possibles sont $\lambda = \pm\hbar/2$ (hélicités positive et négative) que l'on représente par (figure 2.2.2) :

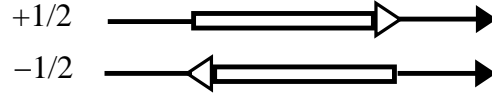


FIG. 2.2.2 – Etats d'hélicité positive et négative

La petite flèche donne la direction de la particule, la grosse représente la projection du spin sur cette direction.

L'opérateur hélicité commute avec l'Hamiltonien H : λ est un bon nombre quantique.

Q. : l'hélicité est-elle un invariant de Lorentz ?

• 3) A t'on vraiment obtenu une formulation covariante ? Il devrait être clair que oui : on a tout fait pour !

Pour le démontrer, il faut chercher une prescription qui permette de passer de l'état $\psi(x)$ décrit par l'observateur O à l'état $\psi'(x')$ décrit par O' , où $\psi'(x')$ satisfait l'équation de Dirac :

$$\left(i\hbar\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x'^\mu} - mc \right) \psi'(x') = 0$$

$$(\gamma^\mu p'_\mu - mc)\psi'(x') = 0 \quad (2.2.37)$$

La transformation doit être linéaire

$$\psi'(x') = \tilde{S}(O,O')\psi(x), \quad \text{où} \quad \tilde{S} \text{ est une matrice } 4 \times 4 \quad (2.2.38)$$

En effet la solution existe, voir p. ex. ref. 8.

• 4) L'équation de Dirac admet-elle une limite non-relativiste raisonnable ?

A partir de 2.2.19,20, 2.2.23,24 et 2.2.32, on obtient :

$$\begin{aligned}
H\psi &= (c\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\alpha} + mc^2\beta)\psi = E\psi \\
\left[c \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \\ \boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{p} + mc^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right] \psi &= E\psi \quad (2.2.39) \\
\text{d'où le couple :} & \quad \begin{cases} c\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}\psi_- = (E - mc^2)\psi_+ \\ c\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}\psi_+ = (E + mc^2)\psi_- \end{cases}
\end{aligned}$$

Dans la limite non relativiste, E est dominé par mc^2 :

$$\psi_- = \frac{c\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{E + mc^2}\psi_+ \longrightarrow \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{2mc}\psi_+ \quad (2.2.40)$$

On appelle ψ_- la “petite” composante, car affectée par le facteur $1/2mc$.

On montre que si l'on considère la particule en interaction avec un champ e.m. externe et qu'on introduit le “**couplage minimal**” :

$$p^\mu \rightarrow p^\mu - \frac{e}{c}A^\mu \quad A \equiv (V, \mathbf{A}), \quad (2.2.41)$$

on tombe sur l'équation de Pauli :

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \varphi = \left[\frac{(\mathbf{p} - (e/c)\mathbf{A})^2}{2m} - \frac{e\hbar}{2mc} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B} + eV \right] \varphi \quad (2.2.42)$$

avec $\mathbf{B} = \text{rot}(\mathbf{A})$ et φ un spineur ($\varphi = e^{imc^2t/\hbar}\psi_+$).

On voit que dans sa limite non relativiste, l'équation de Dirac comprend un terme qui décrit l'interaction entre l'électron et le champ magnétique :

$$-\frac{e\hbar}{2mc} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B} \equiv -g \frac{e}{2mc} \mathbf{S} \cdot \mathbf{B} \quad \text{avec :} \quad \mathbf{S} = \frac{1}{2}\hbar\boldsymbol{\sigma} \quad \text{et} \quad g = 2 \quad (2.2.43)$$

g est le **facteur de Landé** de la particule.

- 5) Qu'en est-il des particules de spin entier 0, 1 etc... ?

On revient à l'équation de Klein-Gordon et on y applique la même convention que pour l'éq. de Dirac : on considère les énergies négatives comme étant associées aux antiparticules. L'éq. de KG est apte à décrire une particule **scalaire** (ou **pseudo-scalaire**, comme l'on verra plus tard); elle est invariante vis-à-vis des transformations de Lorentz. On peut voir cela de façon intuitive en remarquant que l'opérateur $[\square - (mc^2)^2]$ est un invariant. Donc pour que le produit par ψ reste invariant, il faut que la fonction d'onde soit un scalaire. Elle ne doit pas dépendre d'une direction privilégiée de l'espace ; le spin doit être nul. Un formalisme approprié doit être élaboré pour la description des états de particules de spin 1, 3/2, 2, 5/2, etc.

2.3 Les unités naturelles

On simplifie souvent l'écriture des formules par l'adoption des unités naturelles :

$$c = h/2\pi = \hbar = 1 \quad (2.3.1)$$

L'éq. de Dirac devient :

$$(\gamma^\mu p_\mu - m)\psi = 0 \quad (2.3.2)$$

que souvent l'on abrège par :

$$(\not{p} - m)\psi = 0 \quad \text{avec :} \quad \not{p} = \gamma^\mu a_\mu \quad (2.3.3)$$

Q. : vérifier que $197 \text{ MeV} = 1 \text{ fm}^{-1}$

2.4 Propriétés²⁴ des matrices γ

$$\begin{aligned} \{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} &= 2g^{\mu\nu} \\ \gamma^5 &= i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 \\ \{\gamma^\mu, \gamma^5\} &= 0 \\ \gamma^\mu\gamma_\mu &= 4 \\ \gamma_\mu\gamma^\nu\gamma^\mu &= -2\gamma^\nu \\ \gamma_\mu\gamma^\nu\gamma^\lambda\gamma^\mu &= 4g^{\nu\lambda} \\ \gamma_\mu\gamma^\nu\gamma^\lambda\gamma^\sigma\gamma^\mu &= -2\gamma^\sigma\gamma^\lambda\gamma^\nu \end{aligned}$$

2.5 L'équation de Dirac pour $m = 0$

On doit traiter à part la limite $m \rightarrow 0$. La seule particule connue de masse (peut être) nulle et de spin 1/2 est le neutrino.

²⁴Pour des informations plus complètes, voir par ex. Ref. 10 Appendix C.

Les eq. 2.2.30 et 2.2.31, pour $m = 0$ donnent :

$$\gamma^\mu p_\mu u = 0 \quad \text{et} \quad \gamma^\mu p_\mu v = 0 \quad (2.5.1)$$

L'éq. pour u (qui correspond à la "particule") peut s'écrire :

$$\gamma^i p_i u = -\gamma^0 p_0 u = -\gamma^0 E u \quad \text{car} \quad p_0 = E \quad (2.5.2)$$

ou aussi :

$$\boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{p} u = \gamma^0 E u \quad (2.5.3)$$

On multiplie de chaque côté par $-\frac{1}{2}\gamma^0\gamma^5$ et on utilise l'éq. 2.2.35, ce qui donne :

$$\mathbf{S} \cdot \mathbf{p} u = \frac{1}{2}\gamma^5 E u \quad \text{ou} \quad \frac{\mathbf{S} \cdot \mathbf{p}}{|\mathbf{p}|} u = \lambda u = \frac{1}{2}\gamma^5 u \quad (2.5.4)$$

On a utilisé le fait que pour une "particule" de masse nulle $E = +|\mathbf{p}|$.

Multiplions 2.5.4 par γ^5 et ajoutons et soustrayons le résultat obtenu à l'équation de départ :

$$\begin{aligned} \lambda(1 + \gamma^5)u &= \frac{1}{2}(1 + \gamma^5)u \\ \lambda(1 - \gamma^5)u &= \frac{1}{2}(1 - \gamma^5)u \end{aligned} \quad (2.5.5)$$

où λ est donné par 2.2.36. Donc :

$$(1 \pm \gamma^5)u \quad (2.5.6)$$

sont des états d'hélicité ^{positive}/_{negative} pour la "particule". La situation pour l'"antiparticule" (la fonction est alors v et $E = -|\mathbf{p}|$) donne des résultats inversés.

Par la suite on montrera expérimentalement que pour les neutrinos seul l'état d'hélicité négative existe (d'hélicité positive pour les antineutrinos).

3 Les propriétés des particules

3.1 Introduction

Dans ce chapitre on présente un certain nombre des caractéristiques des particules observées dans la nature : leurs masse, charge, temps de vie, spin, ... Un accent particulier est mis dans l'exposé des **méthodes expérimentales** permettant la détermination de ces grandeurs.

3.2 La masse

La masse d'une particule est la valeur que l'on obtient par $(E^2 - \mathbf{p}^2)^{1/2}$. Donc la masse est l'élément qui reste dans l'Hamiltonien (ou le Lagrangien) quand $\mathbf{p}=0$ et que l'on a éliminé toute interaction. Il s'agit donc d'un nombre bien défini pour une particule libre et stable²⁵.

Dans le cas d'une symétrie parfaite entre particule et antiparticule, leurs masses sont identiques.

Il n'est pas évident de définir clairement la masse d'un quark, particule que l'on ne trouve pas à l'état libre. Dans ce cas -pathologique-, plusieurs définitions sont utilisées :

- la **masse "lagrangienne"** est la valeur supposée pour un quark libre (donc lorsque l'interaction forte est "éteinte"). Cette valeur peut se déduire par des modèles théoriques et elle est de l'ordre de quelques MeV pour les quarks u et d, et de 100-300 MeV pour le quark s.

- la **masse "constituante"** est essentiellement une masse effective qui se rapporte à un quark en interaction à l'intérieur d'un hadron. Pour les quarks u et d par exemple, on peut considérer que les constituants du proton (uud) se partagent chacun 1/3 de la masse disponible, ce qui donne 300-400 MeV environ. Si l'on prend la masse du Λ (usd) et que l'on soustrait la masse du nucléon, on détermine un excès d'environ 170 MeV, ce qui nous permet d'attribuer à la masse du quark s environ 300+170 MeV.

On attribue une masse zéro au photon (expérimentalement on a une limite $m_\gamma < 3 \cdot 10^{-33}$ MeV, par la valeur du champ magnétique galactique²⁶). On connaît avec une bonne précision la masse du Z et celle du W. Par contre, l'attribution d'une masse au gluon se heurte au même ordre de difficulté que pour les quarks : le gluon aime la vie communautaire et il est observé exclusivement en interaction. On admet une masse nulle, mais avec quelques doutes²⁷.

²⁵On verra au cours du chapitre 5, lorsqu'on parlera des "propagateurs", une autre définition de la masse

²⁶M. Chibisov et al. Sov. Phys. Uspekhi 19 (1976) 624

²⁷M. Consoli, J. H. Field. Phys. Rev. 49D (1994) 1293

Considérons aussi la situation des particules instables. Dans ce cas, la précision sur la valeur de la masse est affectée par le temps de vie τ , via la relation d'incertitude : $\Gamma\tau \geq \hbar$, où Γ est appelée la largeur. La particule ρ par exemple a une masse $m_\rho = 768$ MeV, mais elle a une durée de vie de l'ordre de $4 \cdot 10^{-24}$ s qui se traduit par une largeur $\Gamma_\rho = 151$ MeV, soit 20% de m_ρ . Les bosons Z et W ont une largeur de l'ordre de 2 GeV, environ 2% de la valeur centrale de leur masse.

Quand la largeur Γ de la particule est non négligeable, on parle plutôt de **résonance**²⁸, à la place de “particule”. Typiquement, les objets qui vivent $< 10^{-22}$ sec sont des “résonances”. L'origine du mot résonance peut se comprendre p. ex. si l'on considère la production d'un de ces objets. Les exemples classiques sont les résonances πN , (pion-nucléon : $p + \pi^+ \rightarrow \Delta(1232)$ etc.). On les produit par bombardement d'une cible de nucléons par un faisceau de pions. Ce faisceau est assimilable à une onde plane qui peut, à une énergie donnée, entrer en *résonance* avec “la boîte de potentiel” que constitue le nucléon. La probabilité de formation du système composé est alors donnée par :

$$\sigma \propto \frac{\Gamma^2/4}{(E - E_R)^2 + \Gamma^2/4} \quad (3.2.1)$$

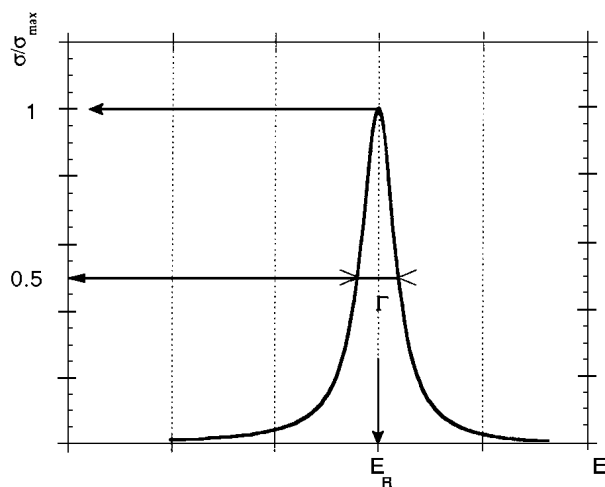


FIG. 3.2.1 – Courbe de résonance de Breit-Wigner

La relation 3.2.1 est appelée : de **Breit-Wigner** (voir figure 3.2.1). On aura l'occasion d'en discuter dans un chapitre à venir (voir aussi figure 1.5.3 et cours d'introduction).

²⁸Si le Higgs existe, sa largeur est proportionnelle au cube de sa masse. Cela donnerait une largeur de l'ordre de 100% pour une masse de 1 TeV. On peut se demander, dans un telle éventualité, si l'on pourra encore parler de résonance...

On va maintenant étudier quelques techniques standards pour la mesure de la masse.

3.2.1 La mesure de la masse à partir de la profondeur de pénétration dans un milieu

La profondeur de pénétration d'une particule dans la matière peut être calculée à partir de la perte d'énergie spécifique $\frac{dE}{dx}$ (relation de Bethe-Block). On trouve que le parcours ("range") jusqu'à l'arrêt de la particule est essentiellement fonction de la vitesse de celle-ci à l'entrée : $R(v)$. On sait par ailleurs que la courbure de la trajectoire dans un champ magnétique appliqué est fonction de la quantité de mouvement p . Les mesures combinées de la courbure magnétique à l'entrée dans la matière et de la profondeur de pénétration dans celle-ci permettent donc une détermination de la masse de la particule : $m = p/v$. Cette méthode a été utilisée par Barkas et al.²⁹ pour la première détermination précise des masses du pion chargé et du muon. Les résultats étaient déjà remarquablement précis ($\sim 1\%$) :

pour le π^+ : $m_{\pi^+} = 273.3 \pm 0.3 \times$ la masse de l'électron

pour le π^- : $m_{\pi^-} = 272.8 \pm 0.3 \times$ la masse de l'électron

pour le μ^+ : $m_{\mu^+} = 206.9 \pm 0.2 \times$ la masse de l'électron

3.2.2 La mesure par les contraintes cinématiques

On utilise les lois de conservation de l'énergie et de l'impulsion. La méthode

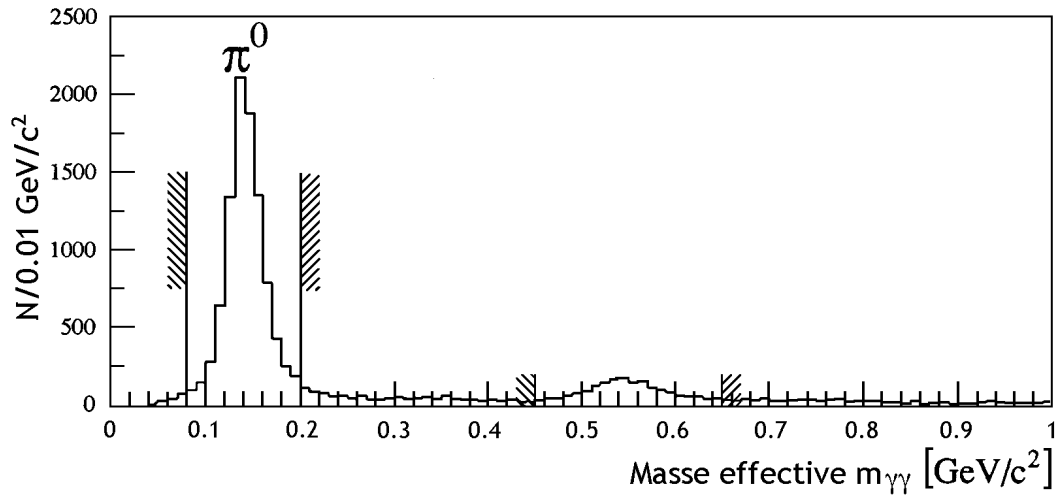


FIG. 3.2.2 – Spectre de la masse effective de paires de photons

²⁹W.H. Barkas, W. Birnbaum, F.M. Smith. Phys. Rev. 101(1956) 778

nécessite une reconstruction la plus complète possible des paramètres cinématiques qui caractérisent une désintégration ou une réaction entre particules. Soit

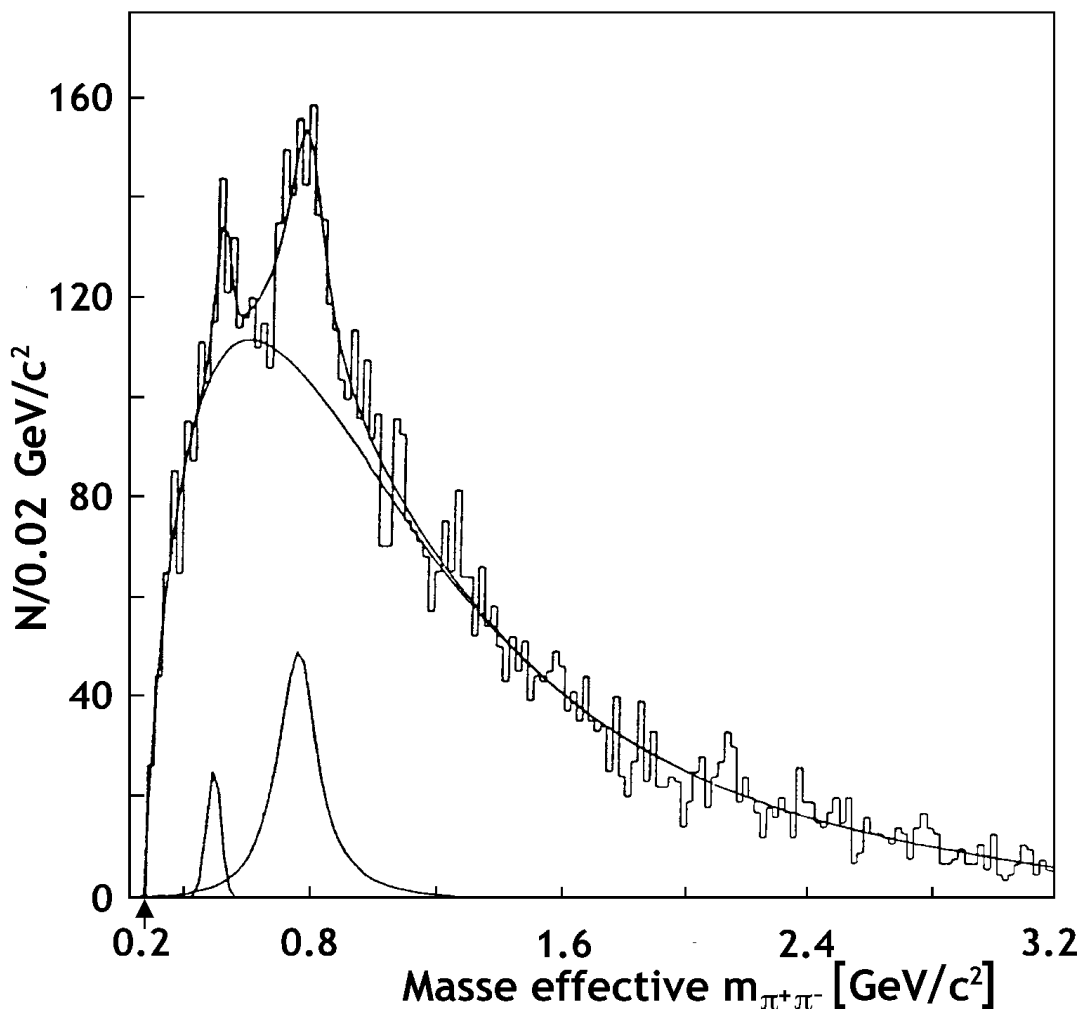


FIG. 3.2.3 – Spectre de la masse effective de paires de pions

par exemple la désintégration $\pi^0 \rightarrow \gamma_1\gamma_2$. Contruisons la quantité :

$$m_{\gamma_1\gamma_2}^2 = (p_{\gamma_1} + p_{\gamma_2})^2 \quad \text{où} \quad p = (E, \mathbf{p}) \quad (3.2.2)$$

Dans le cas particulier de photons de masse nulle, on obtient :

$$m_{\gamma_1\gamma_2}^2 = 2E_1E_2(1 - \cos\theta_{12}) \quad \text{où} \quad \cos\theta_{12} = \frac{\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2}{|\mathbf{p}_1| |\mathbf{p}_2|} \quad (3.2.3)$$

Les mesures combinées des énergies E_1, E_2 et de l'angle θ_{12} permettent de déterminer $m_{\gamma_1\gamma_2}$ (masse effective). Si les deux photons considérés sont issus d'un π^0 ,

on doit avoir $\langle m_{\gamma_1\gamma_2} \rangle = m_{\pi^0} = 134.9743 \text{ MeV}/c^2$. En pratique, les mesures sont entachées d'erreurs liées à la résolution finie de l'appareillage, ce qui affecte la valeur reconstruite de $m_{\gamma\gamma}$ (voir figure 3.2.2).

Q. : que vaut la largeur à mi-hauteur du pic de π^0 ? Quelle est la largeur attendue d'après les tables ?

Q. : à quoi correspond la bosse entre 500 et 600 MeV ?

Q. : quelle est l'origine du fond à peu près continu ?

Dans le cas de la désintégration $\rho \rightarrow \pi\pi$, on procède de façon similaire, les pions remplaçant les photons. Toutefois la largeur naturelle du ρ domine la procédure et on a des difficultés à reconnaître la particule (la résonance), événement par événement. Sur un grand nombre d'événements, le spectre permet une identification des caractéristiques de l'objet (voir figure 3.2.3).

La masse du neutrino qui est associée aux désintégrations β est très petite (mais probablement non nulle). On essaie de déterminer cela par les **graphiques de Kurie**. On utilise un modèle des désintégrations β simple et la **règle d'or de Fermi** :

$$\text{probabilité de transition} = \frac{2\pi}{\hbar} |\mathcal{M}_{if}|^2 \rho_f \quad (3.2.4)$$

où \mathcal{M}_{if} contient l'information dynamique de l'interaction et ρ_f est le facteur d'espace de phase qui contient la densité des états finaux.

Lors de la désintégration $n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$, l'élément de matrice \mathcal{M}_{if} peut être considéré comme constant. Il contient la constante de Fermi au carré G_F^2 qui exprime la force en jeu, et une série de sommes sur les spins et les angles (à discuter dans le chapitre sur l'interaction faible). Ce qui nous intéresse maintenant est la densité d'états finaux, donc le nombre de possibilités pour le proton, l'électron et le neutrino de se partager l'énergie disponible, ici la masse du n (ou celle du noyau qui se désintègre). Il s'agit d'un état instable avec une certaine largeur Γ . On considère par contre que le proton (ou le noyau final) est stable ; sa masse est donc bien définie. On peut transférer toute l'indétermination initiale sur le système des deux leptons, d'énergie totale :

$$E_0 = E_e + E_\nu \quad (3.2.5)$$

La densité d'état finaux peut donc se calculer à partir de cette quantité :

$$\rho_f = dN/dE_0 \quad (3.2.6)$$

On considère une particule confinée dans un volume $V=L^3$ très grand (comparé aux dimensions du neutron). Cette particule est décrite par une fonction d'onde stationnaire $\psi = A \sin(k_x x) \sin(k_y y) \sin(k_z z)$ avec les conditions aux bords de la boîte : $Lk_x = \pi n_x, \dots$ $n_x = 1, 2, 3, \dots$

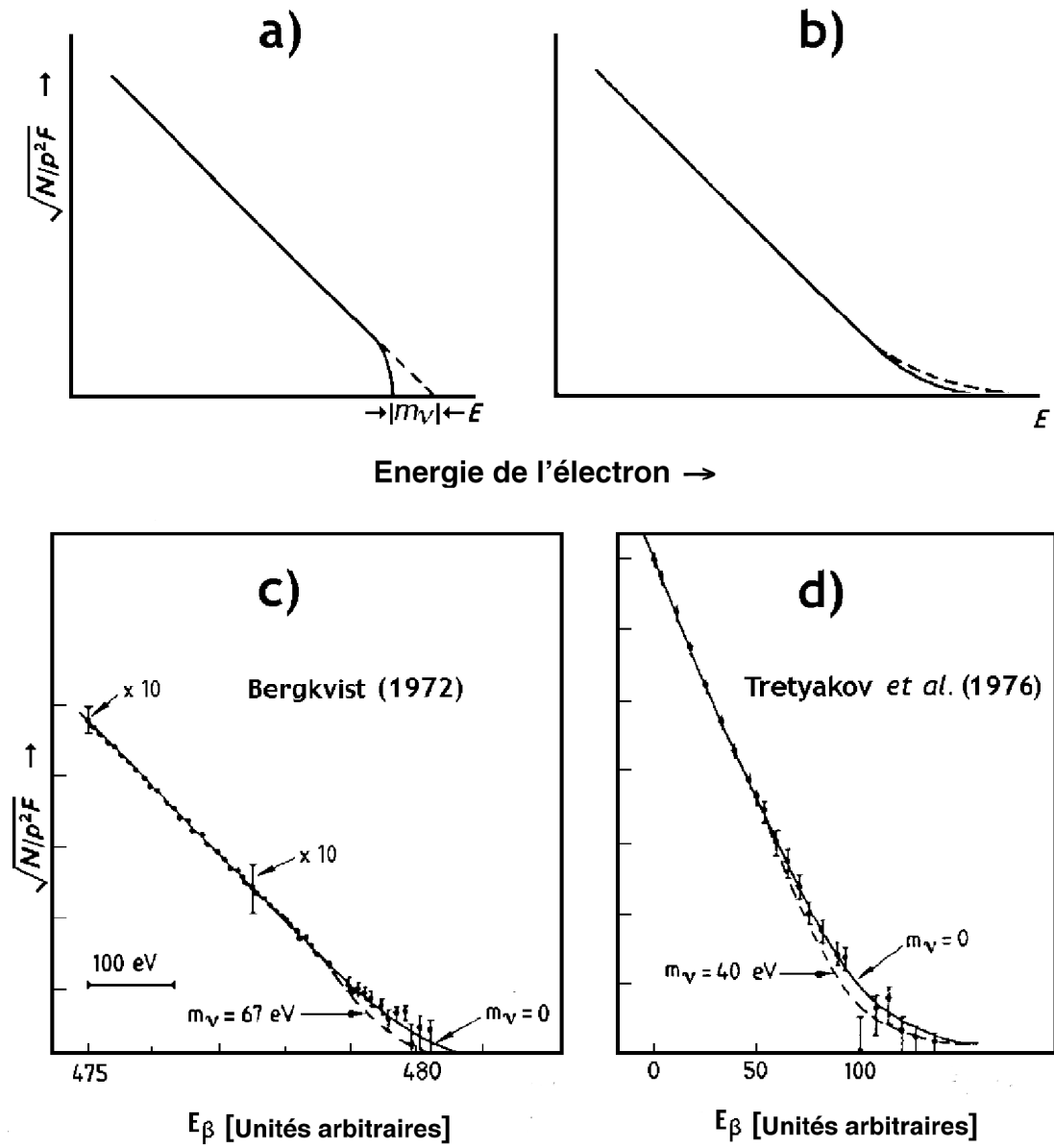


FIG. 3.2.4 – Graphique de Kurie pour des neutrons libres ; a) : spectre théorique ; b) : idem, convolué avec les imperfections de mesure ; c) et d) : résultats de deux expériences

Donc, pour une quantité de mouvement $p = |\mathbf{p}|$ on a :

$$p = \hbar \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2} = \frac{\pi \hbar}{L} \sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2} = \frac{\pi \hbar}{L} n \quad (3.2.7)$$

Le nombre maximum d'états disponibles avec une valeur de la quantité de mouvement plus petite que p est donné par $1/8$ du volume de la sphère de rayon $n = pL/\pi\hbar$:

$$N \propto \frac{L^3 p^3}{h^3} \quad (3.2.8)$$

Par différentiation on obtient :

$$dN \propto \frac{L^3 p^2 dp}{h^3} \quad \text{donc :} \quad \frac{dN}{dp} \propto p^2 \quad (3.2.9)$$

La densité des états disponibles pour l'électron (p) et le neutrino (p_ν) considérés indépendants est :

$$\frac{d}{dp} \frac{dN}{dp_\nu} \propto p^2 p_\nu^2 \quad (3.2.10)$$

Une fois choisie l'énergie E_e de l'électron, celle E_ν du neutrino considéré de masse nulle est déterminée par $E_\nu = |p_\nu| = E_0 - E_e$. Ce qui donne :

$$\frac{d}{dp} \frac{dN}{dE_0} \propto p^2 (E_0 - E_e)^2 \quad (3.2.11)$$

Donc la contribution dW associée à l'état final avec un électron d'impulsion comprise entre p et $p + dp$ est :

$$dW \propto p^2 dp (E_0 - E_e)^2 \quad \text{d'où on tire :} \quad \frac{dW}{p^2 dp} \propto (E_0 - E_e)^2 \quad (3.2.12)$$

Dans le cas d'un neutrino massif on aurait un facteur multiplicatif additionnel :

$$\frac{dW}{p^2 dp} \propto (E_0 - E_e)^2 \sqrt{1 - \left(\frac{m_\nu c^2}{E_0 - E_e} \right)^2} \quad (3.2.13)$$

Le taux d'événements prédit comprenant un électron d'énergie E_e est donc une fonction quadratique de $(E_0 - E_e)$.

Si l'on divise le nombre d'événements observés dans chaque intervalle d'énergie par le p^2 correspondant et qu'on prend la racine carrée de ce nombre, on doit obtenir une distribution linéaire qui s'annule en $E_e = E_0$, pour le cas de $m_\nu = 0$. On s'attend par contre à un seuil plus bas, en $E_e = E_0 - m_\nu$, pour un neutrino massif. Le point d'intersection avec l'axe x est donc sensible à m_ν . Il faut toutefois tenir compte de la résolution finie de l'appareillage, qui modifie sensiblement l'allure de la courbe (figure 3.2.4)³⁰

³⁰K.E. Bergkvist : Nucl. Phys. B39 (1972) 317.

E.F. Tretyakov et al. : Bull. Acad. Sci. USSR. Phys. Ser. 40 (1976) 1.

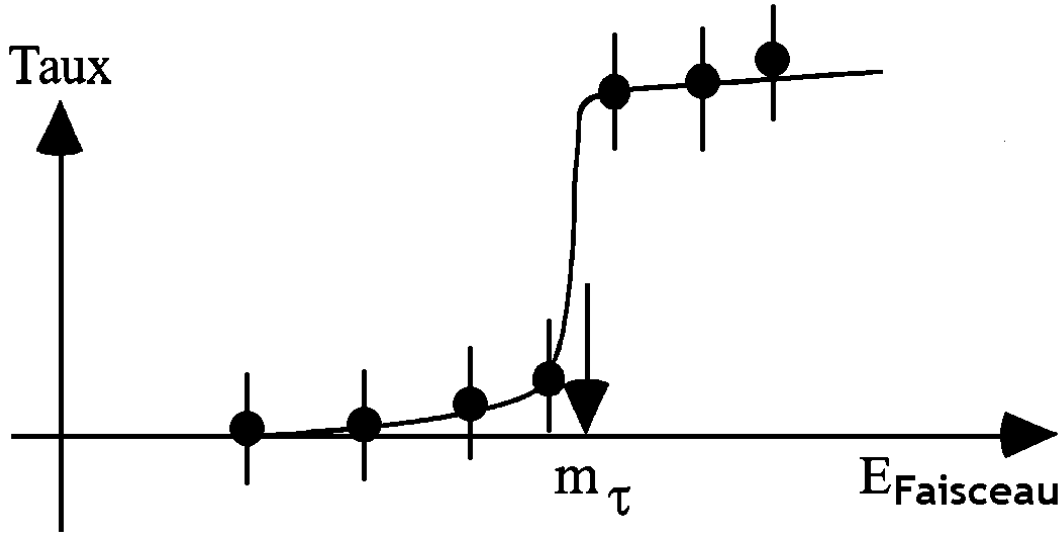
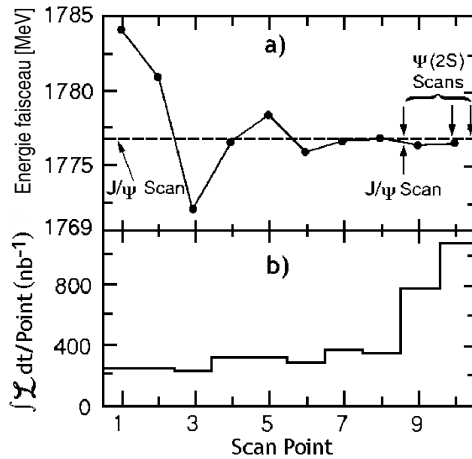


FIG. 3.2.5 – Taux d'événements près du seuil de production $e^+e^- \rightarrow \tau^+\tau^-$



c) : Résumé de la chronologie des données $\tau^+\tau^-$

Scan point	$W/2$ (MeV)	Δ (MeV)	\mathcal{L} (nb^{-1})	N (evts $e\mu$)
1	1784.19	1.34	245.8	2
2	1780.99	1.33	248.9	1
3	1772.09	1.36	232.8	0
4	1776.57	1.37	323.0	0
5	1778.49	1.44	322.5	2
6	1775.95	1.43	296.9	0
7	1776.75	1.47	384.0	0
8	1776.98	1.47	360.8	1
9	1776.45	1.44	798.1	0
10	1776.62	1.40	1109.1	1
11	1799.51	1.44	499.7	5
12	1789.55	1.43	250.0	2

FIG. 3.2.6 – Histoire du “scan” près du seuil de production de $\tau^+\tau^-$, par BES

La table PDG (2000) donne une masse $m_{\nu_e} < 3.0$ eV (avec un niveau de confiance de 95%). Mentionnons d'autre part que la mesure de la largeur du *burst* de neutrinos de la SN 1987A a permis de donner une limite $m_{\nu_e} < 23$ eV.

On va étudier maintenant la mesure de la masse d'une particule par la méthode du **seuil de production** de cette particule.

On considère le cas du τ , un lepton d'environ 1.8 GeV de masse, qui se désintègre en leptons plus légers ou en hadrons.

La méthode appliquée par la collaboration BES³¹, avec quelques innovations, utilise un collisionneur e^+e^- dans lequel l'énergie des faisceaux est ajustable autour de la valeur m_τ . On est donc proche du seuil de production $e^+e^- \rightarrow \tau^+\tau^-$, comme illustré dans la figure 3.2.5.

Voyons d'abord le principe de la méthode : on explore la région du seuil en variant pas à pas l'énergie des faisceaux d'une fraction de MeV ; on mesure à chaque étape le taux d'événements produits (par ex. $\tau \rightarrow e\nu_\tau\bar{\nu}_e$ et $\tau \rightarrow \mu\nu_\tau\bar{\nu}_\mu$). La courbe de seuil est du type représenté dans la figure 3.2.5, le bruit de fond est supposé nul, (par ex. pas d'intrusion par des muons cosmiques dans le lot d'événements). La pente de la courbe au seuil est déterminée par les incertitudes de mesure et par la largeur intrinsèque du τ . Ensuite, on ajuste aux points expérimentaux une courbe théorique qui contient m_τ comme paramètre libre.

Cette méthode a été affinée par la collaboration BES pour tenir compte du fait que cette pente au seuil est très abrupte. L'énergie du faisceau est modifiée de façon dynamique et itérative, en cherchant à se maintenir à cheval entre le cas "zéro événement" et le cas "proche de zéro" (voir figure 3.2.6). Cette procédure a permis d'optimiser la précision statistique du résultat. La collaboration BES a obtenu : $m_\tau = 1776.9_{-0.3}^{+0.2} \pm 0.2$ MeV.

Q. : Pourquoi BESS a choisi comme signature de la production de taus les couples $e^+\mu^-$ et $e^-\mu^+$, et pas e^+e^- or $\mu^+\mu^-$?

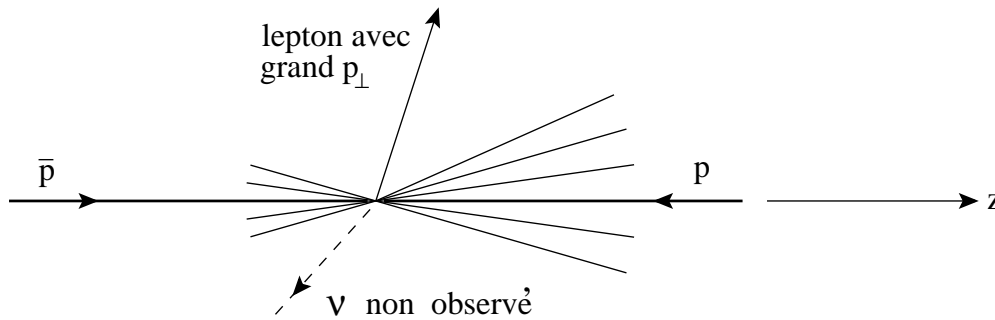


FIG. 3.2.7 – Événement présentant la signature de la désintégration leptonique du boson W produit lors d'une collision $\bar{p} - p$

Une **cinématique incomplète** permet aussi d'obtenir des renseignements sur la masse d'une particule. Par exemple l'étude du spectre des électrons de la désintégration $W \rightarrow e\nu_e$, où les bosons W sont produits dans des collisions proton-antiproton, a permis de déterminer la masse du W . Le processus a une signature caractéristique (voir figure 3.2.7) : le lepton chargé a généralement une

³¹BES collaboration. Phys. Rev. Lett. 69 (1992) 3021.

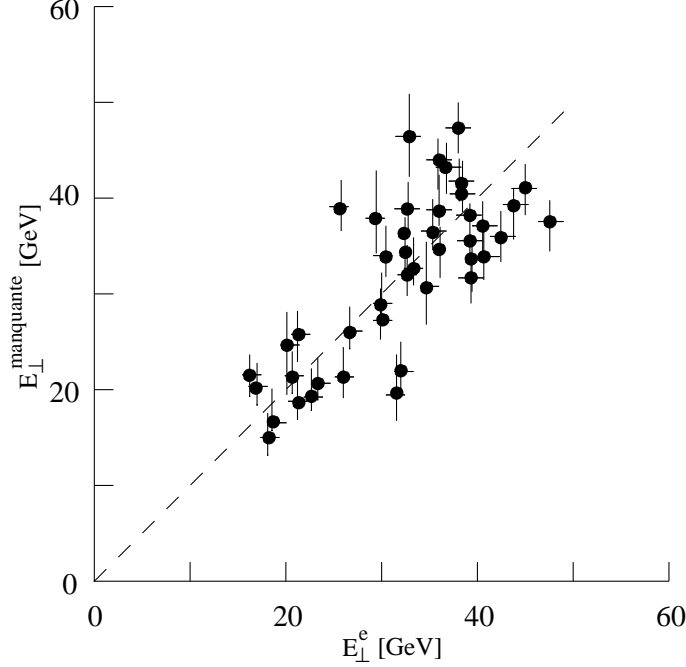


FIG. 3.2.8 – Energie transversale manquante $E_{\perp}^{manquante}$ en fonction de l'énergie transversale de l'électron E_{\perp}^e pour des événements candidats à la désintégration $W^{\pm} \rightarrow e^{\pm} + \nu_e(\bar{\nu}_e)$

grande énergie et souvent une composante transversale importante de son énergie, vu la grande masse du boson. Le neutrino, qui échappe à l'observation, manifeste sa présence par l'intermédiaire d'une grande énergie manquante et souvent par une composante transversale importante de cette énergie manquante. La situation est différente du cas d'une désintégration β , dans laquelle le nucléon initial est pratiquement au repos. Le W a une impulsion variable, car il est produit par la rencontre des partons du proton et de l'antiproton (voir chapitre 6), fragments qui transportent une fraction inconnue de l'impulsion des nucléons. En général, les trajectoires du lepton chargé et du neutrino ne sont pas collinéaires en raison du mouvement du boson mère. Si l'on néglige en première approximation la composante transversale de la quantité de mouvement du boson, on peut écrire :

$$\mathbf{p}_{\perp}^e + \mathbf{p}_{\perp}^{\nu} \simeq 0 \quad (3.2.14)$$

$$E_{\perp}^e \simeq E_{\perp}^{\nu} \equiv E_{\perp}^{manquante}$$

Les $\mathbf{p}_{\perp}^{\ell}$ et E_{\perp}^{ℓ} sont des composantes transversales de \mathbf{p}^{ℓ} et E_{ℓ}^{ℓ} . La masse de l'électron est négligée en regard de son énergie cinétique. En réunissant l'ensemble des données fournies par l'appareillage de mesure au sujet des leptons chargés et des hadrons issus de la collision et connaissant la direction et l'énergie des faisceaux,

on peut déterminer l'énergie transversale manquante. Une bonne corrélation est observée entre les valeurs de E_{\perp}^e et $E_{\perp}^{manquante}$ déterminées événement par événement (voir figure 3.2.8).

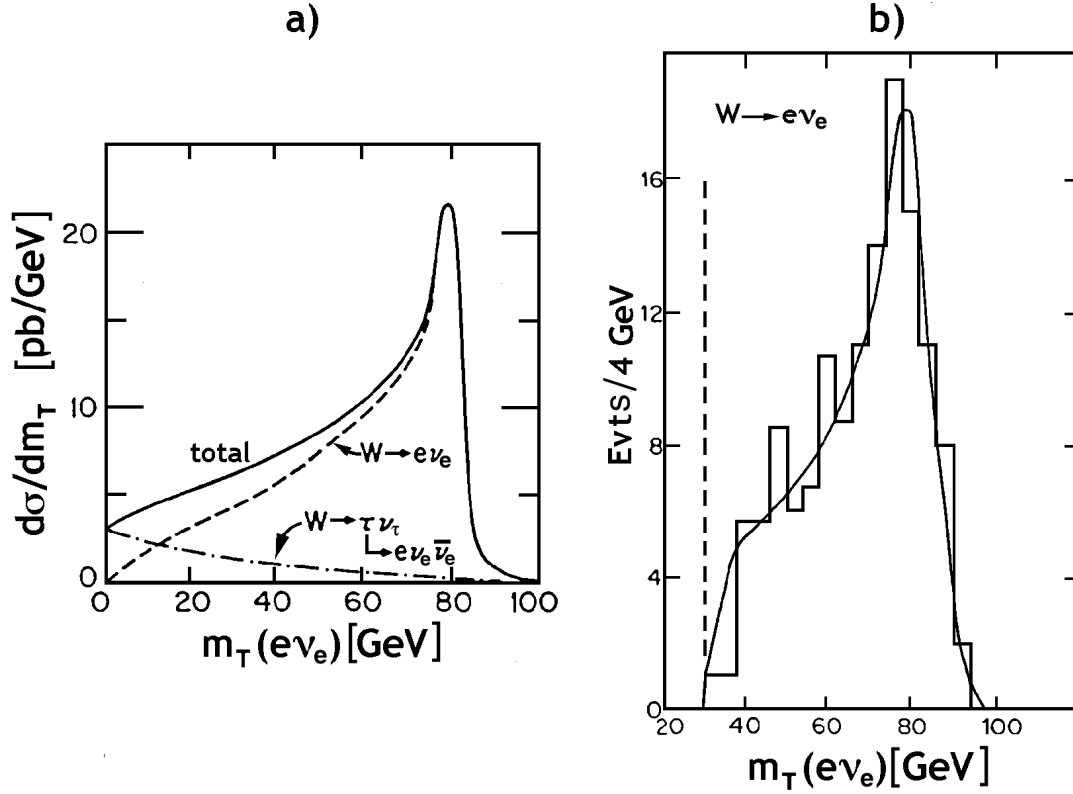


FIG. 3.2.9 – a) : Distribution de la masse transversale des leptons de $p\bar{p} \rightarrow W^{\pm} \rightarrow e\nu_e$, à 630 GeV ; b) : l'histogramme est un spectre tiré de l'expérience UA1 au SPS du CERN

On introduit la **masse transverse** m_T telle que :

$$m_T^2 = (E_{\perp}^e + E_{\perp}^{\nu})^2 - (\mathbf{p}_{\perp}^e + \mathbf{p}_{\perp}^{\nu})^2 \quad (3.2.15)$$

En tenant compte de 3.2.14, on trouve :

$$m_T \simeq 2E_{\perp}^e \simeq 2E_{\perp}^{\nu} \quad (3.2.16)$$

De plus, on a $0 \leq m_T \leq M_W$.

La figure 3.2.9 a) montre la prédiction théorique pour m_T à une énergie dans le c.m. $\sqrt{s} = 630$ GeV. La queue est due à la largeur intrinsèque du W ($\Gamma_W = 2.08$ GeV). On a inclu la contribution du bruit irréductible (c.à.d. ayant la même topologie que le signal) provenant de :

$$W^+ \rightarrow \begin{cases} \tau^+ \nu_\tau \\ e^+ \nu_e \bar{\nu}_\tau \end{cases} \quad (\text{idem } W^-)$$

La figure 3.2.9 b) montre un spectre de m_T tiré des données de l'expérience UA1 au SPS du CERN³² Il n'est pas possible d'en déduire directement la masse du boson, car on ne connaît pas sa quantité de mouvement ni celle du neutrino. Cette information est extraite de la comparaison entre le spectre mesuré de la masse transversale de l'électron et le spectre prédit par la simulation Monte Carlo de cette quantité. Le programme de simulation prend en compte les effets de la résolution expérimentale et de l'acceptance du détecteur. La masse du W , laissée comme paramètre libre, est déduite de l'ajustement du spectre simulé au spectre mesuré (voir § 7.2 pour applications numériques).

3.3 La charge électrique

L'expérience de Millikan est l'expérience de base. L'atome d'H est neutre donc $q_e = -q_p$. Les atomes plus lourds sont aussi globalement neutres ; on en déduit pour le neutron $q_n = 0$. On se base sur le principe de la conservation de la charge électrique pour déduire la charge d'autres particules. On a cherché des charges fractionnaires (p.ex. quarks libres) par des expériences à la Millikan, ou avec des TPC (voir paragraphe 1.6), sans succès. La charge des quarks est un problème qui sera traité à part. La table PDG donne pour la charge du photon une limite supérieure de $2 \cdot 10^{-32}$ fois la charge de l'électron.

3.4 Le temps de vie des particules

On utilise des techniques de temps de vol (*Time Of Flight*, TOF) qui permettent de déterminer τ par $d = v \tau$, où v est la vitesse de la particule et d la distance parcourue. Si v est proche de c , le temps de vie apparent de la particule est affecté par la dilatation du temps, ce qui allonge d dans le référentiel du laboratoire. Pour v proche de c :

$$d = v \tau \gamma \approx c \tau \gamma \quad \text{où} \quad \gamma = [1 - (v/c)^2]^{-1/2} \quad (3.4.1)$$

Comme on l'a vu dans l'introduction, les gros détecteurs installés sur les collisionneurs possèdent des détecteurs de micro-vertex. Ces dispositifs ont une résolution spatiale des traces de l'ordre de la dizaine de microns. Malheureusement, la plupart d'entre eux ont une structure cylindrique avec les senseurs en bandes (*strips*) disposés parallèlement à la ligne du faisceau. Cela leur donne la capacité de mesurer l'angle azimutal ϕ , mais pas l'angle polaire Θ par rapport à l'axe z (le

³²G.Arnison et al. Phys. Lett. 166B (1986) 484

faisceau). On obtient donc une projection dans le plan $r - \phi$ des traces de particules chargées. On a utilisé ces détecteurs de micro-vertex pour la mesure du temps de vie des mesons B au LEP et à Fermilab.

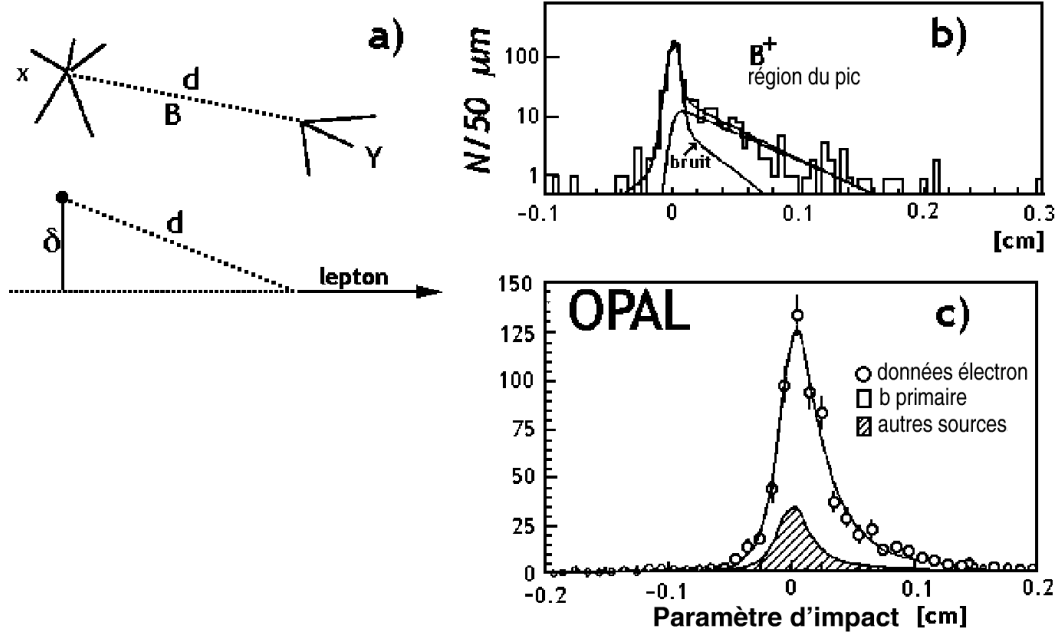


FIG. 3.4.1 – a) : définition de la distance de vol d et du paramètre d'impact δ ; b) : distribution de d pour des B^+ par CDF ; c) : distribution du paramètre d'impact par OPAL

Au LEP, les B sont produits par désintégration du Z : $Z \rightarrow B + X$. L'énergie des B est variable, mais elle est très piquée à une valeur proche de $M_Z/2$. Le B se propage sur une certaine distance d à partir de son point de création (vertex primaire) et il se désintègre en plusieurs particules $B \rightarrow Y$ (figure 3.4.1.a). A partir de la mesure des trajectoires représentées par X, on peut par intersection reconstruire le vertex primaire³³. Avec un nombre suffisant de trajectoires issues du vertex secondaire (Y), on peut aussi obtenir par intersection la position de celui-ci et calculer la valeur de d . CDF à Fermilab³⁴ a publié un résultat obtenu de cette façon (voir figure 3.4.1.b) et relatif au méson B^+ .

On peut s'intéresser à la désintégration leptonique ($Y = \text{lepton chargé} + \nu$) de la particule. Dans ce cas, on n'a pas assez d'informations pour calculer d . On construit alors la distribution du paramètre d'impact δ . δ est la distance la plus

³³Dans certaines analyses on se contente du vertex primaire nominal : le lieu de rencontre moyen des faisceaux du collisionneur.

³⁴F.Abe et al. Phys. Rev. Lett. 72 (1994) 3456

courte (*closest approach*) entre la direction du lepton chargé et le vertex primaire (voir figure 3.4.1.c). La figure montre une distribution expérimentale qui a permis à la collaboration OPAL au LEP³⁵ de déterminer le temps de vie du méson B⁺.

Q. : quelle est la relation entre τ et la valeur moyenne de δ ? Montrer que le facteur de Lorentz γ n'apparaît pas dans la relation finale (pour $\gamma \gg 1$).

Les temps de vie du μ^+ et du μ^- ont été déterminés par les expériences g-2 (voir § 2.1). La comparaison de ces deux temps de vie est un test de la symétrie particule-antiparticule (théorème CPT, chapitre 4). On a (voir table PDG) :

$$\begin{aligned}\tau_\mu &= (2.19703 \pm 0.0004) \cdot 10^{-6} \text{ s} \\ \tau_{\mu^+} / \tau_{\mu^-} &= 1.00002 \pm 0.00008\end{aligned}$$

Comme vu précédemment, la largeur Γ d'une résonance donne de façon indirecte le temps de vie par la relation d'incertitude.

3.5 Le spin

Le spin est aussi une propriété intrinsèque de la particule. Les spins de l'électron, du proton et du neutron, ainsi que celui du photon ont été déterminés par des mesures de physique atomique et nucléaire avant 1930. Le photon a un spin 1, il s'agit d'un **boson**, c. à d. une particule obéissant à la statistique de Bose-Einstein. L'électron, le proton et le neutron sont des **fermions** de spin 1/2, particules qui satisfont aux règles de la statistique de Fermi-Dirac. Cette dernière est liée à la règle du principe d'exclusion de Pauli.

Q. : les valeurs possibles que l'on peut obtenir lors de la mesure de la composante z d'un moment cinétique $J=1$ sont ± 1 et 0 . Cela est-il valable pour le spin du photon ?

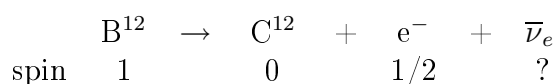
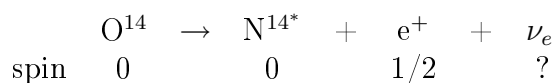
Il faut observer que la quantité conservée dans une réaction est le moment cinétique total \mathbf{J} , qui est la somme de la partie orbitale \mathbf{L} et du spin \mathbf{S} : $\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}$. On trouve que les valeurs propres de \mathbf{L} sont des valeurs entières (en unités de \hbar), tandis que les valeurs propres de \mathbf{S} peuvent être entières ou demi-entières. Une conséquence importante est que les fermions entrent en jeu toujours par **paire**, par exemple :

$$\begin{array}{ccccccc} & \pi^- & + & \text{p} & \rightarrow & \text{n} & + & \gamma \\ \text{spin} & 0 & & 1/2 & & 1/2 & & 1\end{array}$$

³⁵P.D. Acton et al. Phys. Lett. B307 (1993) 247

On détermine le spin des autres particules par la loi de conservation du moment angulaire.

Le spin du neutrino (de l'antineutrino) produit dans la désintégration β est de $1/2$:



Pour le muon, le schéma de désintégration $\mu \rightarrow e + \nu + \bar{\nu}$ suggère un spin $1/2$. L'étude de la structure fine du "**muonium**" (état μ^+e^-) a permis à Hughes *et al.* en 1960³⁶ de montrer définitivement qu'il s'agit d'une particule de spin $1/2$.

Le spin du pion a été déterminé par l'étude des processus :



Les sections efficaces de ces deux processus sont liées par le principe du "bilan détaillé" (voir § 1.1.4 et § 3.5.1 de la réf. 4). On trouve :

$$\sigma_T(p + p \rightarrow \pi^+ + d) = \frac{3}{2} \frac{|\mathbf{p}_\pi|^2}{|\mathbf{p}_p|^2} (2s_\pi + 1) \sigma_T(\pi^+ + d \rightarrow p + p) \quad (3.5.1)$$

Les résultats d'expériences indépendantes³⁷ sont compatibles avec la valeur de $s_\pi = 0$.

Pour le kaon, la désintégration en $K^+ \rightarrow \pi^+ + \pi^0$ fixe un spin entier. De plus, $K^0 \rightarrow \pi^0 + \pi^0$ montre que le spin du K doit être pair, car les pions de l'état final sont identiques et doivent être générés dans un état de moment angulaire orbital pair, pour satisfaire la statistique de Bose-Einstein. L'absence du mode $K^0 \rightarrow \pi^0 + \gamma$ indique que le Kaon a un spin 0.

Pour l'hypéron Λ , la désintégration $\Lambda^0 \rightarrow p + \pi^-$ indique que le spin est demi-entier.

³⁶V.W. Hughes et al. : Proceedings of the International Conference on High-energy Physics at CERN (1962) 473

³⁷R.Durbin et al. Phys. Rev. 83 (1951) 646

D.L. Clark et al. Phys. Rev. 83 (1951) 649

W.F. Cartwright et al. Phys. Rev. 91 (1953) 677

D'autres méthodes sont utilisées pour déterminer le spin. Par ex. la distribution angulaire des produits de désintégration d'une résonance est affectée par le spin (voir plus loin).

Q. : une particule se propage selon l'axe x. Quelle serait la distribution angulaire de ses produits de désintégration, si la particule a un spin=0 ?

La détermination de l'hélicité du neutrino mérite une discussion à part.

3.5.1 L'hélicité du neutrino

Pour une particule de spin 1/2 et de masse nulle, l'hélicité positive ou négative est une valeur indépendante de l'observateur. La particule se déplace à la vitesse de la lumière et il n'y a pas de repère d'inertie dans lequel cette vitesse change de direction.

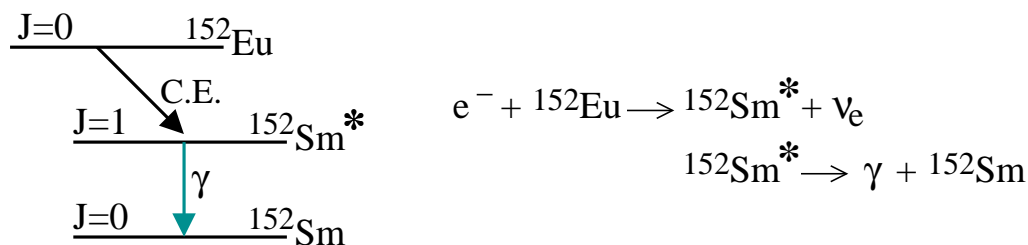


FIG. 3.5.1 – Schéma de la capture électronique dans l' ^{152}Eu

L'observation de la violation de la parité³⁸ dans la désintégration β avait suggéré en 1958 l'étude de l'hélicité des neutrinos. Le résultat de l'expérience de Goldhaber *et al.*³⁹ est que tout neutrino (ν électronique, dans l'expérience) a une hélicité négative. A l'opposé l'antineutrino a une hélicité positive. L'expérience est décrite dans la figure 3.5.3.

Dans la mesure de l'hélicité du ν_e , on utilise le processus de "Capture Electronique" (voir figure 3.5.1). Un e^- de la couche atomique K de l' ^{152}Eu ($Z=63$) est "absorbé" par un proton du noyau. Le processus donne un neutron plus un neutrino ν_e . Le noyau qui en résulte est le $^{152}\text{Sm}^*$ ($Z=62$) où l'étoile indique qu'il se trouve dans un état excité. La quantité de mouvement totale initiale étant nulle, le $^{152}\text{Sm}^*$ part en direction opposée au ν_e .

Le temps de vie du $^{152}\text{Sm}^*$ est de $(3.5 \pm 1.0)10^{-14}$ s. Ce noyau va se désexciter par émission d'un photon (transition de type E1) de 961 KeV (dans 10% des cas), (voir figure 3.5.3.b). Le noyau excité $^{152}\text{Sm}^*$ a une certaine vitesse dans le référentiel du laboratoire. Sa désexcitation est presque instantanée et l'agitation

³⁸Expérience de C.S. Wu et al., Phys. Rev. 105 (1957) 1413, sera expliquée plus loin

³⁹Helicity of Neutrinos. M. Goldhaber et al. Phys. Rev. 109 (1958) 1015

thermique n'a pas le temps de modifier sa vitesse. Dans ce même référentiel, le photon de 961 KeV est donc déplacé vers le rouge ou le bleu dans le spectre, suivant sa direction d'émission, par l'effet Doppler.

Prenons le cas d'un photon émis dans une direction opposée à celle du neutrino. Si l'on considère les deux possibilités pour l'hélicité de l'électron initial, du fait que la C.E. est faite sur une couche K ($L=0$) d'un atome avec un noyau de spin $J=0$, on obtient les deux situations de la figure 3.5.2. Les flèches minces représentent la vitesse et les flèches épaisses le spin. On voit que pour pouvoir compenser le spin de l' e^- , la polarisation du photon doit être telle que son hélicité a le même signe que celle du neutrino. Il nous reste donc à trouver une méthode pour :

- 1) sélectionner les désintégrations avec photon et neutrino à 180° (il s'agit donc des photons déplacés vers le bleu du spectre) ;
- 2) mesurer la polarisation du photon droite ou gauche.

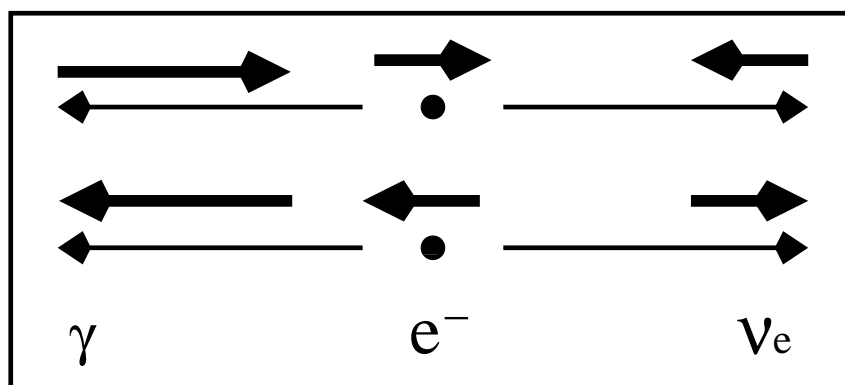


FIG. 3.5.2 – Hélicités du ν_e de recul et du γ de desexcitation e.m. selon la direction du spin de l' e^- capturé par le noyau d' ^{152}Eu

L'opération 2) est réalisée en interposant un polarimètre de Fe magnétisé (voir figure 3.5.3.a). Le spin des électrons libres est antiparallèle à la direction du champ B. En agissant sur la direction de B on favorise la diffusion Compton des photons de polarisation gauche ou droite. Le **pouvoir d'analyse** du polarimètre a été préalablement testé à l'aide d'une source de photons de polarisation connue. Dans l'expérience, la polarité de B était changée chaque 3 min., pour compenser des éventuels effets systématiques.

L'opération 1) est réalisée par la méthode de la “**diffusion résonnante**”. On détecte seulement les photons diffusés par une cible en ^{152}Sm . L'absorption par le niveau (très étroit) à 960 KeV est favorisée si le photon a gagné de l'énergie du fait du recul du noyau de Sm^* . Les photons déplacés vers le bleu sont donc favorisés comme demandé. Le niveau excité du Sm^* se désexcite par des émissions

de photons de 960 KeV ou $(960-122)=838$ KeV (figure 3.5.3.b).

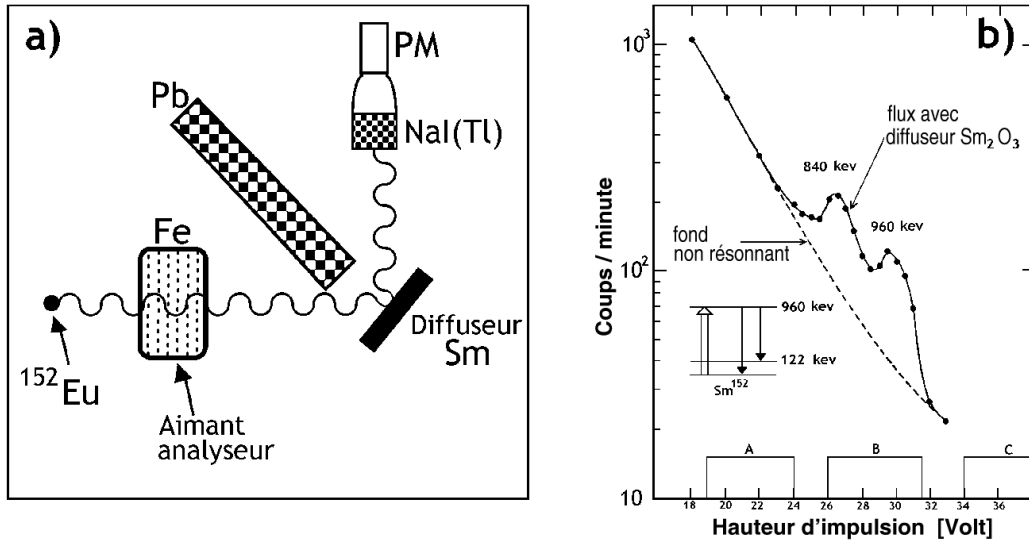


FIG. 3.5.3 – a) schéma de principe de l’expérience de Goldhaber *et al.*; b) spectre des photons mesurés dans le détecteur NaI. A et C : canaux tests ; B : canaux du signal attendu

Le résultat de l’expérience est donné sous la forme :

$$\delta = 2(N_- - N_+) / (N_- + N_+) = +0.017 \pm 0.003$$

où les N_{\pm} représentent les taux de comptage avec direction d’analyse du polarimètre positive ou négative. En tenant compte du pouvoir d’analyse, le résultat attendu pour une polarisation gauche de 100% des photons (et donc une hélicité négative des neutrinos) est $\delta = +0.025$ (à 10%). On en conclut que les photons de l’expérience sont polarisés à :

$$100 * 0.017 / 0.025 = 68 \pm 14\% \quad (3.5.2)$$

Ce résultat doit être comparé à la valeur zéro, qui correspondrait à une polarisation nulle. La signification statistique de ce résultat vaut donc de $68/14 \approx 5\sigma$. L’écart par rapport à 100% est due au fait que l’angle photon-neutrino n’est pas exactement de 180° . De plus l’agitation thermique peut changer la direction du recul du noyau dans l’intervalle de temps s’écoulant entre la CE et l’émission du photon.

On peut trouver une expression mathématique qui tue la composante droite (ou gauche) d’une particule de masse nulle.

Q. : soit $|\nu, \lambda = -\frac{1}{2}\rangle$ l’état du neutrino gaucher. Que vaut $P|\nu, \lambda = -\frac{1}{2}\rangle$?

Q. : montrer que $\frac{1}{2}(1 \pm \gamma^5)$ sont des projecteurs (se rapporter au § 2.5...).

3.6 Le moment magnétique dipolaire

On peut faire des mesures très précises des moments magnétiques. Il s'agit des mesures parmi les plus précises en physique.

Pour une particule ponctuelle (électron de Dirac) de spin \mathbf{s} , charge q , masse m , la valeur du **moment magnétique dipolaire** $\boldsymbol{\mu}$ est définie par :

$$\boldsymbol{\mu} = g \frac{q\hbar}{2mc} \mathbf{s} \quad (3.6.1)$$

g est le **facteur de Landé**. L'électron de Dirac a un $g=2$.

L'interaction du dipôle avec un champ \mathbf{B} induit un changement dans l'énergie du système. Dans le cas de fermions de spin $1/2$ et de moment $\boldsymbol{\mu}$, la dégénérescence est levée et les deux sous-états ont une séparation en énergie de :

$$\Delta E = 2\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B}, \quad \text{où} \quad B = |\mathbf{B}| \quad (3.6.2)$$

De plus le système subit la **précession de Larmor** autour de \mathbf{B} , avec une vitesse angulaire :

$$\omega_L = g \frac{q}{2mc} B = \gamma B \quad (3.6.3)$$

γ est le **rapport gyromagnétique**

$$\gamma = \boldsymbol{\mu} / \hbar \mathbf{s} \quad (3.6.4)$$

Dans le cas de particules non élémentaires (p, n, etc.), le moment magnétique est déterminé par la somme des moments magnétiques intrinsèques des composants, à laquelle s'ajoute une contribution due au mouvement orbital de ces composants. On trouve pour les fermions non élémentaires des valeurs de g très différentes de 2.

Dans le cas des leptons, les valeurs tabulées du moment magnétique sont généralement exprimées en magnéton de Bohr μ_B ; dans le cas des hadrons, elles le sont en magnéton nucléaire μ_N :

$$\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e c} \quad ; \quad \mu_N = \frac{e\hbar}{2M_p c} \quad (3.6.5)$$

où m_e = masse de l'électron et M_p = masse du proton.

3.6.1 Mesure du rapport gyromagnétique du proton γ_p

On met un échantillon de H_2 liquide (LH_2) dans un champ B . Les protons se séparent suivant leur état de spin $s_z = +1/2$ ou $-1/2$. Ces deux sous-états sont séparés par une énergie $2\mu_p B$. On peut engendrer une transition entre ces deux sous-états en appliquant un champ oscillant transversal de fréquence $\omega_R = 2\mu_p B$

(voir figure 3.6.1). Pour cette fréquence on observe un pic d'absorption de R.F. car les probabilités d'occupation de ces sous-états sont différentes, à l'équilibre thermique, l'énergie inférieure étant favorisée par le facteur : $\exp(2\mu_p B/kT)$. A la résonance on trouve ⁴⁰ $\gamma_p = \omega_R/B = (2.6752 \pm 0.00002)10^4 \text{ rad s}^{-1}\text{G}^{-1}$.

Exprimé en unités de magnéton nucléaire μ_N on obtient $\mu_p = 2.79$ pour le proton et $\mu_n = -1.91$ pour le neutron. Ces valeurs sont éloignées du résultat que l'on obtient par l'équation 3.6.1 (1 pour le proton et 0 pour le neutron), ce qui montre que ces nucléons ont une structure interne.

3.6.2 Détermination des anomalies de l'électron et du muon

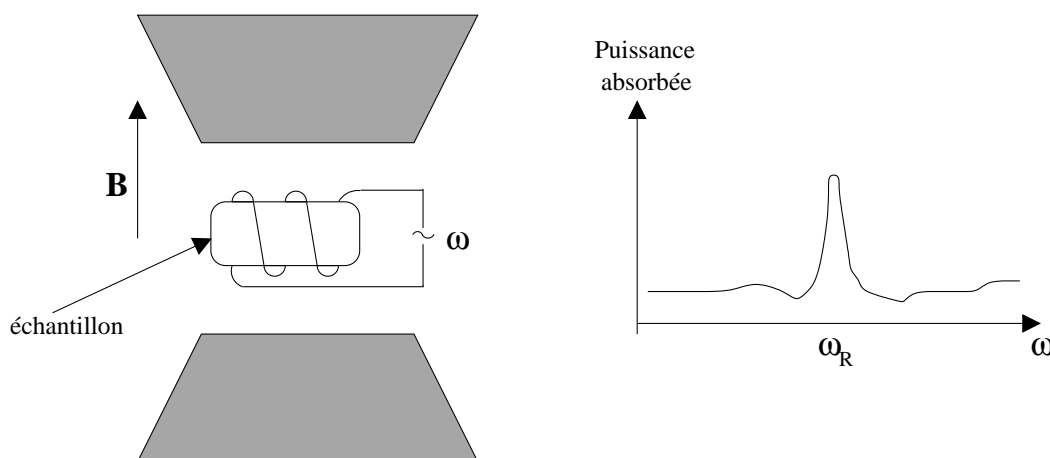


FIG. 3.6.1 – Dispositif pour la mesure de γ_p

La théorie de Dirac prévoit $g=2$ pour une particule ponctuelle. Toutefois, même dans ce cas, les **corrections radiatives** qu'on calcule en QED donnent une prédiction $g > 2$. Ces corrections tiennent compte des graphes **1** à **4** représentés dans la figure 3.6.2.

Le graphe **1** est la contribution de l'ordre le plus bas : le photon (c. à d., la sonde e.m. qui explore la particule) interagit avec la particule "ponctuelle". Toutefois, à tout instant, la particule ponctuelle peut émettre un photon virtuel. L'émission de celui-ci viole la conservation de l'énergie-impulsion et il doit être résorbé en un temps qui soit compatible avec la relation d'incertitude d'Heisenberg. D'où la possibilité d'un graphe du type **2** qui constitue une **correction radiative**. La probabilité d'émission de ce photon est proportionnelle à $\alpha_{em} (\approx 1/137)$. Chaque photon échangé supplémentaire (ex. : graphe **3**) amène un facteur multiplicatif

⁴⁰R.L. Driscoll et P.L. Bender Phys. Rev. Lett. 1 (1958) 413.

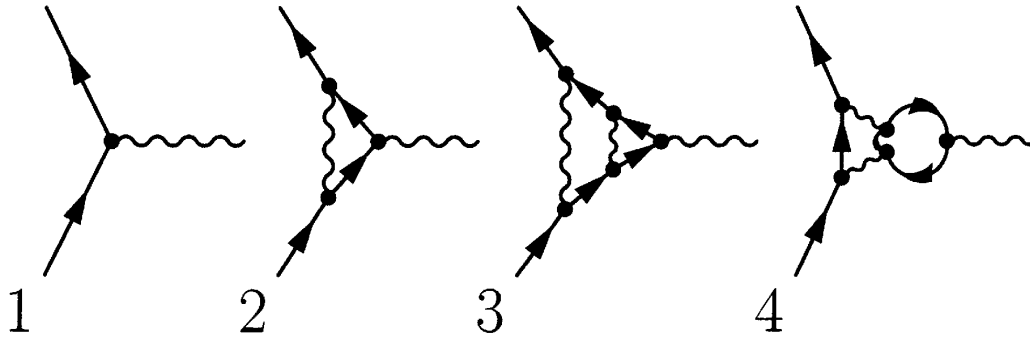


FIG. 3.6.2 – **1** : couplage e.m. à une particule chargée ; **2** : correction radiative à l'ordre α_{em} ; **3** et **4** : corrections de deuxième ordre ; **4** est la “polarisation du vide”

α_{em} . Le graphe **4** contient une boucle électron-positron polarisée (comme les molécules polaires de H_2O sont polarisées par un champ créé par une charge q), on parle de **polarisation du vide**. Cette contribution constitue une sorte d'écran à la particule nue (de la même façon que les molécules d'eau réduisent le potentiel associé à une charge q immergée, par un facteur $\epsilon=78$). La valeur de g est donc modifiée par les corrections radiatives. On exprime la valeur théorique de l'**anomalie** $A_\ell = (g_\ell - 2)/2$ où ($\ell = e, \mu$) sous la forme d'une série en puissances de $a = \alpha_{em}/\pi$:

Pour l'électron : $(g-2)/2 = 0.5a - 0.32848a^2 + 1.19a^3 + \dots = (1159652.2 \pm 0.2)10^{-9}$
 valeur mesurée (PDG) : $(1159652.188 \pm 0.004)10^{-9}$

Pour le muon : $(g-2)/2 = 0.5a + 0.76578a^2 + 24.45a^3 + \dots = (1165916 \pm 6)10^{-9}$
 valeur mesurée (PDG) : $(1165923 \pm 8)10^{-9}$

Dans le cas du muon on a tenu compte de corrections “hadroniques” de l'ordre de 10^{-6} .

La mesure de l'anomalie des leptons chargés peut se faire avec grande précision du fait du petit écart de g par rapport à 2.

Dans un champ magnétique B un électron ou un muon a une trajectoire spiralee, caractérisée par la fréquence cyclotronique :

$$\nu = \omega_c/2\pi, \quad \omega_c = \frac{e}{mc}B$$

Supposons d'autre part ces leptons polarisés, leur spin étant parallèle ou anti-parallèle à leur vitesse. On les injecte dans l'appareillage où règne un champ B perpendiculaire à la direction du faisceau. A la rotation cyclotronique de vitesse angulaire ω_c va s'ajouter la précession de Larmor du moment magnétique, de vitesse angulaire :

$$\omega_L = (g/2)\omega_c$$

Donc : si $g=2$, après chaque tour, la direction de la polarisation par rapport à la direction du mouvement sera la même qu' à l'injection. Si $g = 2(1+A_\ell)$, une phase δ va s'ajouter :

$$\delta = (\omega_L - \omega_c)t = A_\ell eBt/mc$$

Dans le cas de l'électron, on utilise la méthode de "double diffusion". Un faisceau d'électrons finement collimaté est dirigé sur une cible d'Au et on sélectionne les électrons diffusés à 90° . Ceux-ci sont partiellement polarisés perpendiculairement au plan de diffusion (diffusion polarisante). Ils sont amenés à "spiraler" dans une bouteille magnétique ($B = 1\text{kG}$) et au bout d'un certain temps en sont extraits pour être diffusés sur une seconde cible d'Au (diffusion analysante). Les mesures de la direction de la polarisation et de la direction de propagation des électrons à la sortie du champ magnétique permettent de déterminer déphasage δ , d'où l'on déduit la valeur de l'anomalie.

Dans le cas du muon, on utilise les propriétés particulières de la désintégration faible. On part d'un faisceau de π^\pm se désintégrant en $\pi^\pm \rightarrow \mu^\pm \nu_\mu(\bar{\nu}_\mu)$. Dans le référentiel de repos du pion (spin 0), le muon et le neutrino sont émis dos à dos avec des hélicités opposées. Or, on a vu que le neutrino a exclusivement une hélicité négative. La conservation du moment cinétique implique aussi une hélicité négative pour le μ^+ (figure 3.6.3.a)⁴¹.

Prenons par exemple le cas de π^+ se désintégrant en vol, on peut obtenir des muons polarisés négativement si l'on sélectionne ceux dont l'énergie est maximale. Dans ce cas, le muon a été émis parallèlement au faisceau (et le neutrino anti-parallèlement). Dans l'expérience de Bailey *et al.* (voir § 2.8), seule une fraction $2 \cdot 10^{-3}$ des muons ayant la bonne quantité de mouvement est stockée dans l'anneau supraconducteur où s'effectue la précession. En utilisant à nouveau les propriétés de la désintégration faible, on peut mesurer la polarisation des μ^+ au temps t de leur désintégration en $\mu^+ \rightarrow e^+ \bar{\nu}_\mu \nu_e$. Dans le référentiel de repos du muon, le spectre d'énergie du positron a une valeur maximale de $\approx m_\mu/2$. Cela correspond à la situation dans laquelle les deux neutrinos sont émis parallèlement et en direction opposée au positron. Si l'on sélectionne les positrons d'énergie maximale, on s'assure d'être dans la configuration susmentionnée et d'avoir les positrons émis parallèlement au faisceau. La somme des hélicités du neutrino et de l'antineutrino s'annule; pour conserver le moment cinétique, le positron doit donc avoir une hélicité dirigée comme celle du muon, figure 3.6.3 b) ou c).

En b) on a la situation au moment où le pion s'est désintégré. Si l'on considère un temps t correspondant à une précession de 180° , c'est la situation en c) qui se présente. L'interaction faible favorise la désintégration où le positron est émis dans la direction de polarisation du μ^+ ; on montre que $\text{Prob}_\mu^\pm(\theta) \propto 1 \pm \cos(\theta)$, où

⁴¹L'hélicité de μ^- serait positive.

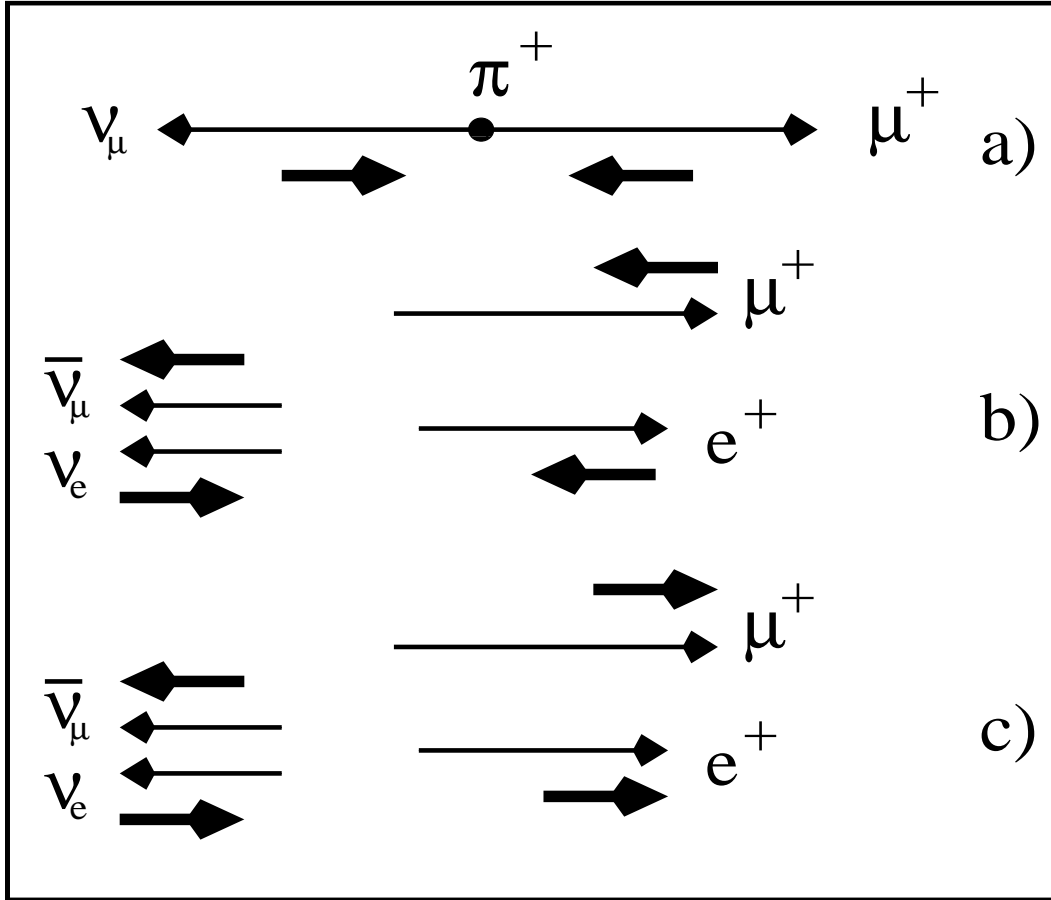


FIG. 3.6.3 – a) : le π^+ , boson de spin 0, se désintègre en un muon d'hélicité négative ; b) : désintégration du muon qui n'a pas subi de précession et c) : après renversement du spin

θ est l'angle entre la direction de la polarisation du muon et la direction d'émission du positron (électron). D'où la modulation attendue dans le nombre de positrons d'énergie maximale que l'on mesure par des scintillateurs situés sur le pourtour de l'anneau de stockage (voir figure 2.1.5). On paramétrise ce nombre par :

$$N(t) = N_0 \exp(-t/\tau)[1 - A \cos(2\pi\nu_a t + \phi)] \quad \text{où} \quad 2\pi\nu_a = \omega_L - \omega_c$$

L'ajustement aux valeurs mesurées (voir figure 2.1.6) permet de déterminer ν_a d'où la valeur de l'anomalie du muon.

4 Symétries et lois de conservation

4.1 Introduction

Les symétries et les lois de conservation sont des instruments de travail précieux pour le physicien, en particulier pour le physicien des particules ⁴². Ces concepts sont utilisés en spectroscopie atomique, nucléaire et hadronique. Chaque état est classé en termes de “bons” nombres quantiques (p. ex. le moment cinétique J) qui sont associés à des observables conservées. Ces observables commutent avec l’Hamiltonien qui décrit l’évolution du système. En 1917 Emmy Noether a publié son théorème qui associe les concepts de symétrie et de conservation.

Qu’est ce qu’une symétrie ? Dès que les propriétés d’un système sont indiscernables lorsque ce système est soumis à des changements objectifs (rotation, translation, etc.) on parle de symétrie. Donc il s’agit d’une situation de “non mesurabilité”.

Prenons le cas d’un potentiel d’interaction entre deux particules, situées en \mathbf{r}_1 et \mathbf{r}_2 par rapport à un observateur O . On considère le cas d’un potentiel central : $V(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = V(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$. Pour l’observateur O' , déplacé du vecteur \mathbf{x} par rapport à O , on obtient : $V(\mathbf{x} + \mathbf{r}_1, \mathbf{x} + \mathbf{r}_2) = V(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$. Ce résultat coïncide avec celui obtenu par l’observateur O . Donc, on ne peut pas distinguer ces deux observateurs sur la base de leur mesure de V . On peut considérer O' une fois en \mathbf{r}_1 et une fois en \mathbf{r}_2 et calculer $\mathbf{F}_1 = -dV/d\mathbf{r}_1 = -dV/d(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) = \dots = -\mathbf{F}_2$ ce qui amène à la conclusion triviale que la somme des forces sur ce système isolé s’annule : $\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = 0$. Si la somme des forces est nulle, on a aussi (*lex II*) : $d\mathbf{p}/dt = 0$, donc $\mathbf{p} = \text{cte}$, c’est-à-dire \mathbf{p} est conservé.

En conclusion : le fait de ne pas pouvoir situer ce système de façon absolue dans l’espace est équivalent à dire que les propriétés physiques du système sont invariantes par translation. Cela se traduit par la conservation de la quantité de mouvement du système. On peut résumer cela par l’organigramme suivant :

Non mesurabilité de la position absolue \Leftrightarrow Invariance par translation dans l’espace



Conservation de la quantité de mouvement

On va maintenant se concentrer sur la description quantique. On a alors des symétries de type spatio-temporelles (translation dans l’espace-temps, rotation,...) mais aussi des symétries “internes” (conjugaison de charge, isospin,...).

Dans l’exemple précédent, on a opéré sur la position de l’observateur, par une redéfinition du système de coordonnées : $O \rightarrow O'$, le système des deux particules restant inchangé. On dit qu’on a effectué une transformation “**passive**”.

⁴²Voir références 10 et 12

On serait arrivé aux mêmes conclusions si l'on avait considéré l'observateur fixe et l'on avait fait subir une translation \mathbf{x} au système étudié (les résultats physiques obtenus au LEP sont invariants par translation du LEP p. ex. sur une planète en orbite autour de β Orionis). On parle dans ce cas de transformation “**active**”.

Considérons une transformation passive $O \rightarrow O'$ (par exemple une translation $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}' = \mathbf{x} + \mathbf{a}$ que l'on symbolise par :

$$\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}' = f(\mathbf{x}) \quad (4.1.1)$$

Soit $\psi(\mathbf{x})$ l'état du système physique en \mathbf{x} pour l'observateur O. L'état de ce système en \mathbf{x}' pour l'observateur O' est défini par la fonction transformée $\psi'(\mathbf{x}')$ telle que :

$$\psi'(\mathbf{x}') = \psi(\mathbf{x}) \quad (4.1.2)$$

Si l'on inverse 4.1.1 :

$$\mathbf{x} = f^{-1}(\mathbf{x}') \quad (4.1.3)$$

on peut écrire :

$$\psi'(\mathbf{x}') = \psi(f^{-1}(\mathbf{x}')) \quad (4.1.4)$$

\mathbf{x}' est quelconque, donc on peut laisser tomber les primes sur \mathbf{x} :

$$\psi'(\mathbf{x}) = \psi(f^{-1}(\mathbf{x})) \quad (4.1.5)$$

Cela suggère une nouvelle interprétation de la transformation : $\psi'(\mathbf{x})$ est maintenant, pour l'observateur O, la fonction d'onde du système “activement” transformé (déplacé, tourné,...).

En principe, les transformations active et passive sont équivalentes. Dans un espace isotrope, si l'on effectue p. ex. la rotation R (active) d'un objet S et simultanément on imprime la même rotation R (transformation passive) de l'observateur O, O ne rendra pas compte du changement sur S. Par contre, si l'espace n'est pas isotrope vis à vis de l'objet S, O constatera un changement de configuration.

On décrit la transformation (active) par un opérateur **U unitaire**⁴³ qui dépend de la transformation f :

$$\psi' = U\psi \quad (4.1.6)$$

L'unitarité permet de conserver la norme de ψ :

$$\langle U\psi \mid U\psi \rangle = \langle \psi \mid \psi \rangle \quad U^\dagger U = 1 \quad U^{-1} = U^\dagger \quad (4.1.7)$$

⁴³Voir référence 12.

Par la transformation f , l'observable A devient l'observable A' dont l'espérance mathématique pour l'état ψ' est identique à celle de A pour l'état ψ :

$$\langle \psi | A | \psi \rangle = \langle \psi' | A' | \psi' \rangle \quad (4.1.8)$$

Q. : montrer que :

$$A' = UAU^\dagger \quad (4.1.9)$$

Si f est une symétrie vis à vis de A , c'est à dire si A est invariante sous f , $A'=A$, on obtient $A' = UAU^\dagger$ et $UA = AU$.

Donc A commute avec U :

$$[U, A] = 0 \quad (4.1.10)$$

Avant de passer au traitement des différentes symétries, remarquons qu'on considère souvent des **transformations infinitésimales** : (translation, rotation,...) ce qui simplifie les calculs. On peut ensuite intégrer pour obtenir la transformation finie.

“We will go to Asgard... now”, (Thor) said. At that moment he raised his hand as if to pluck an apple, but instead of plucking he made a tiny, sharp turning movement. The effect was as if he had twisted the entire world through a billionth part of a degree. Everything shifted, was for a moment minutely out of focus, and then snapped back again as a suddenly different world. This world was a much darker one and colder still.⁴⁴

4.2 Etats, opérateurs et symétries

Cette section porte sur l'action d'un opérateur qui représente une symétrie possible du système vis à vis d'une observable O . Par exemple, une balle blanche est invariante par rotation, si l'observable est la couleur.

Soient :

- ψ : l'état du système ;
- O : une observable associée à un détecteur et à un expérimentateur (typiquement : l'énergie du système, son Hamiltonien) ;
- U : une opération du type rotation, translation, parité, ... et telle que $U^\dagger U = 1$.

Que l'opération U soit associée à une symétrie ou non (il faut néanmoins des conditions du type : isotropie de l'espace, etc...), si l'on transforme le système : $\psi' = U\psi$ et simultanément le détecteur : $U(O) = O' = UOU^\dagger$, le résultat de l'expérience reste inchangé.

En effet :

⁴⁴Douglas Adams : The Long Dark Tea-time of the Soul.

$$(\text{mesure de } O' \text{ pour } \psi') = \langle \psi' | O' | \psi' \rangle = \langle U\psi | UO'U^\dagger | U\psi \rangle$$

ce qui s'écrit aussi :

$$(\psi^\dagger U^\dagger UO'U^\dagger U\psi) = (\psi^\dagger \mathbb{1} O' \mathbb{1} \psi) = (\psi^\dagger O' \psi)$$

avec $(\psi, \varphi) = \int d^3x \psi^*(\mathbf{x})\varphi(\mathbf{x})$, ψ et φ appartenant à l'espace de Hilbert des états.

On obtient donc : $\langle \psi' | O' | \psi' \rangle = \langle \psi | O | \psi \rangle$, comme prévu.

Un test d'invariance (c. à d. de symétrie) peut se faire de deux façons :

- a) on fixe le détecteur O et on bouge le système $\psi \rightarrow \psi' \quad O \rightarrow O$
- b) on fixe le système et on bouge O (en sens inverse) $\psi \rightarrow \psi \quad O \rightarrow O''$

avec O'' donné par $U^{-1}(O) \equiv U^\dagger O U$:

a) et b) sont équivalents (si l'espace est isotrope, etc.) $\langle \psi' | O | \psi' \rangle = \langle \psi | O'' | \psi \rangle$

En effet :

$$\langle \psi' | O | \psi' \rangle = (\psi^\dagger U^\dagger O U \psi) = \psi^\dagger (U^\dagger O U) \psi = \langle \psi | O'' | \psi \rangle$$

Si l'on a une situation de symétrie, alors :

$$\begin{aligned} \langle \psi' | O | \psi' \rangle &= \langle \psi | O'' | \psi \rangle = \langle \psi | O | \psi \rangle = \langle \psi | O' | \psi \rangle \\ [U, O] &= 0 \end{aligned}$$

4.3 Invariance par translation dans l'espace, par translation dans le temps et par rotation dans l'espace

4.3.1 La translation dans l'espace

Considérons un objet décrit par sa fonction d'onde $\psi(\mathbf{x})$. Une translation infinitésimale $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x} + \delta\mathbf{x}$, à l'ordre $O(\delta\mathbf{x})$, s'exprime par (Cf. 4.1.5) :

$$\psi' \equiv \psi(\mathbf{x} - \delta\mathbf{x}) \cong (1 - \delta\mathbf{x} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}) \psi(\mathbf{x}) = (1 - i\delta\mathbf{x} \cdot \mathbf{p}) \psi(\mathbf{x}) \quad (4.3.1)$$

en unités naturelles $\mathbf{p} \equiv -i\nabla$. On peut donc introduire l'opérateur de translation infinitésimale :

$$D(\delta\mathbf{x}) \equiv 1 - i\delta\mathbf{x} \cdot \mathbf{p} \quad (4.3.2)$$

Une translation finie \mathbf{X} peut se décomposer en N petits pas $\delta\mathbf{x} = \mathbf{X}/N$:

$$D(\mathbf{X}) \equiv D(\delta\mathbf{x})^N = (1 - i\delta\mathbf{x} \cdot \mathbf{p})^N \approx 1 - iN\delta\mathbf{x} \cdot \mathbf{p} + \frac{(iN\delta\mathbf{x} \cdot \mathbf{p})^2}{2!} - \frac{(iN\delta\mathbf{x} \cdot \mathbf{p})^3}{3!} + \dots$$

ce qui donne :

$$D(\mathbf{X}) \equiv \exp(-i\mathbf{X} \cdot \mathbf{p}) \quad (4.3.3)$$

Revenons au cas infinitésimal $D(\delta\mathbf{x})$ que l'on va écrire D pour alléger les équations.

L'invariance par translation signifie qu'il est impossible par la mesure du système de différencier les états de celui-ci avant et après la translation. Cela se traduit par l'invariance de l'énergie du système, globalement déplacé de $\delta\mathbf{x}$. L'Hamiltonien H doit satisfaire à :

$$H(\mathbf{x}) = H(\mathbf{x} - \delta\mathbf{x}) \quad (4.3.4)$$

Appliquons l'opérateur D sur l'état $\phi(\mathbf{x}) = H(\mathbf{x})\psi(\mathbf{x})$:

$$D(H(\mathbf{x})\psi(\mathbf{x})) = D\phi(\mathbf{x}) = \phi(\mathbf{x} - \delta\mathbf{x}) = H(\mathbf{x} - \delta\mathbf{x})\psi(\mathbf{x} - \delta\mathbf{x}) = H(\mathbf{x})\psi(\mathbf{x} - \delta\mathbf{x}) = H(\mathbf{x})D\psi(\mathbf{x})$$

où on a utilisé 4.2.4.

On en tire :

$D(H(\mathbf{x})\psi(\mathbf{x})) = H(\mathbf{x})D\psi(\mathbf{x})$ d'où $(DH(\mathbf{x}) - H(\mathbf{x})D)\psi(\mathbf{x}) = 0$, pour une fonction d'onde $\psi(\mathbf{x})$ quelconque, donc :

$$[D, H] = 0 \quad (4.3.5)$$

D commute avec l'Hamiltonien, ce qui est une façon équivalente d'indiquer que D laisse invariant l'Hamiltonien (voir 4.1.10). En substituant 4.2.3 dans 4.2.5, on obtient la loi de **conservation de la quantité de mouvement** :

$$[\mathbf{p}, H] = 0 \quad (4.3.6)$$

En conclusion : on a exprimé l'invariance de H lors d'une translation du système, ce qui constitue une symétrie (de translation). Cela nous a conduit à la loi de conservation de \mathbf{p} .

Reprenons le cas général d'une transformation unitaire infinitésimale de paramètre δ , $U(\delta)$, que l'on exprime par :

$$U(\delta) = 1 + i\delta G + O(\delta^2) \quad (4.3.7)$$

G est appelé le **générateur** de la transformation. On peut remonter à la transformation finie $\Delta + \delta$:

$$U(\Delta + \delta) = (1 + i\delta G)U(\Delta) \quad (4.3.8)$$

$$[U(\Delta + \delta) - U(\Delta)]/\delta = iGU(\Delta) \quad (4.3.9)$$

$$\text{A la limite } \delta \rightarrow 0 : \frac{dU(\Delta)}{d\Delta} = iGU(\Delta) \quad (4.3.10)$$

L'intégration donne :

$$U(\Delta) = \exp(iG\Delta) + C \quad (4.3.11)$$

la constante C peut être choisie égale à 0 pour satisfaire la contrainte $U(0)=1$. La transformation U doit être unitaire :

$$U^\dagger U = 1 \quad \Rightarrow \quad 1 - i\delta(G^\dagger - G) + O(\delta^2) = 1 \quad (4.3.12)$$

Cela montre que $G^\dagger = G$, G est Hermitique, une caractéristique des **observables**.

D'autre part, si U commute avec H (H invariant sous U), G commute aussi avec H :

$$[G, H] = 0 \quad (4.3.13)$$

Donc l'observable G est une constante en fonction du temps. Dans cette terminologie l'opérateur quantité de mouvement est appelé le **générateur des translations** dans l'espace.

4.3.2 La translation dans le temps

Considérons maintenant un changement de l'origine de l'échelle temporelle et admettons que le système physique fini soit indifférenciable après une translation dans le temps. On n'a donc pas la possibilité de déterminer une origine absolue du temps à partir des caractéristiques du système. L'Hamiltonien ou le Lagrangien qui décrivent le système ne dépendent pas explicitement de t : $\frac{\partial H}{\partial t} = 0$. Donc H est une constante. Cela n'est rien d'autre que l'expression de la **conservation de l'énergie** du système. L'Hamiltonien H est l'opérateur associé à la translation dans le temps.



Early archaeologists

4.3.3 La rotation dans l'espace

L'invariance par rotation signifie que les états d'un système de particules avant et après la rotation sont indiscernables. On va montrer que l'invariance par rotation est associée à la conservation du moment angulaire. On considère le cas d'une particule sans spin mais, sans le prouver, on peut affirmer que les conclusions sont généralisables au cas d'une particule avec spin.

Une rotation infinitésimale $\delta\theta$ autour de l'axe z est représentée par la matrice M :

$$\text{Rotation : } \mathbf{x} \mapsto M\mathbf{x} \quad M \equiv \begin{pmatrix} \cos \delta\theta & -\sin \delta\theta & 0 \\ \sin \delta\theta & \cos \delta\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 1 & -\delta\theta & 0 \\ \delta\theta & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.3.14)$$

On introduit l'opérateur R_z qui transforme l'état ψ :

$$R_z(\delta\theta)\psi(\mathbf{x}) \equiv \psi(M^{-1}\mathbf{x}) = \psi(x + y\delta\theta, -x\delta\theta + y, z) \cong \psi(\mathbf{x}) + \delta\theta(y\partial_x - x\partial_y)\psi(\mathbf{x})$$

L'expression entre parenthèse du dernier terme est proportionnelle à la composante selon l'axe z de l'opérateur moment angulaire

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} : L_z \equiv i(y\partial_x - x\partial_y), \text{ ce qui donne } (i^2 = -1)$$

$$R_z(\delta\theta)\psi(\mathbf{x}) = (1 - i\delta\theta L_z)\psi(\mathbf{x}).$$

On peut généraliser à une rotation autour de l'axe \mathbf{n} , $|\mathbf{n}| = 1$:

$$R_{\mathbf{n}}\psi(\mathbf{x}) = (1 - i\delta\theta_{\mathbf{n}}\mathbf{L} \cdot \mathbf{n})\psi(\mathbf{x}) \quad (4.3.15)$$

Appliquons cet opérateur à l'état $\phi(\mathbf{x}) = H(\mathbf{x})\psi(\mathbf{x})$ (on note $\mathbf{x}' = M^{-1}\mathbf{x}$) :

$$\begin{aligned} R_{\mathbf{n}}(H(\mathbf{x})\psi(\mathbf{x})) &= R_{\mathbf{n}}\phi(\mathbf{x}) = \phi(\mathbf{x}') = H(\mathbf{x}')\psi(\mathbf{x}') \\ &= H(\mathbf{x})\psi(\mathbf{x}') = H(\mathbf{x})R_{\mathbf{n}}\psi(\mathbf{x}) \end{aligned} \quad (4.3.16)$$

où on a fait usage de la condition d'invariance :

$$H(\mathbf{x}) = H(\mathbf{x}')$$

Comme prévu :

$$[R_{\mathbf{n}}, H] = 0 \quad \text{ce qui est équivalent à} \quad [\mathbf{L}, H] = 0 \quad (4.3.17)$$

car la rotation est quelconque.

Si l'on considère les particules avec spin, on peut substituer à 4.2.8 :

$$R_{\mathbf{n}}\psi(\mathbf{x}) = (1 - i\delta\theta_{\mathbf{n}}\mathbf{J} \cdot \mathbf{n})\psi(\mathbf{x}) \quad (4.3.18)$$

où ψ contient en plus l'information sur le spin de la particule et $\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}$.

C'est en effet, le moment cinétique total qui est conservé :

$$[\mathbf{J}, H] = 0 \quad (4.3.19)$$

\mathbf{J} joue le rôle de générateur de la rotation.

Remarque : au Chap. 9 on verra une autre sorte de symétrie, dite invariance de jauge. L'invariance de jauge e.m. implique la conservation de la charge e.m..

4.4 La parité

Nous allons maintenant considérer le cas des symétries discrètes : parité, conjugaison de charge, renversement du temps...

La transformation par parité d'un système de particules est définie par l'opération :

$$P : \mathbf{x}_i \mapsto -\mathbf{x}_i \quad (4.4.1)$$

où i numérote les particules. Il s'agit d'une symétrie par rapport à l'origine du repère. Le quadrivecteur (t, \mathbf{x}) se transforme donc en $P(t, \mathbf{x}) \equiv (t, -\mathbf{x}) : P \equiv \text{diag}(1, -1, -1, -1)$.

Remarquez qu'en coordonnées polaires $x = R \sin \theta \cos \phi$, $y = R \sin \theta \sin \phi$, $z = R \cos \theta$, la transformation se traduit par $R' = R$, $\theta' = \pi - \theta$, $\phi' = \pi + \phi$.

Il est clair que :

$$P^2 = \text{identité.} \quad (4.4.2)$$

(les éléments du groupe "parité" sont donc P et $P^2=I$).

Q. : se convaincre que l'on ne peut pas réduire P à une rotation ; montrer que P est équivalente à une réflexion dans un miroir plan suivie d'une rotation.

Q. : quel est le comportement sous P de la quantité de mouvement \mathbf{p} , du moment angulaire orbital $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$, du spin \mathbf{S} , des champs \mathbf{E} et \mathbf{B} , du temps, d'un quadrivecteur, de la charge électrique Q , du produit scalaire $\mathbf{S} \cdot \mathbf{p}$?

L'opération P équivaut, à une rotation près, à échanger la droite et la gauche. Donc, si le système observé est invariant sous les rotations, l'étude de son comportement sous P est équivalent à l'étude de son comportement sous une réflexion.

On peut se demander si la distinction entre la droite et la gauche a une valeur universelle... ? Sur terre, il est clair que les organismes vivants ont effectué un choix ; toutefois cela pourrait être dû aux "conditions initiales" présentes lors de la naissance de la vie. Par exemple, la brisure de la symétrie pourrait s'expliquer par le fait que les premiers organismes se sont formés à partir des molécules orientées sous l'effet du champ magnétique terrestre, ou sous l'influence de la rotation de la terre,... On peut même imaginer une situation totalement symétrique, à l'origine. Le premier organisme a décidé qu'il serait dextrogire. La progéniture n'a pas eu de choix. Toutefois on peut imaginer qu'en moyenne la vie dans l'Univers est tout à fait démocratique : il y a autant de civilisations qui se saluent en se serrant la main (ou tentacule, ou pince, ou...) gauche que de civilisations qui se serrent la droite.

Pour un système de particules invariant sous la parité, on a :

$$H(\{\mathbf{x}'_i\}) \equiv H(P\{\mathbf{x}_i\}) = H(\{\mathbf{x}_i\}) \quad (4.4.3)$$

Il s'agit d'une symétrie exacte (dans la limite de la précision expérimentale) pour les interactions e.m. et forte, mais qui est **violée par l'interactions faible**. Donc, la Nature fait une différence entre la droite et la gauche.

Considérons maintenant la situation où la parité est une bonne symétrie. Prenons le cas d'une particule définie par la fonction d'onde ψ . On introduit l'opérateur :

$$P\psi(\mathbf{x}, t) = P_a\psi(-\mathbf{x}, t) \quad (4.4.4)$$

A priori, la valeur P_a dépend de la particule : on introduit des valeurs indexées par le nom de la particule en question : $P_\gamma, P_\pi, P_p, \dots$. La condition 4.3.2 implique que les valeurs de P_a possibles sont $+1$ et -1 . On appelle P_a la **parité intrinsèque** de la particule, car elle caractérise la particule au repos.

Q. : montrer que la fonction d'onde d'une particule au repos est un vecteur propre de P avec valeur propre P_a .

Montrer que si la particule a un moment orbital défini (caractérisé par le nombre quantique L), sa fonction d'onde est aussi un vecteur propre de P avec la valeur propre $P_a(-1)^L$: $P\psi_{nlm}(\mathbf{x}, t) = P_a(-1)^L\psi_{nlm}(\mathbf{x}, t)$.

La généralisation à plusieurs particules en $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots$ est :

$$P\psi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, t) = P_1P_2\dots\psi(-\mathbf{x}_1, -\mathbf{x}_2, \dots, t) \quad (4.4.5)$$

Donc, pour les particules 1 et 2 dans un état de moment angulaire orbital L on obtient :

$$P\psi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, t) = P_1P_2(-1)^L\psi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, t) \quad (4.4.6)$$

Pour un système caractérisé par son hamiltonien H , l'invariance sous P implique que :

$$[H, P] = 0 \quad (4.4.7)$$

La conservation de la parité signifie que la parité de la fonction d'onde qui décrit le système est invariante au cours du temps. P est une constante du mouvement, même si les particules constituant ce système interagissent et se transforment en d'autres particules. Cette conclusion est vérifiée pour les interactions forte et e.m. ; ce n'est pas le cas pour l'interaction faible.

Les arguments qu'on a appliqué aux générateurs des transformations continues ne sont plus valables dans le cas d'une transformation discrète. Toutefois, si P est l'opérateur parité, il doit satisfaire $(P)^2 = I$. Donc, de par l'unitarité de P , $PP^\dagger = I$; on déduit que $P = P^\dagger$, c. à. d. qu'il s'agit d'un opérateur Hermitique et il peut être assimilé à une observable. D'où les valeurs propres P_a . Ces considérations s'appliquent aux symétries du type $U^2 = I$ (conjugaison de charge C , "parité G ",...), mais pas à l'inversion du temps T .

On a les dénominations suivantes, en fonction du comportement de la grandeur sous P :

Scalaire	$P(s)$	=	s
Pseudoscalaire	$P(p)$	=	$-p$
Vecteur (polaire)	$P(\mathbf{v})$	=	$-\mathbf{v}$
(Pseudo)vecteur (axial)	$P(\mathbf{a})$	=	\mathbf{a}

Une particule de spin 0 est dite scalaire si sa parité est positive ($J^{\text{parité}} = 0^+$) et pseudoscalaire si sa parité est négative (0^-), etc...

De même pour un 4-vecteur, on a :

4-vecteur: (scalaire, vecteur)	\rightarrow	(scalaire, $-\mathbf{vecteur}$)
pseudo 4-vecteur: (pseudoscalaire, vecteur axial)	\rightarrow	($-\text{pseudo scalaire}$, vecteur axial)

- Dans le processus $a + b \rightarrow a + b + c$ où P est conservée, on obtient la parité de c si l'on connaît les moments angulaires orbitaux L de $a + b$ et ℓ de $a + b + c$. On doit avoir :

$$P_a P_b (-1)^L = P_a P_b P_c (-1)^\ell \quad \text{ce qui donne : } P_c = (-1)^{L+\ell}$$

C'est un cas privilégié pour déterminer la parité d'une particule.

- Si par contre la particule c est **toujours** produite en association avec une particule d , seule la **parité relative** $P_c \cdot P_d$ pourra être déterminée.

On a la règle générale :

pour les fermions	:	$P_{\text{particule}} = -P_{\text{antiparticule}}$
pour les bosons	:	$P_{\text{particule}} = +P_{\text{antiparticule}}$

Q. : si ψ est un double spineur de Dirac, montrer que $P\psi(r, t) = \gamma^0\psi(-r, t)$. Que vaut le courant de Dirac $J^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ transformé sous l'opération P ? Et $A^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\psi$?

4.4.1 Parité des leptons

Particule et antiparticule apparaissent dans un même double spineur en tant que solutions de l'équation de Dirac. On trouve que pour une paire de fermion-antifermion :

$$P_f P_{\bar{f}} = -1 \tag{4.4.8}$$

Pour tester cela on doit faire recours à l'interaction e.m., car les leptons ne sont pas affectés par l'interaction forte (IF) et, comme on l'a mentionné, l'interaction faible (WI) viole la parité. L'étude de l'annihilation du parapositronium (e^+ et e^- liés, avec un moment angulaire orbital $L=0$), $e^+e^- \rightarrow \gamma\gamma$, a montré que 4.3.8 est valable pour le système e^+e^- . D'autre part on ne peut pas déterminer les parités intrinsèques du e^+ et du e^- en jouant sur d'autres réactions car on a toujours un nombre pair de leptons en jeu : $e^+e^- \rightarrow e^+e^-$, $e^+\gamma \rightarrow e^+\gamma$, ... En conséquence la parité intrinsèque des leptons n'est pas référée dans la table PDG.

4.4.2 Parité des quarks

On a le même problème que pour les leptons : dans les interactions forte et e.m., les quarks sont créés par paires quark-antiquark. Donc on fixe la parité des quarks positive et celle des antiquarks négative, par cohérence avec les parités des hadrons et antihadrons..

4.4.3 Parité des hadrons

D'après les règles précédemment établies, un **méson** composé d'un quark et d'un antiquark (ex. $:\pi^+ = |u\bar{d}\rangle$) a une parité intrinsèque :

$$P_{\text{méson}} = P_q P_{\bar{q}} (-1)^L = (-1)^{L+1} \quad (4.4.9)$$

avec L , le nombre quantique orbital. Si l'on prend des mésons au plus bas niveau énergétique, $L = 0$, on prédit que la parité intrinsèque est -1. Il s'agit donc de particules **pseudoscalaires**, $J^P = 0^-$. Les pions et les kaons sont des exemples de mésons pseudoscalaires.

Dans le cas des **baryons**, le problème du moment angulaire orbital est un peu plus compliqué à traiter, car on a trois quarks (ou trois antiquarks). Néanmoins, on peut traiter facilement le cas $L = 0$ pour lequel on obtient une parité $(+1)^3 = +1$. Pour l'antibaryon $(-1)^3 = -1$. Donc le proton et le neutron ont une parité +1.

4.4.4 Parité du photon

On décrit le champ e.m. (photonique) par le quadrivecteur $A = (V, \mathbf{A})$. \mathbf{A} est lié à \mathbf{E} par : $\mathbf{E} = -\nabla V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \equiv -\partial_\mu \mathbf{A}^\mu$.

Puisque $P(\mathbf{E}) = -\mathbf{E}$ et $P(\partial_t, \nabla) = (\partial_t, -\nabla)$ on obtient : $P(V, \mathbf{A}) = (V, -\mathbf{A})$.

Donc on attribue au photon une **parité négative**. Le photon est un **vecteur** : $J^P = 1^-$.

4.4.5 Parité du pion

Considérons tout d'abord la parité du pion chargé. On utilise la réaction :

	π^-	+	d	\rightarrow	n	+	n	
S	0		1		1/2		1/2	
$\sum S_i$			1				0, 1	
L			0				x	
J			1	\Rightarrow			1	(conservation du J)

Le pion se met en orbite autour de deuton ; il est par la suite capturé depuis l'orbite S ($\ell=0$), qui a le plus grand recouvrement avec le proton du deuton. La parité de l'état initial est donc : $P_\pi P_d (-1)^\ell = P_\pi P_d$. Le deuton est formé d'un neutron et d'un proton liés, principalement dans l'état 3S_1 , c'est-à-dire ⁴⁵ avec un spin $S=1$ et un moment angulaire orbital $L=0$; sa parité vaut $(+1)(+1)(-1)^L = +1$. L'état initial de la réaction est donc caractérisé par une parité égale à celle du pion.

Voyons comment attribuer les moments angulaires ; avec les deux neutrons de l'état final de la réaction on peut former des combinaisons de spin **antisymétrique** $S = 0$ (du type $|\uparrow\downarrow\rangle$) et **symétrique** $S = 1$ (du type $|\uparrow\uparrow\rangle$) :

$$\begin{aligned}
|0, 0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle_1 |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle_2 - |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle_1 |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle_2) & (4.4.10) \\
|1, 1\rangle &= |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle_1 |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle_2 \\
|1, 0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle_1 |\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\rangle_2 + |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle_1 |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle_2) \\
|1, -1\rangle &= |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle_1 |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle_2
\end{aligned}$$

On voit que l'échange des particules $1 \leftrightarrow 2$ est équivalent à un changement de signe de l'état antisymétrique, tandis que cet échange laisse les états symétriques invariants.

Si les deux neutrons sont dans l'état de spin antisymétrique (du type $|\uparrow\downarrow\rangle$), on a $\sum S_i=0$ et $x=1$. S'ils sont dans l'état de spin symétrique (du type $|\uparrow\uparrow\rangle$), $\sum S_i=1$ et x peut prendre les valeurs 0,1,2. Or, le neutron est un fermion, la fonction d'onde du système des deux neutrons doit être antisymétrique : $\psi(n_1, n_2) = -\psi(n_2, n_1)$. Si la partie spinorielle de la fonction d'onde est antisymétrique, la partie spatiale doit être symétrique et *vice et versa* :

La seule possibilité qui satisfasse simultanément la conservation de \mathbf{J} et la statistique de Fermi-Dirac est $\sum S_i = 1$, $x = 1$ et $J = 1$.

En conclusion, la parité de l'état final de la réaction est donnée par $P_n P_n (-1)^1 = -1$. La conservation de la parité dans l'interaction forte impose donc une parité intrinsèque du pion chargé égale à -1.

⁴⁵rappel de la notation spectroscopique : ${}^{2S+1}L_J$.

$\sum S_i$	requis par Fermi-Dirac	requis par conservation de J
0	$x = 0, 2, 4, \dots$	$x = 1$
1	$x = 1, 3, 5, \dots$	$x = 0, 1, 2$

L'étude de la désintégration $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$ a montré que la parité intrinsèque du pion neutre est aussi négative. Les états de charge du pion forment donc un triplet $J^P = 0^-$ de particules pseudoscalaires.

4.4.6 Violation de la parité

Les physiciens ont commencé à s'intéresser à ce sujet à partir de la décennie 1950 ; ils y ont été amenés par la recherche de la solution au fameux puzzle " $\theta\tau$ ". On avait identifié à l'époque deux particules instables, de masses et de durée de vie voisines⁴⁶, qu'on avait appelées : θ et τ (cette dernière n'a rien à voir avec le lepton τ actuel). On avait aussi reconnu que la particule θ se désintègre en 2 pions, la particule τ en 3 pions. L'analyse en spin-parité des processus de désintégration à deux et à trois corps avait amené aux résultats suivants. Dans la désintégration du θ^+ :

$$\begin{array}{l|l}
 S & \begin{array}{l} \theta^+ \rightarrow \pi^+ + \pi^0 \\ S_{\theta^+} \quad 0 \quad 0 \end{array} \\
 L & \begin{array}{l} 0 \quad \quad \quad x \end{array} \\
 J & \begin{array}{l} S_{\theta^+} \Rightarrow \quad S_{\theta^+} \quad \quad \quad \text{(conservation de } J) \end{array}
 \end{array}$$

d'où : $x = L_{\pi\pi} = J_{\pi\pi} = S_{\theta^+}$

$$P_{\pi\pi} = P^{\pi^+} P^{\pi^0} (-1)^{L_{\pi\pi}} = (-1)^2 (-1)^{L_{\pi\pi}} = (-1)^{L_{\pi\pi}}$$

La parité θ^+ pouvait donc être caractérisée ⁴⁷ par la séquence $J^{P_{\theta^+}} = 0^+, 1^-, 2^+, \dots$, en fonction de la valeur de S_{τ^+} .

Dans la désintégration du τ^+ :

Il était commode pour l'analyse de décomposer le moment angulaire orbital final en deux termes, L caractérisant le mouvement relatif des deux π^+ , et ℓ caractérisant le mouvement relatif du π^- par rapport au système $\pi^+\pi^+$. Le pion n'ayant pas de spin, on a :

$$|L - \ell| \leq J_{\pi\pi\pi} \leq |L + \ell|$$

⁴⁶ 966.7 ± 2.0 et 966.3 ± 2.0 en unité de masse électronique,
 1.21 ± 0.02 et $1.19 \pm 0.05 \cdot 10^{-8}$ sec.

⁴⁷ La parité était supposée être conservée dans le processus de désintégration.

En 1956, Lee et Yang⁵⁰ observaient que si la conservation de la parité dans les interactions forte (I.F.) et électromagnétique (e.m.) était prouvée expérimentalement, il n'existait pas de preuve équivalente pour l'interaction faible (W.I). Ils suggéraient l'étude de processus faibles devant permettre la mise en évidence d'une éventuelle violation de la symétrie droite-gauche. Cette suggestion était rapidement mise en application dans une expérience réalisée à l'université de Columbia (N.Y.).

4.4.7 L'expérience de Wu et al.

*Wu et al.*⁵¹ étudient la désintégration bêta (W.I) du cobalt :



L'objectif est de mesurer la distribution angulaire des électrons émis par un échantillon de ${}^{60}\text{Co}$ polarisé dans un champ magnétique. Le sel de Co est maintenu à la température de 0.01 K pour réduire l'agitation thermique dépolarisante. Le résultat de l'expérience est que ces électrons sont émis préférentiellement dans la direction opposée à celle du vecteur polarisation du Co. La valeur moyenne de $\langle \mathbf{J}_{\text{Co}} \cdot \mathbf{p}_e \rangle$ est donc non nulle et de plus négative. Ce résultat apporte la preuve que la parité est violée dans le processus étudié. En effet, si l'on applique l'opérateur de parité à ce produit scalaire, on obtient :

$$\begin{aligned} P(\mathbf{J}_{\text{Co}} \cdot \mathbf{p}_e) &= -\mathbf{J}_{\text{Co}} \cdot \mathbf{p}_e \quad (\mathbf{J}_{\text{Co}} \cdot \mathbf{p}_e \text{ est un pseudoscalaire}) \\ P(\langle \mathbf{J}_{\text{Co}} \cdot \mathbf{p}_e \rangle) &= -\langle \mathbf{J}_{\text{Co}} \cdot \mathbf{p}_e \rangle \end{aligned}$$

On voit que l'invariance sous P ne peut être satisfaite que si $\langle \mathbf{J}_{\text{Co}} \cdot \mathbf{p}_e \rangle = 0$, ce qui est contredit par l'expérience.

On peut voir la chose d'un point de vue intuitif, en raisonnant à l'aide d'un miroir plan (voir figure 4.4.2). Rappelons que P est équivalente à une réflexion plus une rotation de 180° ; on admet que le système est invariant sous la rotation. Dans l'image donnée par le miroir, le courant dans les bobines et la polarisation du Co sont inversés ; on a représenté le vecteur polarisation à la manière d'un tire-bouchon. Par contre la direction d'émission des e^- est conservée. L'expérience montre que la configuration de gauche est plus probable que celle de droite : $\langle \mathbf{J}_{\text{Co}} \cdot \mathbf{p}_e \rangle < 0$; la parité est donc violée dans le processus de désintégration faible. La rotation subséquente des 180° n'affecte pas la valeur du produit $\mathbf{J}_{\text{Co}} \cdot \mathbf{p}_e$ et donc ne change pas le résultat de la discussion.

L'interprétation microscopique du processus est la suivante : le ${}^{60}\text{Co}$ a un spin $J_{\text{Co}}=5$ et le ${}^{60}\text{Ni}^*$ un spin $J_{\text{Ni}}=4$. Considérons (voir figure 4.4.3) le cas extrême où les deux leptons sont émis dos à dos. Puisque l'antineutrino est exclusivement

⁵⁰T.D. Lee, C.N. Yang, Phys. Rev. 104, (1956) 254.

⁵¹C. S. Wu, E. Ambler, R. Hayward, D. Hoppes, R. Hudson, Phys Rev 105 (1957) 1413.

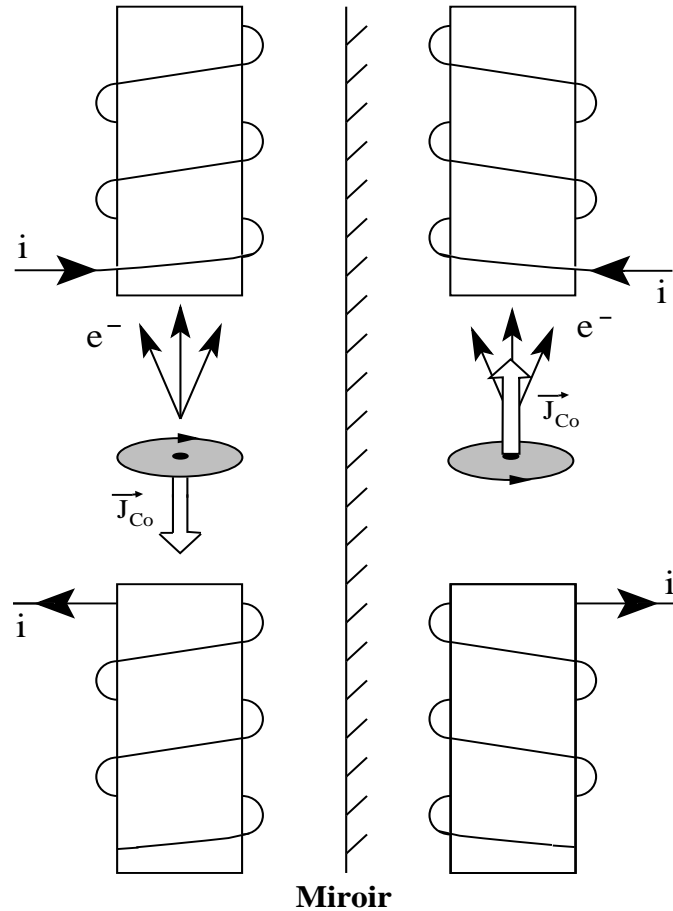


FIG. 4.4.2 – Représentation schématique de l'expérience de Wu et al.

droitier (hélicité $+1$), on comprend que dans cette configuration l'électron soit forcé à être gaucher (hélicité -1) et à être émis en direction opposée au spin du Co , de façon à assurer la conservation du moment angulaire.

On peut remarquer que la violation observée de la parité est **maximale**. Par exemple, dans l'Univers on trouve 100% de ν gauchers et 0% de ν droitiers; l'opposé est vrai pour les antineutrinos⁵².

La violation de la parité a été observée par la suite dans d'autres processus régis par l'interaction faible, par exemple dans la désintégration de muons polarisés⁵³ et d'hypérons polarisés⁵⁴.

⁵²Un autre point de vue est qu'il existe un nombre égal de neutrinos gauchers et droitiers, mais que ces derniers sont stériles, c. à d. qu'ils ne couplent avec aucune autre particule, donc qu'ils sont invisibles.

⁵³R.L. Garwin et al. Phys. Rev. 105 (1957) 1415

⁵⁴F. Eisler et al. Phys. Rev. 108 (1957) 1353 et F.S. Crawford et al Phys. Rev. 108 (1957) 1102

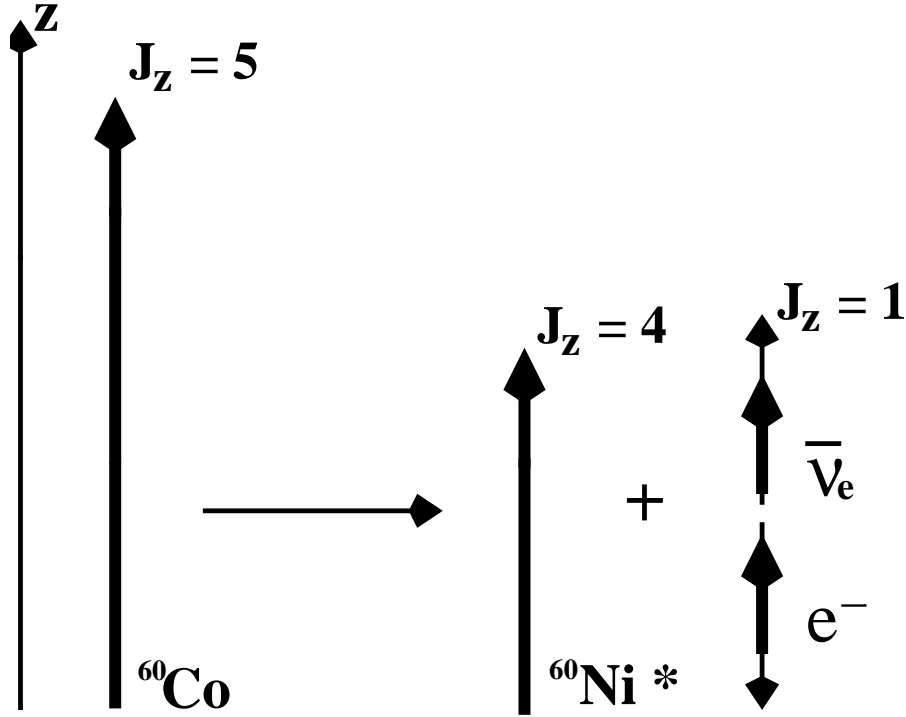


FIG. 4.4.3 – Désintégration du ^{60}Co : configuration favorisée

On reprendra ce sujet plus en détail au chapitre 7 consacré à l'interaction faible.

4.5 La Conjugaison de charge

La conjugaison de charge C (opérateur quantique C) est l'opération qui remplace les particules d'un système par leurs antiparticules, sans altérer les autres caractéristiques (quadrivecteur (E, \mathbf{p}) , spin, hélicité...). Par cette opération, toutes les charges et les moments magnétiques sont inversés, donc le bilan énergétique associé à l'interaction e.m. ne subit pas de changement :

$$[H_{em}, C] = 0 \quad (4.5.1)$$

C est aussi une symétrie de l'IF, donc :

$$[H_{em} + H_{IF}, C] = 0 \quad (4.5.2)$$

Par contre, l'Hamiltonien de l'interaction faible n'est pas invariant sous C :

$$[H_{WI}, C] \neq 0 \quad (4.5.3)$$

On va se limiter, pour le moment, à :

$$H = H_{em} + H_{IF} \quad (4.5.4)$$

Il faut distinguer deux classes de particules :

- 1) les particules qui sont différentes de leurs antiparticules : $a=p,n,\pi^+,K^+, \dots$ donc pour lesquelles : $a \neq \bar{a}$;
- 2) les particules qui sont identiques à leurs antiparticules : $\alpha = \gamma, \pi^0, \eta, \dots$

Q. : étudier le cas du neutron en termes de structure de quarks. Idem pour le système des K neutres.

Bien que le neutron ait une charge nulle, il a un moment magnétique non nul qui est changé de signe par C (ce qui prouve qu'il ne s'agit pas d'un constituant élémentaire).

Nous définissons la fonction d'onde, p. ex. d'un proton, par $|p, \psi\rangle$, les dépendances en quantité de mouvement, spin, ... étant contenues dans la fonction ψ

Un système pion-nucléon sera décrit, p. ex., par :

$$|\pi^+, \psi_1; p, \psi_2\rangle \equiv |\pi^+, \psi_1\rangle |p, \psi_2\rangle \quad \text{etc...} \quad (4.5.5)$$

Avec cette notation, on a, pour les deux classes de particules ci-dessus :

$$C|a, \psi\rangle = \eta|\bar{a}, \psi\rangle \quad \text{et} \quad C|\alpha, \psi\rangle = C_\alpha|\alpha, \psi\rangle \quad (4.5.6)$$

Dans le premier cas on n'a pas d'état propre ; dans le second on a un état propre, avec la valeur propre C_α . Le facteur de phase C_α est similaire à celui que l'on a rencontré avec l'opérateur P ; puisque $C^2=1$, on obtient $C_\alpha = \pm 1$. On appelle parfois ce facteur la **parité** C . Dans le cas des particules de type "a", le facteur de phase est arbitraire (car de toute façon non mesurable) ; on rencontre les deux conventions : $C_a = \pm 1$.

Pour un système de particules :

$$C|a_1, \psi_1; a_2, \psi_2; \dots; a_n, \psi_n; \alpha_{n+1}, \psi_{n+1}; \dots; \alpha_{m+n}, \psi_{m+n}\rangle = C_{\alpha_{n+1}} \dots C_{\alpha_{m+n}} |\bar{a}_1, \psi_1; \bar{a}_2, \psi_2; \dots; \bar{a}_n, \psi_n; \alpha_{n+1}, \psi_{n+1}; \dots; \alpha_{m+n}, \psi_{m+n}\rangle \quad (4.5.7)$$

Un système composé d'une particule et de son antiparticule (même de type a) est un état propre de C, car en pratique l'opérateur C effectue l'échange des deux particules :

$$C|a, \psi_1; \bar{a}, \psi_2\rangle = |\bar{a}, \psi_1; a, \psi_2\rangle = \pm |a, \psi_1; \bar{a}, \psi_2\rangle \quad (4.5.8)$$

le signe \pm dépend du caractère symétrique ou antisymétrique de l'état de ce système lors de l'échange de a et de \bar{a} . Par exemple, pour le système π^+, π^- :

$$C|\pi^+\pi^-; L\rangle = (-1)^L|\pi^+\pi^-; L\rangle \quad (4.5.9)$$

Du point de vue de l'observateur, l'opération conjugaison de charge revient à

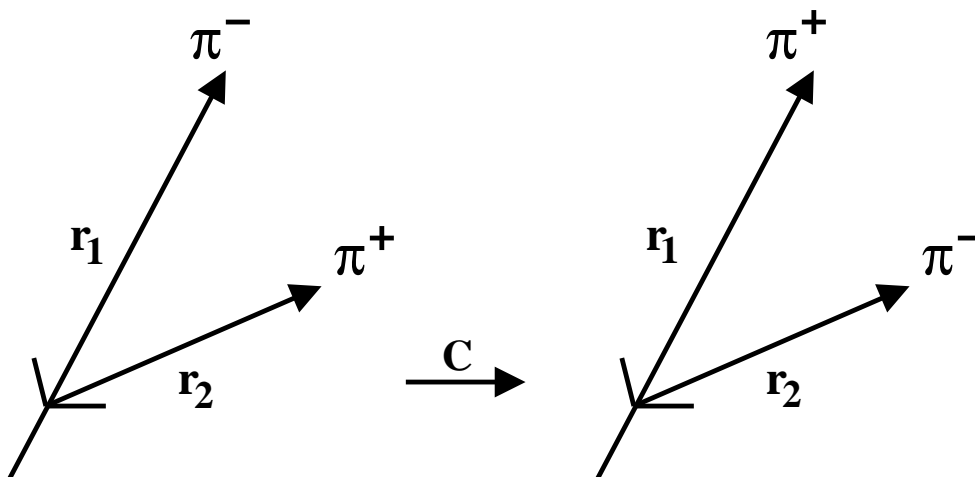


FIG. 4.5.1 – Transformation par C du système de deux pions

échanger la position des deux particules. Si c'est une symétrie du système, on obtient un système équivalent au précédent, dans lequel la position relative des deux particules a changé de signe : $\mathbf{R} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ devient $-\mathbf{R}$, ce qui se répercute sur la partie spatiale de la fonction d'onde : $C(\psi(\mathbf{R})) = \psi(-\mathbf{R})$. Comme déjà discuté, cette partie spatiale est symétrique pour L pair, antisymétrique pour L impair.

Considérons le cas du système fermion-antifermion $f\bar{f}$.

Repetita juvant : avec les deux spins 1/2 on peut former les combinaisons de spin antisymétrique ($S = 0$) et symétrique ($S = 1$) suivantes :

$$\begin{aligned} |0, 0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle_1 |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle_2 - |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle_1 |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle_2) \\ |1, 1\rangle &= |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle_1 |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle_2 \\ |1, 0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle_1 |\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\rangle_2 + |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle_1 |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle_2) \\ |1, -1\rangle &= |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle_1 |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle_2 \end{aligned} \quad (4.5.10)$$

Sous l'opération parité C, la partie spinorielle de la fonction d'onde amène un facteur multiplicatif $(-1)^{S+1}$, la partie spatiale un facteur $(-1)^L$ et la partie intrin-

sèque (voir chapitre 4.3) un facteur -1. Donc au total, pour le système fermion-antifermion⁵⁵ :

$$C|f, \bar{f}, J, L, S\rangle = (-1)^{S+L}|f, \bar{f}, J, L, S\rangle \quad (4.5.11)$$

4.5.1 La parité C du photon

On peut s'inspirer de la procédure utilisée pour la parité P. Sous C le potentiel vecteur se transforme comme :

$$C(\mathbf{A}(t, \mathbf{x})) = C_\gamma \mathbf{A}(t, \mathbf{x}) \quad (4.5.12)$$

Le champ \mathbf{E} et le potentiel scalaire V changent de signe sous C , car toutes les charges sont inversées. De $\mathbf{E} = -\nabla V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \equiv \partial_\mu A^\mu$ on tire que \mathbf{A} change aussi de signe.

Donc :

$$C_\gamma = -1. \quad (4.5.13)$$

4.5.2 La parité C du π^0

Dans le modèle des quarks, le pion neutre est un état 1S_0 du système : $\frac{1}{\sqrt{2}}(u\bar{u} + d\bar{d})$. On lui prédit donc une parité $C_{\pi^0} = (-1)^{L+S} = (-1)^{0+0} = 1$. Cela est confirmé expérimentalement par la désintégration observée en deux photons :

$$\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma \quad (4.5.14)$$

Il s'agit d'une désintégration e.m. qui conserve C, on peut donc écrire :

$$C_{\pi^0} = C_\gamma C_\gamma = 1 \quad (4.5.15)$$

Ce processus est interprété à l'aide du diagramme d'annihilation triangulaire de la figure 4.5.2. Sur le strict plan du couplage e.m., la désintégration en 3 photons devrait se manifester dans la proportion :

$$\frac{\Gamma(\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma\gamma)}{\Gamma(\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma)} \simeq O(\alpha_{em}) \approx \frac{1}{137} \approx 1\% \quad (4.5.16)$$

Expérimentalement on trouve que la voie en 3 photons est supprimée par un facteur d'au moins 10^{-8} , ce qui est une conséquence de la conservation de C. On se rend compte de la puissance de ce critère de sélection.

⁵⁵Voir p. ex. K. Gottfried and V. F. Weisskopf, Concepts of Particle Physics, vol 2, Oxford Uni. Press, p. 249-250, note 14.

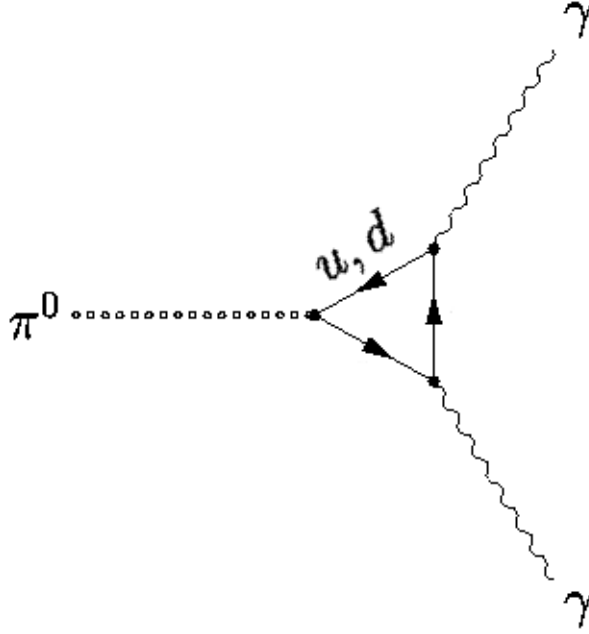


FIG. 4.5.2 – Schéma de désintégration du π^0

4.5.3 Parité C du η

Le η est une particule pseudoscalaire comme le π^0 . On a les modes de désintégration :

$$\begin{aligned}
 \eta &\rightarrow \gamma + \gamma & B_r &= 0.39 \\
 \eta &\rightarrow \pi^0 + \pi^0 + \pi^0 & B_r &= 0.32 \\
 \eta &\rightarrow \pi^0 + \pi^+ + \pi^- & B_r &= 0.24
 \end{aligned}
 \tag{4.5.17}$$

Le temps de vie est de (table PDG) : $\tau = \frac{\hbar}{\Gamma} = 6.6 \cdot 10^{-22} / 1.2 \cdot 10^{-3} = 5.5 \cdot 10^{-19}$ s., temps typique de l'interaction e.m.. Les rapports d'embranchement sont similaires, donc les trois processus sont de nature e.m.. Les deux premières voies donnent chacun $C_\eta = +1$, sans ambiguïté. On a utilisé la dernière voie pour un test d'invariance sous C de l'interaction e.m.. Si C est une bonne symétrie, l'état final :

$$\pi^0(p) + \pi^+(p_1) + \pi^-(p_2)
 \tag{4.5.18}$$

doit être identique à son conjugué sous C :

$$\pi^0(p) + \pi^-(p_1) + \pi^+(p_2)
 \tag{4.5.19}$$

En conséquence les spectres des deux pions chargés doivent être identiques, ce qui est confirmé expérimentalement au niveau de 10^{-3} .

4.5.4 Non conservation de C dans l'interaction faible

La non conservation de C dans l'interaction faible peut être mise en évidence par les effets directement observables auxquels elle donne lieu. Prenons par exemple les processus de désintégration faible : $\pi^\pm \rightarrow \mu^\pm + \nu_\mu(\bar{\nu}_\mu)$. En conséquence des propriétés du neutrino (voir chapitre 4.3) et de la conservation du moment angulaire, le μ^+ et le μ^- ont des hélicités (et des polarisations) opposées. Imaginons une expérience réalisée dans un faisceau mixte de π^\pm , avec un appareillage capable de sélectionner les muons dans un état d'hélicité (de polarisation) donné. Le taux de comptage obtenu sera non nul dans l'une des voies et nul dans l'autre. La violation de C amène donc à des situations non équivalentes en ce qui concerne les particules de l'état final des désintégrations ci-dessus.

Q. : montrer que si l'on fait suivre C de P on restaure la symétrie du système ;

soit $|\nu, \lambda = -\frac{1}{2}\rangle$ l'état du neutrino gaucher. Que valent $C|\nu, \lambda = -\frac{1}{2}\rangle$ et $CP|\nu, \lambda = -\frac{1}{2}\rangle$?

4.6 Le renversement du temps

L'invariance par renversement du temps découle de l'idée que si l'on pouvait inverser la flèche du temps on verrait essentiellement la même physique et le système pour lequel

$$T : (t, \mathbf{r}) \mapsto (-t, \mathbf{r}) \quad (4.6.1)$$

serait indiscernable de l'original. La mécanique de Newton est invariante par renversement du temps car elle s'exprime par des équations du second degré en t :

$$m \frac{d^2}{dt^2} \mathbf{r}(t) = \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \quad (4.6.2)$$

Donc, si une particule parcourt une trajectoire $\mathbf{r}(t)$, cette même trajectoire sera une solution pour le système au mouvement inversé : $\mathbf{r}^T(t)$ ⁵⁶ passe par les mêmes points que $\mathbf{r}(t)$, mais à des temps $-t$: $\mathbf{r}^T(t) = \mathbf{r}(-t)$. Cette symétrie n'est pas valable si, p. ex., la force est une fonction de la vitesse. Naturellement, tout cela doit être considéré au niveau microscopique, car on sait qu'un système macroscopique évolue vers une condition plus chaotique.

Si le renversement du temps est une symétrie du système, son application amène à un système dynamiquement équivalent à l'original, pour lequel tout vecteur lié au mouvement change de direction : la quantité de mouvement \mathbf{p} est changée en $-\mathbf{p}$, le moment angulaire \mathbf{J} en $-\mathbf{J}$, le courant (e.m. ou autre) \mathbf{j} en $-\mathbf{j}$, etc.. Il faut ajouter que lors d'une interaction l'état "initial" et l'état "final" sont échangés :

⁵⁶N.B. : par la suite on utilisera la notation $A^T = T(A)$.

$T(\text{état initial}) \rightarrow (\text{état final})$ et $T(\text{état final}) \rightarrow (\text{état initial})$.

Le problème de la symétrie T est conceptuellement et mathématiquement plus compliqué à traiter que celui des symétries P et C car on n'a pas de quantité conservée. Mathématiquement cela s'explique par le fait que l'on ne sait pas construire une observable T , c.à.d. un opérateur linéaire hermitique. Un système (sans spin) caractérisé par un Hamiltonien H , obéit à l'équation de Schrödinger :

$$H\psi(\mathbf{r}, t) = i\frac{\partial}{\partial t}\psi(\mathbf{r}, t) \quad (4.6.3)$$

Si l'on suppose H invariant sous T et on change le signe de t , on obtient :

$$H\psi(\mathbf{r}, -t) = -i\frac{\partial}{\partial t}\psi(\mathbf{r}, -t) \quad (4.6.4)$$

On constate que la fonction $\psi(\mathbf{r}, -t)$ n'obéit pas à la même équation que $\psi(\mathbf{r}, t)$! Par contre, si l'on prend le conjugué complexe de 4.5.3, en tenant compte $H^* = H$; on a :

$$H\psi^*(\mathbf{r}, -t) = i\frac{\partial}{\partial t}\psi^*(\mathbf{r}, -t) \quad (4.6.5)$$

On voit que $\psi(\mathbf{r}, t)$ et $\psi^*\mathbf{r}, -t)$ obéissent à la même équation. L'état transformé peut donc être décrit par :

$$T(\psi(\mathbf{r}, t)) = \psi^*(\mathbf{r}, -t) \quad (4.6.6)$$

Cela n'est pas surprenant car on a déjà observé que les états initial et final doivent être échangés, T est un **opérateur antiunitaire** ; en notation bra-ket on a :

$$\begin{aligned} T|\psi\rangle &= |\psi\rangle^T & T\langle\psi| &= {}^T\langle\psi| \\ T\langle f | i \rangle &= {}^T\langle f | i \rangle^T = \langle i | f \rangle = \langle f | i \rangle^* \end{aligned} \quad (4.6.7)$$

avec la conséquence que :

$$|\psi\rangle = a|\psi_1\rangle + b|\psi_2\rangle \Rightarrow T|\psi\rangle = a^*T|\psi_1\rangle + b^*T|\psi_2\rangle$$

D'autre part, on ne peut pas construire un vecteur propre de T et, *a fortiori*, définir une quantité conservée.

L'état d'une particule de quadrivecteur (E, \mathbf{p}) , se propageant le long de l'axe x est décrit par :

$$\psi(\mathbf{x}, t) \propto e^{i(\mathbf{p}\cdot\mathbf{x} - Et)} \quad (4.6.8)$$

L'application du renversement du temps donne :

$$T\psi(\mathbf{x}, t) \propto e^{i(-\mathbf{p}\cdot\mathbf{x} - Et)} \quad (4.6.9)$$

ce qui est équivalent à l'état d'une particule se propageant selon l'axe -x.

Q. : prouvez que :

$$\langle \psi^T | \mathbf{r} | \psi^T \rangle(t) = \langle \psi | \mathbf{r} | \psi \rangle(-t) \quad (4.6.10)$$

De même on obtient :

$$\langle \psi^T | \mathbf{p} | \psi^T \rangle(t) = -\langle \psi | \mathbf{p} | \psi \rangle(-t) \quad (4.6.11)$$

$$\langle \psi^T | \mathbf{L} | \psi^T \rangle(t) = -\langle \psi | \mathbf{L} | \psi \rangle(-t) \quad (4.6.12)$$

Et par analogie :

$$\langle \psi^T | \mathbf{S} | \psi^T \rangle(t) = -\langle \psi | \mathbf{S} | \psi \rangle(-t) \quad (4.6.13)$$

Q. : quelle est l'action de T sur l'hélicité d'une particule ?

L'opération T appliquée à une particule dans l'état de spin $|S, S_z\rangle$ entraîne un renversement du spin et amène à l'état $|S, -S_z\rangle$. Cette opération est donc équivalente à une rotation de 180° autour de l'axe y :

$$T|S, S_z\rangle \propto R_y(\pi)|S, S_z\rangle \quad (4.6.14)$$

On peut montrer que pour une particule de spin 1/2 décrite par le spineur

$\begin{pmatrix} \psi_+ \\ \psi_- \end{pmatrix}(\mathbf{r}, t)$, l'état transformé est donné par :

$$\begin{pmatrix} T \psi_+ \\ \psi_- \end{pmatrix}(\mathbf{r}, t) = -i\sigma_y \begin{pmatrix} \psi_+ \\ \psi_- \end{pmatrix}(\mathbf{r}, -t) \quad (4.6.15)$$

où :

$$\sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

Lors d'un calcul d'élément de matrice M associé à une transition A \rightarrow B, l'invariance par renversement du temps amène à l'équivalence :

$$\langle \psi_B | M | \psi_A \rangle = \langle \psi_A^T | M | \psi_B^T \rangle \quad (4.6.16)$$

Si le renversement du temps est une "symétrie" du système, l'amplitude de transition de l'état A vers l'état B est identique à celle de l'état transformé de B vers l'état transformé de A :

$$A \rightarrow B \quad \text{est équivalent à} \quad B^T \rightarrow A^T$$

Une façon de tester l'invariance sous T est de comparer le taux d'une réaction $a+b \rightarrow c+d$ à celui de son inverse $c+d \rightarrow a+b$ (où $a \neq c$ and $b \neq d$).

Il faut souligner que même si $|M_{AB}| = |M_{BA}|$, les taux d'événements attendus sont différents, car l'espace de phase accessible n'est pas le même pour les deux directions.

Dans le cas où les projectiles sont non polarisés et les produits de réaction sont détectés par un dispositif insensible au spin, on a :

$$(2S_a + 1)(2S_b + 1) p_{ab}^2 \frac{d\sigma_{ab}}{d\Omega} = (2S_c + 1)(2S_d + 1) p_{cd}^2 \frac{d\sigma_{cd}}{d\Omega} \quad (4.6.17)$$

où p_{ab} et p_{cd} sont les valeurs de la quantité de mouvement des particules dans le référentiel du c.m. de la réaction et les S_i sont les valeurs du spin de ces particules. C'est le **principe du bilan détaillé** (voir Chapitre 3)

Les résultats des tests effectués sur des interactions e.m. et forte sont compatibles avec l'hypothèse d'invariance sous T . Toutefois la précision expérimentale sur ce genre de test n'est que de l'ordre du %.

Un autre test d'invariance sous T repose sur la mesure du moment dipolaire électrique. On définit classiquement le moment dipolaire électrique d'un système formé de charges q_i situées en \mathbf{r}_i par :

$$\mathbf{d} = \sum_i q_i \mathbf{r}_i \quad (4.6.18)$$

T laisse inchangés q et \mathbf{r} , donc \mathbf{d} est aussi inchangé. Si T est une symétrie, le moment dipolaire \mathbf{d} doit être nul. De plus, le seul vecteur qui caractérise une particule au repos est son spin. On s'attend donc à ce que spin et moment dipolaire électrique soient parallèles. De façon intuitive, on écrit :

$$\mathbf{d} = f\mathbf{S}$$

Sous l'opération T , \mathbf{d} est invariant alors que \mathbf{S} change de signe :

$$T : \mathbf{d} \mapsto -f\mathbf{S}$$

. Le facteur f doit donc être nul d'où $\mathbf{d} = 0$.

Le moment électrique dipolaire du neutron peut être mesuré par différentes méthodes de résonance magnétique. Une de ces méthodes consiste à polariser les neutrons produits dans un réacteur par diffusion sur un écran de fer magnétisé. Ce faisceau (partiellement) polarisé traverse une région où sont appliqués des champs électrique et magnétique parallèles et uniformes. On cherche à effectuer un retournement des spins par application d'une RF à la fréquence adéquate. Si le moment électrique est non nul, on s'attend à trouver un léger déplacement de cette fréquence par rapport à la valeur de Larmor. La mesure est effectuée alternativement en présence et en l'absence de champ électrique de façon à réduire

le risque de biais expérimental. Le résultat obtenu est exprimé sous la forme d'une limite supérieure. La moyenne des expériences actuelles les plus précises donne (table PDG 2000) : $d_{neutron} < 0.63 \cdot 10^{-25}$ ecm (C.L. 90%).

Q. : chercher dans la table des particules les résultats pour l'électron et le proton.

4.7 Violation de CP et le système des Kaons neutres

CP est une grandeur conservée dans les interactions forte et électromagnétique. Qu'en est-il dans l'interaction faible ? Jusqu'aux environs de 1960, on a considéré que l'opération de CP était également une bonne symétrie dans l'interaction faible ce qui apparaissait réconfortant, la violation de P étant par un concours de circonstances compensée par la violation de C. Depuis lors, on a découvert des processus faibles où CP est manifestement violée.

4.7.1 Le système des Kaons neutres

Le méson K^0 et son antiparticule \bar{K}^0 ont l'étrangeté $S_{K^0}=1$ et $S_{\bar{K}^0}=-1$. En terme de structure en quarks, on a $K^0 = d\bar{s}$ et $\bar{K}^0 = \bar{d}s$ (N.B. : le quark s a l'étrangeté -1). Le nombre quantique étrangeté n'est pas conservé dans l'interaction faible. Les désintégrations :

$$K^0(\bar{K}^0) \rightarrow \pi^+\pi^- \quad \text{et} \quad K^0(\bar{K}^0) \rightarrow \pi^0\pi^0$$

sont observées. Elles peuvent être décrites par un graphe du type représenté dans la figure 4.7.1. Avec les deux quarks et les deux antiquarks sortants on peut former les deux pions finaux dans leurs différents états de charge.

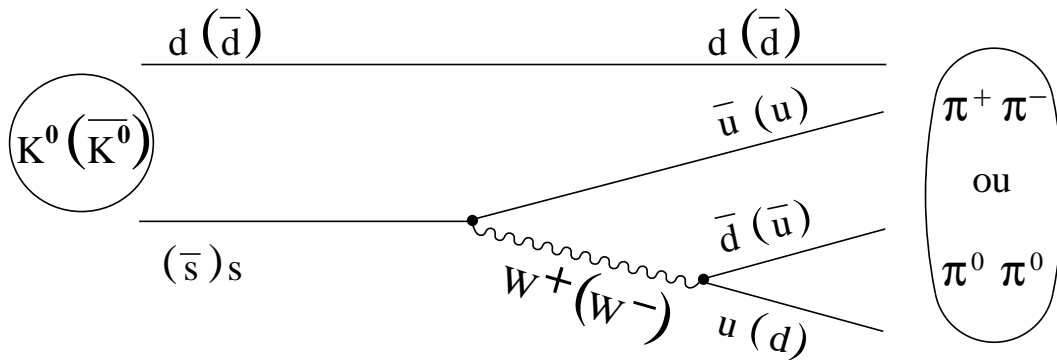


FIG. 4.7.1 – Diagramme de désintégration du $K^0(\bar{K}^0)$

L'observation de ces modes de désintégration communs au K^0 et à l' \bar{K}^0 suggère la possibilité d'un mécanisme tel que celui représenté à la figure 4.7.2. Il s'agit d'un

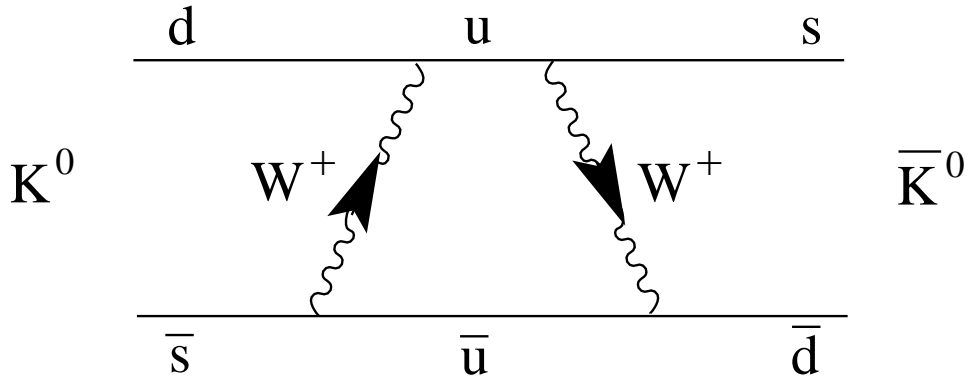


FIG. 4.7.2 – Diagramme de conversion d'un K^0 en un \bar{K}^0

diagramme en “échelle” comprenant un double échange de boson vecteur W . Par l'intervention de l'interaction faible un état d'étrangeté $S=-1(+1)$ se transforme spontanément en un état d'étrangeté $S=+1(-1)$ à travers un état virtuel à deux pions :

$$K^0 \leftrightarrow 2\pi \leftrightarrow \bar{K}^0$$

En raison de ce mécanisme, la fonction d'onde d'un kaon à un instant donné peut être représentée comme une superposition de $|K^0\rangle = |d\bar{s}\rangle$ et de $|\bar{K}^0\rangle = |\bar{d}s\rangle$.

Considérons des kaons au repos et à leur niveau énergétique le plus bas ; ils sont caractérisés par $J^P=0^-$. C'est à dire que :

$$P|K^0\rangle = -|K^0\rangle \quad \text{et} \quad P|\bar{K}^0\rangle = -|\bar{K}^0\rangle \quad (4.7.1)$$

D'autre part, avec la convention $\eta = -1$ (4.4.6), on a :

$$C|K^0\rangle = -|\bar{K}^0\rangle \quad \text{et} \quad C|\bar{K}^0\rangle = -|K^0\rangle \quad (4.7.2)$$

Remarquez que le choix $\eta = +1$ changerait les signes des formules qui suivent, sans rien changer aux conclusions physiques. L'opération conjointe de C et P donne :

$$CP|K^0\rangle = |\bar{K}^0\rangle \quad \text{et} \quad CP|\bar{K}^0\rangle = |K^0\rangle \quad (4.7.3)$$

Définissons les états :

$$|K_1^0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|K^0\rangle + |\bar{K}^0\rangle) \quad \text{et} \quad |K_2^0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|K^0\rangle - |\bar{K}^0\rangle) \quad (4.7.4)$$

Appliquons à ces états l'opérateur CP :

$$\begin{aligned} CP|K_1^0\rangle &= CP\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|K^0\rangle + |\bar{K}^0\rangle\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(CP|K^0\rangle + CP|\bar{K}^0\rangle\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\bar{K}^0\rangle + |K^0\rangle\right) = +|K_1^0\rangle \end{aligned} \quad (4.7.5)$$

De même :

$$CP|K_2^0\rangle = -|K_2^0\rangle \quad (4.7.6)$$

$|K_1^0\rangle$ et $|K_2^0\rangle$ sont des états propres de CP avec les valeurs propres +1 et -1.

On a donc deux états orthogonaux avec des valeurs propres de CP déterminées.

Considérons maintenant la désintégration (faible) du kaon neutre en deux et trois pions.

Dans l'état final de la désintégration en deux pions, on peut introduire le moment orbital relatif $L_{\pi\pi}$. Le kaon et le pion étant sans spin, $L_{\pi\pi} = 0$ par suite de la conservation du moment angulaire. Pour la voie en $\pi^0\pi^0$ on prédit que :

$$\begin{aligned} P(\pi^0\pi^0) &= (P_\pi)^2 \cdot (-1)^{L_{\pi\pi}} = (-1)^2(-1)^0 = +1 \\ C(\pi^0\pi^0) &= (C_\pi)^2 = +1 \end{aligned}$$

d'où :

$$CP(\pi^0\pi^0) = +1 \quad (4.7.7)$$

Pour la voie en $\pi^+\pi^-$:

$$\begin{aligned} P(\pi^+\pi^-) &= +1 \\ C(\pi^+\pi^-) &= (-1)^{L_{\pi\pi}} = +1 \end{aligned}$$

d'où :

$$CP(\pi^+\pi^-) = +1 \quad (4.7.8)$$

Dans l'état final de la désintégration en trois pions (π_1, π_2, π_3) on est dans une situation voisine de celle décrite par la figure 4.4.1 ; on doit introduire deux moments angulaires orbitaux : $L_{\pi_1\pi_2}$ et ℓ_{π_3} tels que $L_{\pi_1\pi_2} + \ell_{\pi_3} = 0$ (par suite de la conservation du moment angulaire). Pour la voie $\pi^0\pi^0\pi^0$, la statistique de Bose-Einstein requiert que $L_{\pi_1\pi_2}$ et ℓ_{π_3} soient pairs en raison de la symétrie du système $\pi^0\pi^0\pi^0$. Il s'en suit que :

$$\begin{aligned} CP_{\pi_1^0\pi_2^0} &= +1 \\ CP_{\pi_3^0} &= -1 \quad (C_{\pi_3^0} = +1, \quad P_{\pi_3^0} = (-1)(-1)^{\ell_{\pi_3^0}} = -1) \end{aligned}$$

d'où :

$$CP_{(\pi^0\pi^0\pi^0)} = -1 \quad (4.7.9)$$

Pour la voie $\pi^+\pi^-\pi^0$, cet argument de symétrie n'est pas valable. Par contre, on peut remarquer que le bilan énergétique de cette désintégration est petite en regard de la masse des particules ($Q_{\pi\pi\pi} \simeq 80$ MeV); l'état final est donc dominé par les ondes $L_{\pi^+\pi^-} = 0$ et $\ell_{\pi^0} = 0$ (on a choisi par commodité $\pi_3 = \pi^0$). Dans cette situation dominante, on prédit que :

$$\begin{aligned} CP(\pi^+\pi^-) &= +1 && \text{(idem pour le cas des deux pions)} \\ CP(\pi^0) &= -1 && (C_{\pi^0} = +1, P_{\pi^0} = (-1)(-1)^{\ell_{\pi^0}} = -1) \end{aligned}$$

d'où :

$$CP(\pi^+\pi^-\pi^0) = -1 \quad (4.7.10)$$

En résumé :

$$\begin{aligned} |K_1^0\rangle &\rightarrow \pi^0\pi^0 \quad \text{ou} \quad \pi^+\pi^- && (4.7.11) \\ |K_2^0\rangle &\rightarrow \pi^0\pi^0\pi^0 && |K_2^0\rangle \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^0 \text{ (bonne approx.)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |K_1^0\rangle &\rightarrow \pi^0\pi^0\pi^0 && |K_1^0\rangle \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^0 \text{ (bonne approx.)} \\ |K_2^0\rangle &\rightarrow \pi^0\pi^0 \quad \text{ou} \quad \pi^+\pi^- && (4.7.12) \end{aligned}$$

L'étude expérimentale de ces processus de désintégration révèle l'existence de deux états de kaons neutres ayant des masses pratiquement identiques (~ 498 MeV) et des durées de vie très différentes.

L'un appelé *K* zéro **S**hort (K_S^0) a un temps de vie de $(0.8926 \pm 0.0012) 10^{-10}$ s et se désintègre en deux pions :

$$K_S^0 \rightarrow \pi^+\pi^- \quad Br = 68.61 \pm 0.28\% \quad (4.7.13)$$

$$K_S^0 \rightarrow \pi^0\pi^0 \quad Br = 31.39 \pm 0.28\% \quad (4.7.14)$$

L'autre appelé *K* zéro Long (K_L^0) a un temps de vie de $(5.7 \pm 0.04) 10^{-8}$ s et se désintègre en trois pions ainsi qu'en modes semi-leptoniques :

$$K_L^0 \rightarrow \pi^0 \pi^+ \pi^- \quad Br = 12.38 \pm 0.21\% \quad (4.7.15)$$

$$K_L^0 \rightarrow \pi^0 \pi^0 \pi^0 \quad Br = 21.6 \pm 0.8\% \quad (4.7.16)$$

$$K_L^0 \rightarrow \pi^\pm + \ell^\pm + \nu_\ell(\bar{\nu}_\ell) \quad Br = 65.7 \pm 0.6\% \quad (4.7.17)$$

où $\ell = e, \mu$

Q. : pourquoi cette grande différence dans le temps de vie ?

La comparaison avec les règles 4.6.11 et 4.6.12, suggère l'association :

$$K_1^0 = K_S^0 \quad \text{et} \quad K_2^0 = K_L^0 \quad (4.7.18)$$

Il faut souligner le problème conceptuel posé par la définition de la "particule *K* zéro". On produit ce kaon normalement par interaction forte, ce qui donne les états propres de l'étrangeté : K^0 et \bar{K}^0 . La particule se désintègre par interaction faible en donnant des états de durée de vie définie (états propres de CP : K_1^0 et K_2^0 ?) Préfère-t-on accorder le statut de "réalité" à l'état avec un contenu en quarks déterminé, ou à l'état ayant un temps de vie bien défini ?

En 1964 on a mis en évidence pour la première fois l'existence de la voie de désintégration :

$$K_L^0 \rightarrow \pi^+ \pi^- \quad (4.7.19)$$

Il s'agit d'un signal très ténu, puisque le rapport d'embranchement est de l'ordre de 10^{-3} . La voie en deux pions neutres a été observée ultérieurement avec un rapport d'embranchement du même ordre de grandeur. Cette observation a apporté la première preuve que CP peut être violée dans un processus d'interaction faible.

4.7.2 Observation de la violation de CP

La voie de désintégration $K_L^0 \rightarrow \pi^+ \pi^-$ a été observée pour la première fois⁵⁷ à l'aide du dispositif de la figure 4.7.3. Un faisceau de protons de 30 GeV est dirigé sur une cible de Be. Parmi les particules secondaires produites, les chargées (pions, kaons,...) sont balayées par le champ d'un aimant, les photons provenant de désintégration $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$ sont absorbés dans un écran de Pb de 4 cm d'épaisseur, et il reste principalement des kaons neutres.

Q. : quelle est la fraction de photons de haute énergie éliminée ?

⁵⁷J.H. Christenson et al. Phys. Rev. Lett. 13 (1964) 138.

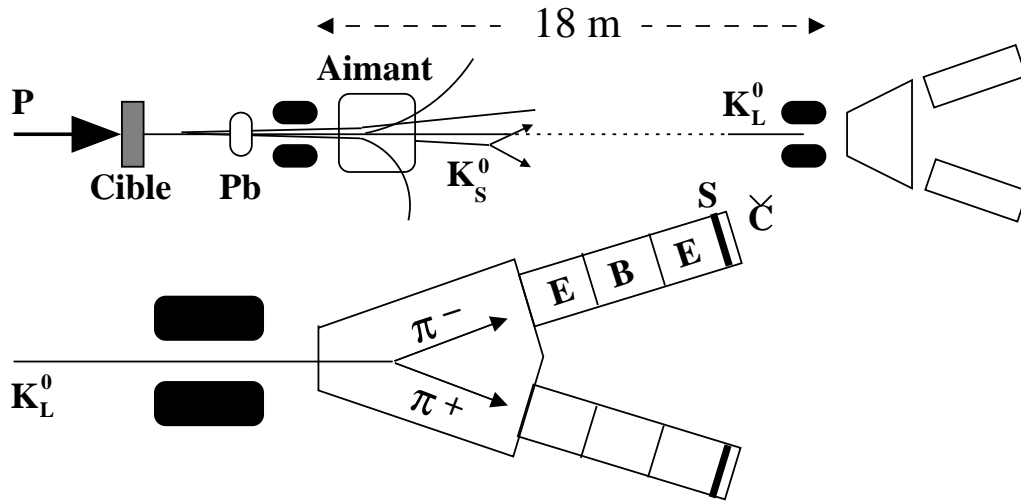


FIG. 4.7.3 – Schéma du dispositif de mesure de la violation de CP avec les Kaons neutres

La composante K_S^0 s'atténue rapidement et à la distance de 18 m où se situe le collimateur d'entrée du dispositif de détection il ne reste pratiquement plus que la composante K_L^0 .

Q. : quelle est la fraction de K_S^0 survivant après ces 18 m ?

La région où les désintégrations $K_L^0 \rightarrow \pi^+\pi^-$ sont recherchées est définie par une enceinte contenant de l'hélium gazeux pour minimiser les interactions de K^0 avec le milieu. Les deux pions chargés sont détectés dans deux séries de chambres à étincelles (E) entre lesquelles est intercalé un aimant d'analyse (B). Ce double spectromètre magnétique est complété par des scintillateurs (S) et par un détecteur Cherenkov qui sélectionne les particules chargées rapides ($\beta > 0.75$). La mesure se fait en coïncidence entre les deux bras. Les sources de bruit sont réduites en requérant :

- 1) que les pions soient de charges opposées,
- 2) que la masse effective des deux pions soit compatible avec la masse du kaon,
- 3) que le vertex de désintégration reconstruit par l'extrapolation des deux trajectoires soit proche de la ligne de faisceau.

L'expérience a conduit au résultat important que le K_L^0 se désintègre en deux pions, avec un rapport d'embranchement $R = (K_L^0 \rightarrow \pi^+\pi^-) / (K_L^0 \rightarrow \text{tous les modes chargés}) = (2.0 \pm 0.4) \cdot 10^{-3}$.

On a peut envisager deux mécanismes :

- 1) un mécanisme “direct” : $K_L^0 = K_S^0$ est un système qui peut violer CP, comme représenté graphiquement par le cas 1) de la figure 4.7.4 ;
- 2) un mécanisme “indirect” passant par le mélange des états ; les états K_S^0 et K_L^0 ne sont pas des états purs en $|K_1^0\rangle$ et $|K_2^0\rangle$, mais une superposition de ces états caractérisée par un paramètre ϵ (à priori complexe et tel que $|\epsilon| \ll 1$) :

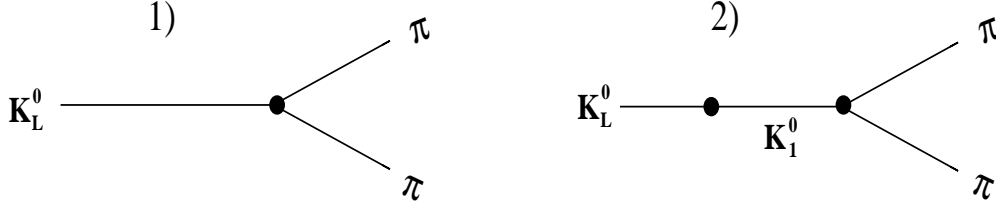


FIG. 4.7.4 – Mécanismes envisageables de la désintégration du K_L^0

$$|K_S^0\rangle = \frac{1}{\sqrt{1+|\epsilon|^2}} (|K_1^0\rangle - \epsilon|K_2^0\rangle) \quad \text{et} \quad (4.7.20)$$

$$|K_L^0\rangle = \frac{1}{\sqrt{1+|\epsilon|^2}} (\epsilon|K_1^0\rangle + |K_2^0\rangle) \quad (4.7.21)$$

La présence de la composante $|K_1^0\rangle$ (le cas 2 de la figure 4.7.4) dans l’amplitude de désintégration de l’état K_L^0 donne une probabilité d’observer la voie $K_L^0 \rightarrow 2\pi$ de :

$$\frac{|\epsilon|^2}{1+|\epsilon|^2} = |\epsilon|^2 \quad (4.7.22)$$

Une analyse détaillée montre que le mécanisme 2) est dominant, avec $|\epsilon| = (2.284 \pm 0.014) 10^{-3}$, plus une faible composante de l’ordre de 10^{-6} associée au mécanisme 1).

L’interprétation de la violation de CP est d’une certaine façon plus complexe que celle de la violation de P. La violation de P est maximale et on a vite trouvé le contexte théorique approprié permettant de décrire cela. Par contre, la violation de CP n’est pas franche et l’interprétation de ce petit effet n’est pas évidente. On reprendra ce sujet plus tard.

L’étude des modes semi-leptoniques de désintégration du K_L^0 a conduit également à l’observation d’une violation de CP. Si CP était conservée, les voies $K_L^0 \rightarrow \pi^- \ell^+ \nu_\ell$ et $\pi^+ \ell^- \bar{\nu}_\ell$ seraient équiprobables. Expérimentalement on a obtenu : $\frac{\Gamma(\pi^- \ell^+ \nu_\ell) - \Gamma(\pi^+ \ell^- \bar{\nu}_\ell)}{\text{somme}} \simeq 3 \cdot 10^{-3}$. En conséquence de la violation de CP, il est donc possible de distinguer de façon absolue la production de matière et d’antimatière dans des processus faibles.

4.7.3 La régénération du K_S^0

Quand un faisceau de protons p. ex. passe à travers un bloc de matière, il en ressort atténué mais les protons restent des protons (sauf ceux qui ont interagi, évidemment).

Par contre, si l'on fait passer un faisceau pur de K_L^0 à travers un écran de matière, on observe à la sortie la présence d'une composante K_S^0 ! Si l'on ignore le mélange d'états (on fixe $\epsilon = 0$), un faisceau de K_L^0 se décompose en :

$$|K_L^0\rangle = |K_2^0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|K^0\rangle - |\bar{K}^0\rangle \right) \quad (4.7.23)$$

Les composantes K^0 et \bar{K}^0 interagissent de façon différente (interaction forte) avec les nucléons de la matière. Après avoir parcouru un certain trajet, les deux composantes sont atténuées par un facteur a et b respectivement (a et b < 1). A ce moment l'état du faisceau sera décrit par :

$$|f\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(a |K^0\rangle - b |\bar{K}^0\rangle \right) \quad (4.7.24)$$

Utilisant 4.6.23 ainsi que $K_S^0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|K^0\rangle + |\bar{K}^0\rangle \right)$ on peut écrire 4.6.24 sous la forme :

$$|f\rangle = \frac{1}{2}(a+b)|K_L^0\rangle + \frac{1}{2}(a-b)|K_S^0\rangle \quad (4.7.25)$$

On voit que si $a \neq b$ une composante K_S^0 apparaît dans le faisceau initialement pur en K_L^0 . On observe expérimentalement que $b < a$, c. à d. que la composante \bar{K}^0 est plus fortement absorbée que la composante K^0 .

D'une part la réaction :



n'a pas de contrepartie pour le K^0 , en conséquence de la conservation de l'étrangeté dans l'interaction forte. D'autre part, la réaction :



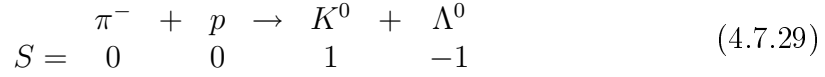
est plus fréquente que la réaction :



car il y a plus de neutrons que de protons dans les noyaux atomiques (intermédiaires et lourds).

4.7.4 L'oscillation d'étrangeté

Des kaons neutres d'étrangeté S définie sont produits dans une réaction comme :



Au cours du temps une composante \bar{K}^0 va apparaître dans l'échantillon de K^0

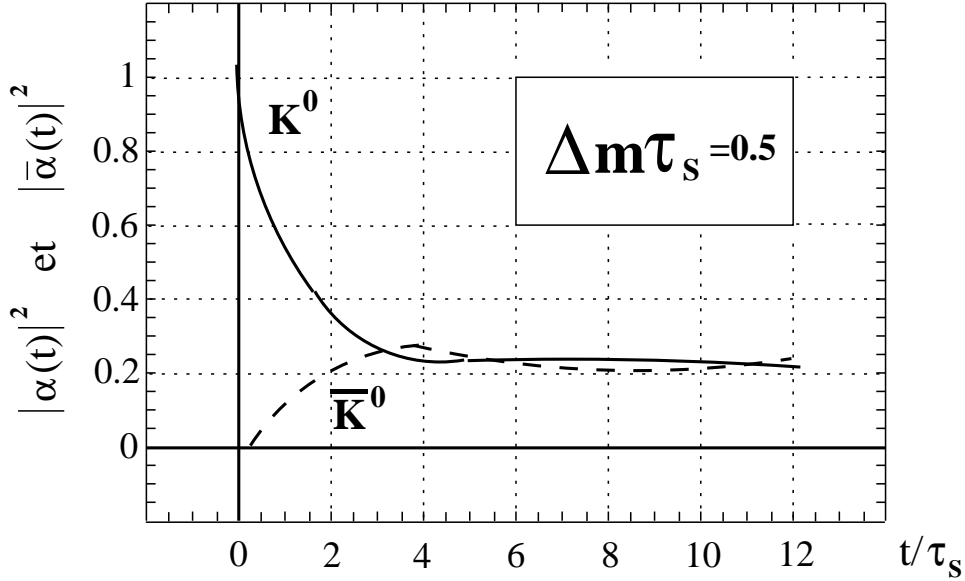


FIG. 4.7.5 – Représentation de l'oscillation d'étrangeté en fonction du temps

par le mécanisme précédemment décrit. De plus, la composante courte du K^0 va disparaître plus rapidement que sa composante longue. Considérons en $t=0$ l'état :

$$|K^0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|K_L^0\rangle + |K_S^0\rangle) \quad (4.7.30)$$

Le système évolue en fonction du temps t suivant l'oscillation $\exp(-iEt) = (\exp -im_x t)$ (où x =Short et Long) multipliée par l'atténuation $\exp(-\Gamma_x t/2)$ due à la désintégration spontanée⁵⁸. Ce dernier terme correspond à la disparition des kaons dans le faisceau, associée à un temps de vie $\tau_x = (\Gamma_x)^{-1}$ (en effet la probabilité de trouver le système dans l'état $\Psi(t)$ est $|\Psi(t)|^2$, ce qui est proportionnel à $(-\exp \Gamma_x t)$).

⁵⁸On a posé $\hbar=1$. Pour avoir les dimensions usuelles des grandeurs il faut faire la substitution $E \rightarrow E/\hbar, m \rightarrow m/\hbar, \Gamma \rightarrow \Gamma/\hbar$, où $\hbar \simeq 6.582122 \cdot 10^{-22} \text{MeV} \cdot \text{s}$.

Ecrivons :

$$|\Psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (a_L(t)|K_L^0\rangle + a_S(t)|K_S^0\rangle) \quad (4.7.31)$$

avec :

$$a_x(t) = \exp(-im_x t) \exp(-\Gamma_x t/2) \quad x = L, S \quad (4.7.32)$$

Au temps t tel que $\tau_S \ll t \ll \tau_L$, la composante courte a disparu, et seule la longue subsiste. Intéressons-nous par contre au régime dans la région t de l'ordre de τ_S . Décrivons le mélange des composantes d'étrangeté $S = 1$ et $S = -1$ sous la forme :

$$|\Psi(t)\rangle = \left(\alpha(t)|K^0\rangle + \bar{\alpha}(t)|\bar{K}^0\rangle \right) \quad (4.7.33)$$

avec

$$\alpha(t) = \frac{1}{2} [a_S(t) + a_L(t)] \quad \text{et} \quad \bar{\alpha}(t) = \frac{1}{2} [a_S(t) - a_L(t)] \quad (4.7.34)$$

En utilisant 4.6.32, la probabilité de trouver un état d'étrangeté $S = +1$ au temps t est :

$$|\alpha(t)|^2 = \frac{1}{4} \left[e^{-\Gamma_S t} + e^{-\Gamma_L t} + 2 \cos(\Delta m t) e^{-(\Gamma_S + \Gamma_L) \cdot \frac{t}{2}} \right] \quad (4.7.35)$$

avec $\Delta m = |m_S - m_L|$.

Dans le cas de l'étrangeté $S = -1$ cette probabilité est donnée par (voir figure 4.7.5) :

$$|\bar{\alpha}(t)|^2 = \frac{1}{4} \left[e^{-\Gamma_S t} + e^{-\Gamma_L t} - 2 \cos(\Delta m t) e^{-(\Gamma_S + \Gamma_L) \cdot \frac{t}{2}} \right] \quad (4.7.36)$$

Ce comportement a été vérifié lors d'une première expérience effectuée à Brookhaven⁵⁹ (USA). L'apparition de \bar{K}^0 en fonction de la distance à la source de K^0 (donc en fonction du temps) était observée en utilisant les signatures caractéristiques :

$$\bar{K}^0 + p \rightarrow \pi^+ + \Lambda \quad \text{et} \quad \pi^0 + \Sigma^+ \quad (4.7.37)$$

L'expérience a été répétée à plusieurs reprises depuis lors. La valeur de Δm tabulée (table PDG 2000) est :

$$\Delta m = (0.5307 \pm 0.0015) \cdot 10^{10} \text{ s}^{-1} \quad (4.7.38)$$

⁵⁹F.Muller et al. Phys. Rev. Lett. 3 (1960) 418.

4.8 Le théorème CPT.

L'opération de symétrie CPT présente un intérêt particulier à cause du théorème dit de CPT de Luders et Zumino (1954) et Pauli (en 1955). Ce théorème énonce qu'en théorie quantique des champs l'invariance de l'Hamiltonien sous les transformations de Lorentz implique l'invariance de cet Hamiltonien sous l'opération combinée CPT, même si cette invariance n'est pas vérifiée sous les opérations C, P et T effectuées séparément. En conséquence un système (ou une interaction) qui viole P viole aussi CT par compensation pour assurer l'invariance sous CPT. Dans ce cas, au moins une des symétries C ou T est violée. De même, si T est une bonne symétrie, alors CP est aussi conservé, donc C et P sont toutes deux conservées ou toutes deux violées.

P	C	T	applications
			IF, e.m.
	x	x	aucune
x	x		WI (désinteg. β)
x		x	aucune
x	x	x	$K_L^0 \rightarrow 2\pi$

TAB. 4.8.1 – Conséquences du théorème CPT. La présence du x signifie que la symétrie en question est violée

Le tableau 4.7.1 montre les combinaisons possibles avec des applications.

L'opérateur quantique $O = CPT$ a le même comportement que T : on n'a pas d'observable correspondante, donc pas de valeur et vecteur propres. CPT a pour effet d'inverser le quadrivecteur (t, \mathbf{r}) : $CPT(t, \mathbf{r}) = (-t, -\mathbf{r})$

Considérons le cas d'une particule distincte de son antiparticule (type a) :

$$O|a, \mathbf{p}, \mathbf{J} \dots\rangle = \eta \langle \bar{a}, \mathbf{p}, -\mathbf{J}, \dots | \quad (4.8.1)$$

car \mathbf{p} est inversé sous P et sous T alors que \mathbf{J} n'est inversé que par T. L'invariance de l'Hamiltonien sous O implique que :

$$[H, O] = 0 \quad O^{-1}HO = H \quad (4.8.2)$$

et pour une amplitude de transition de l'état a à l'état b :

$$\langle b|H|a\rangle = \langle b|O^{-1}HO|a\rangle = \langle Ob|H|Oa\rangle = \langle \bar{a}|H|\bar{b}\rangle \quad (4.8.3)$$

Pour la particule a au repos, H représente sa masse et on en tire que l'antiparticule a la même masse que la particule :

$$m_a = m_{\bar{a}} \quad (4.8.4)$$

Cette conséquence peut être utilisée comme test de la conservation sous CPT.

CPT transforme la particule au repos avec la projection du spin J_z en son antiparticule avec la projection $-J_z$. On retrouve l'orientation originale par une rotation de 180° autour des axes y ou x. Si l'on admet l'invariance sous la rotation, CPT a les mêmes effets que C sur l'état de la particule sans impliquer l'invariance sous C. La symétrie CPT est donc prédominante.

Avec les mêmes arguments que ci-dessus on peut montrer que la particule et l'antiparticule ont le même temps de vie :

$$\Gamma_a = \Gamma_{\bar{a}} \quad (4.8.5)$$

Il en est de même pour le moment magnétique. Dans le terme d'interaction e.m. : $\delta E = -g \frac{q\hbar}{2mc} \mathbf{J} \cdot \mathbf{B}$, l'opération CPT transforme $q_a \rightarrow -q_{\bar{a}}$, $\mathbf{J}_a \rightarrow -\mathbf{J}_{\bar{a}}$, $\mathbf{B} \rightarrow \mathbf{B}$ et $m_a \rightarrow m_{\bar{a}}$. Il s'en suit que :

$$g_a = g_{\bar{a}} \quad (4.8.6)$$

Les expériences du type (g-2) ont permis de tester l'invariance sous CPT avec une très grande précision. Par ex. dans les expériences (g - 2) du CERN portant sur le muon (voir chapitre 2), on a obtenu :

$$\begin{aligned} \tau_{\mu^+} / \tau_{\mu^-} &= 1.00002 \pm 0.00008 \text{ (voir chapitre 3)} \\ (g_{\mu^+} - g_{\mu^-}) / \langle g_{\mu} \rangle &= (-2.6 \pm 1.6) \cdot 10^{-8} \text{ (voir PDG 2000)} \end{aligned}$$

Différents types d'expériences ont été effectuées sur l'électron. L'expérience la plus précise⁶⁰ a donné le résultat suivant :

$$(g_{e^+} - g_{e^-}) / \langle g_e \rangle = (-0.5 \pm 2.1) \cdot 10^{-12}$$

J.H. Field et al.⁶¹ donnent un compte rendu d'un ensemble des tests d'invariance sous CPT, CP et T effectués avec les leptons chargés.

4.9 L'Isospin.

Les familles de hadrons se caractérisent entre autre par le fait que les masses des particules sont très voisines (différences de l'ordre du pour cent ou moins) : par ex. les mésons chargés et neutres, le proton et le neutron, les hypérons chargés et neutres, etc. On imagine que cette caractéristique est le reflet de la structure interne des hadrons ; néanmoins l'examen attentif des différentes familles montre qu'il ne s'agit pas uniquement d'effets e.m. Le formalisme de l'isospin apporte un éclairage détaillé sur cette question.

Le concept d'isospin a été introduit par Heisenberg en 1932. A cette époque on cherchait à interpréter les analogies de comportement de noyaux ayant un même poids atomique, c. à d. un même nombre de nucléons = $N_{\text{protons}} + N_{\text{neutrons}}$. Il

⁶⁰R.S. Van Dyck et al. Phys. Rev. Lett. 59 (1987) 26.

⁶¹J.H. Field et al. Sov. Phys. Usp. 22 (1979) 199.

s'agissait de pénétrer le secret des forces nucléaires : la force nucléaire agissant entre deux protons est-elle la même que celle agissant entre deux neutrons ? Qu'en est-il du système proton-neutron ?

Considérons le cas de **noyaux miroirs**, c. à d. pour lesquels le nombre des neutrons et le nombre des protons sont échangés, par exemple H^3 et He^3 . Si l'on se limite aux interactions à deux corps, dans H^3 on peut former les paires pn, pn et nn, dans He^3 les paires pn, pn et pp. La différence est qu'une paire nn est devenue une paire pp. Si l'on admet la **symétrie de charge** dans l'interaction nucléaire et que l'on soustrait la contribution e.m. dans la paire pp, on prédit que ces deux noyaux ont la même énergie de liaison. La mesure des énergies de liaison donne 8.49 MeV pour le H^3 et 7.73 MeV pour l' He^3 . On estime la contribution e.m. à 0.83 MeV, ce qui rend pratiquement compte de la différence entre les deux énergies de liaison mesurées.

On en déduit que les interactions p-p et n-n sont les mêmes une fois l'interaction e.m. déclenchée.

Examinons le triplet isotopique C^{12} (6p et 6n), B^{12} (5p, 7n), N^{12} (7p, 5n). Ces noyaux diffèrent par leur Z. Le bore-12 et l'azote-12 sont des noyaux miroirs. Ils se désintègrent selon le schéma de la figure 4.9.1. Les niveaux d'énergie sont donnés par rapport à l'état fondamental du C^{12} .

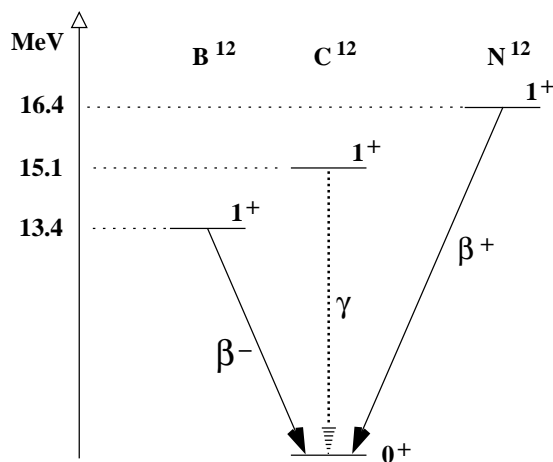


FIG. 4.9.1 – Niveaux d'énergie du triplet avec $N=12$

Les niveaux fondamentaux du bore-12 et de l'azote-12 sont voisins l'un de l'autre et situés une dizaine de MeV au-dessus du niveau fondamental du carbone -12. Le premier niveau excité du carbone-12 se place entre les niveaux fondamentaux du bore-12 et de l'azote-12. Ce triplet d'états est caractérisé par un même J^P et par des énergies comparables. Après avoir tenu compte de l'interaction e.m. (proportionnelle à $Z(Z-1)$), on conclut à l'égalité des interactions nucléaire

p-p, n-n et p-n. C'est le principe de **l'indépendance de charge**. Remarquons que la comparaison des énergies n'a de sens que pour des particules dans le même état quantique. A cet égard il y a une différence fondamentale entre les systèmes pp, nn et pn associée au principe de Pauli qui requiert l'antisymétrie des états de particules identiques. Certains états du système pn sont des états interdits aux systèmes pp et nn.

Considérons le système composé de deux nucléons identiques (pp ou nn). Le théorème spin-statistique impose l'antisymétrie de la fonction d'onde globale. La partie spatiale de la fonction d'onde a la parité $(-1)^L$, la partie spinorielle la parité $(-1)^{S+1}$. Dans le cas où $L = 0$ p. ex., cela implique que seul l'état de spin $S = 0$ est permis (c'est à dire l'état 1S_0 en notation spectroscopique habituelle). Par contre pour le système pn formé de deux nucléons différents, les deux états 1S_0 et 3S_1 sont accessibles. Il est clair que si l'on veut comparer les systèmes pp, nn et pn du point de vue énergétique, il faut considérer des configurations avec le même $^{2S+1}L_J$. Le concept de symétrie peut être étendu à la partie "espace de charge" de la fonction d'onde. Cette nouvelle partie que nous rendons explicite par la notation $|p\rangle|p\rangle$ et $|n\rangle|n\rangle$ est symétrique par l'échange des particules No 1 et No 2. En d'autres termes, elle ne modifie pas la symétrie globale de la fonction d'onde des systèmes di-proton et di-neutron, si l'on écrit la fonction globale sous la forme : $\Psi_{pp} = |\text{Espace}\rangle|\text{Spin}\rangle|p\rangle|p\rangle$ et $\Psi_{nn} = |\text{Espace}\rangle|\text{Spin}\rangle|n\rangle|n\rangle$.

Considérons maintenant le cas de deux nucléons différents (pn). Dans l'"espace de charge" on peut former des états symétrique respectivement antisymétrique :

$$a) \quad \frac{1}{\sqrt{2}} (|p\rangle|n\rangle + |n\rangle|p\rangle) \quad b) \quad \frac{1}{\sqrt{2}} (|p\rangle|n\rangle - |n\rangle|p\rangle) \quad (4.9.1)$$

Dans le cas de l'état de charge symétrique on retrouve la situation précédente, et on est amené à associer cette configuration à celle des systèmes pp et nn (seul l'état 1S_0 est permis). On a un **triplet d'états analogues**. Dans le cas de l'état de charge antisymétrique, la partie spatiale et de spin de la fonction d'onde doit être symétrique (état 3S_1). On a ici un état **singulet**.

Dans la nature on ne trouve pas d'états liés $|p\rangle|p\rangle$ ou $|n\rangle|n\rangle$. Les considérations précédentes amènent à prédire qu'il n'existe pas d'état lié 1S_0 du système $|p\rangle|n\rangle$. C'est en effet ce qu'on observe : le seul état existant de deux nucléons liés est le deuton, qui est un état 3S_1 , avec une petite composante 3D_1 (proportion 3.9%, parité +1, $L = 2$, $S = 1$, $J = 1$). L'Hamiltonien décrivant l'état de deux nucléons liés comprend donc une contribution dépendante du spin ; l'attraction est plus forte lorsque les deux spins sont alignés ($S = J = 1$) que lorsqu'ils sont antiparallèles ($S = J = 0$).

On remarque l'analogie de traitement entre la partie "espace de charge" de la fonction d'onde (partie isospinorielle) et la partie spinorielle (cas de deux spins 1/2). On peut faire la substitution :

$$|p\rangle \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |n\rangle \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (4.9.2)$$

et utiliser les mêmes règles et outils pour les **isospineurs** que pour les spineurs. La différence est que la rotation d'un spineur a lieu dans l'espace physique alors que l'isospineur tourne dans un espace imaginaire "de charge" ou "d'isospin". Un état quelconque est représenté par :

$$|N\rangle = a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (4.9.3)$$

qui signifie que l'objet a une probabilité $|a|^2$ d'être un proton, $|b|^2$ d'être un neutron. Les matrices de Pauli (renommées τ_i , pour l'occasion) permettent de construire les composantes du vecteur (opérateur) isospin \mathbf{I} :

$$I_1 = \frac{1}{2}\tau_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, I_2 = \frac{1}{2}\tau_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, I_3 = \frac{1}{2}\tau_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (4.9.4)$$

Pour caractériser un état d'isospin, on donne I^2 et I_3 : le proton et le neutron sont des états propres de ces deux opérateurs :

$$\begin{aligned} I^2|p\rangle &= I(I+1)|I = \frac{1}{2}, I_3 = +\frac{1}{2}\rangle = \frac{3}{4}|p\rangle, & I_3|p\rangle &= +\frac{1}{2}|p\rangle \\ I^2|n\rangle &= I(I+1)|I = \frac{1}{2}, I_3 = -\frac{1}{2}\rangle = \frac{3}{4}|n\rangle, & I_3|n\rangle &= -\frac{1}{2}|n\rangle \end{aligned} \quad (4.9.5)$$

On définit les opérateurs :

$$I_{\pm} = I_1 \pm iI_2 \quad (4.9.6)$$

Ils permettent de transiter entre les états de même I et différentes valeurs de I_3 .

Q : calculer $I_+|p\rangle$, $I_+|n\rangle$, $I_-|p\rangle$, $I_-|n\rangle$.

L'opérateur charge électrique est défini par :

$$Q = \frac{1}{2}\mathbb{1} + I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.9.7)$$

Les états $|p\rangle$ et $|n\rangle$ en sont des états propres avec les valeurs propres $+1$ et 0 .

L'algèbre est la même pour l'isospin $1/2$ que pour le spin $1/2$. Les composantes du vecteur isospin satisfont à la relation de commutation : $[I_i, I_j] = i \epsilon_{ijk} I_k$. Elles se transforment conformément aux règles du groupe $SU(2)$. Le proton et le neutron forment une représentation fondamentale de dimension 2.

On se demande si d'autres représentations sont possibles et quelle en est leur signification physique. Considérons les états d'isospin d'un système de deux nucléons ; on peut former les états :

$$\begin{aligned} |I = 1, I_3 = +1\rangle &= |p_1 p_2\rangle \\ |I = 1, I_3 = 0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|p_1 n_2\rangle + |n_1 p_2\rangle) && \text{l'isotriplet} \\ |I = 1, I_3 = -1\rangle &= |n_1 n_2\rangle \end{aligned} \quad (4.9.8)$$

$$|I = 0, I_3 = 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|p_1 n_2\rangle - |n_1 p_2\rangle) \quad \text{l'isosingulet} \quad (4.9.9)$$

On a numéroté les particules et simplifié l'écriture par $|a\rangle|b\rangle \rightarrow |ab\rangle$. Si l'on se rapporte à la discussion précédente, la symétrie de la partie isospinorielle de la fonction d'onde est donnée par $(-1)^{I+1}$. L'isotriplet est donc symétrique par échange des particules 1 et 2 et l'isosingulet antisymétrique.

On peut maintenant énoncer le **principe d'exclusion de Pauli généralisé**. La fonction d'onde globale des deux nucléons doit être antisymétrique par échange des deux particules, c. à d. par échange des coordonnées spatiales, des spins et des isospins :

$$\Psi(\mathbf{x}_1, \mathbf{S}_1, \mathbf{I}_1; \mathbf{x}_2, \mathbf{S}_2, \mathbf{I}_2) = -\Psi(\mathbf{x}_2, \mathbf{S}_2, \mathbf{I}_2; \mathbf{x}_1, \mathbf{S}_1, \mathbf{I}_1) \quad (4.9.10)$$

Il s'en suit que :

$$(-1)^{I+S+L} = -1 \quad (4.9.11)$$

Q. : vérifier qu'on obtient les fonctions d'onde étudiées plus haut pour L=0.

La généralisation à un ensemble de nucléons se fait par composition des vecteurs isospin, comme pour les vecteurs moment angulaire. Pour B nucléons, l'isospin du système prend différentes valeurs, séparées d'une unité situées entre 0 et B/2 pour B pair et entre 1/2 et B/2 pour B impair.

Dans le cas de deux nucléons, la charge électrique est donnée par $I_3 + 1$ (en unité de charge électronique). On peut généraliser à B nucléons :

$$Q = \frac{1}{2}B \times \mathbb{1} + I_3 \quad (4.9.12)$$

Les règles ci-dessus s'appliquent au cas d'antiprotons et d'antineutrons à condition de leur attribuer un nombre baryonique $B = -1$. Il en est de même pour le triplet composé de π^\pm et π^0 , si on attribue un $B = 0$ aux pions et si l'on identifie les états :

$$\begin{aligned} |I = 1, I_3 = +1\rangle &\leftrightarrow |\pi^+\rangle \\ |I = 1, I_3 = 0\rangle &\leftrightarrow |\pi^0\rangle \\ |I = 1, I_3 = -1\rangle &\leftrightarrow |\pi^-\rangle \end{aligned} \quad (4.9.13)$$

On dispose dès lors d'un formalisme qui permet de décrire un système mixte de nucléons et de pions.

4.10 Conservation de l'isospin.

En vue de tester le formalisme, faisons l'hypothèse que l'isospin total \mathbf{I} d'un système de particules est conservé dans l'interaction forte :

$$[H_{IF}, \mathbf{I}] = 0 \quad (4.10.1)$$

Pour simplifier la discussion, supposons négligeables les parties e.m. et faible de l'Hamiltonien, alors l'équation 4.9.1 peut être étendue à l'Hamiltonien total :

$$[H, I] = 0 \quad (4.10.2)$$

On en déduit les règles suivantes :

- 1) Des états d'énergie définie ont des valeurs bien déterminées de I^2 et de I_3 . Des états de même I et différentes valeurs de I_3 sont dégénérés en énergie.
- 2) I^2 et I_3 sont conservés pendant une transition.

Notons qu'en présence d'une perturbation e.m. du système, on aurait une violation de 4.9.2 et les états de même I ne seraient plus dégénérés en I_3 . On serait dans un cas de symétrie approchée.

Donnons une application de la règle 1) au système deux nucléons et définissons un Hamiltonien pour l'interaction nucléon-nucléon :

$$H_{int} = U + V \mathbf{I}_1 \cdot \mathbf{I}_2 \quad (4.10.3)$$

Q. : montrer que 4.9.3 est compatible avec 4.9.1.

\mathbf{I}_1 et \mathbf{I}_2 agissent sur les nucléons individuels et $\mathbf{I} = \mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2$ est l'isospin total du système.

On a :

$$I^2 = (\mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2)^2 = \mathbf{I}_1^2 + \mathbf{I}_2^2 + 2\mathbf{I}_1 \cdot \mathbf{I}_2 = \frac{3}{4} + \frac{3}{4} + 2\mathbf{I}_1 \cdot \mathbf{I}_2 \quad (4.10.4)$$

En combinant avec 4.9.3 on obtient :

$$I = 1 \quad \rightarrow \quad \mathbf{I}_1 \cdot \mathbf{I}_2 = +1/4 \quad \rightarrow \quad H_{int} = U + V/4 \quad (4.10.5)$$

$$I = 0 \quad \rightarrow \quad \mathbf{I}_1 \cdot \mathbf{I}_2 = -3/4 \quad \rightarrow \quad H_{int} = U - 3V/4 \quad (4.10.6)$$

On a donc un moyen de quantifier la différence entre l'état singulet (deuton) et l'état triplet d'isospin (états non liés) d'un système de deux nucléons.

Illustrons maintenant la règle 2) par la description des processus de diffusion pion-nucléon :

$$\pi^\pm + p \rightarrow \pi^\pm + p \quad \text{diffusion "élastique"} \quad (4.10.7)$$

$$\pi^- + p \rightarrow \pi^0 + n \quad \text{"échange de charge"} \quad (4.10.8)$$

En conséquence de la conservation de l'isospin, les valeurs de I, I_3 du système pion-nucléon dans les états initial et final de chacun de ces processus sont les mêmes. Si on avait à faire à des états purs d'isospin, l'amplitude de transition serait de la forme :

$$\langle \Psi(I', I'_3) | \mathcal{M} | \Psi(I, I_3) \rangle = \delta_{I'I_3} \delta_{I'_3 I_3} \mathcal{M}^{2I} \quad (4.10.9)$$

où I, I_3 se rapportent à l'état initial et I', I'_3 à l'état final⁶². De plus, l'élément de matrice \mathcal{M}^{2I} est invariant sous la rotation dans l'espace d'isospin, donc indépendant de I_3 d'où : $[\mathcal{M}^{2I}, I] = 0$. Avec un pion d'isospin $I = 1$ et un nucléon d'isospin $I = 1/2$ on peut former des systèmes caractérisés par un isospin total $3/2$ ou $1/2$. Utilisant une table de coefficients de Clebsch-Gordan, on trouve effectivement :

$$\begin{aligned} \left| \frac{3}{2}, +\frac{3}{2} \right\rangle &= |1, 1\rangle \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle \equiv |\pi^+ p\rangle \\ \left| \frac{3}{2}, -\frac{3}{2} \right\rangle &= |1, -1\rangle \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \equiv |\pi^- n\rangle \\ \left| \frac{3}{2}, +\frac{1}{2} \right\rangle &= \frac{1}{\sqrt{3}} |1, 1\rangle \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}} |1, 0\rangle \left| \frac{1}{2}, +\frac{1}{2} \right\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{3}} |\pi^+ n\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}} |\pi^0 p\rangle \\ \left| \frac{1}{2}, +\frac{1}{2} \right\rangle &= \sqrt{\frac{2}{3}} |1, 1\rangle \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle - \frac{1}{\sqrt{3}} |1, 0\rangle \left| \frac{1}{2}, +\frac{1}{2} \right\rangle \equiv \sqrt{\frac{2}{3}} |\pi^+ n\rangle - \frac{1}{\sqrt{3}} |\pi^0 p\rangle \\ \left| \frac{3}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle &= \frac{1}{\sqrt{3}} |1, -1\rangle \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}} |1, 0\rangle \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{3}} |\pi^- p\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}} |\pi^0 n\rangle \\ \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle &= -\sqrt{\frac{1}{3}} |1, -1\rangle \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}} |1, 0\rangle \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \equiv -\sqrt{\frac{2}{3}} |\pi^- p\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}} |\pi^0 n\rangle \end{aligned} \quad (4.10.10)$$

Pour les états plus précisément concernés dans les processus ci-dessus, on obtient en utilisant la table dans l'autre direction :

$$|\pi^+ p\rangle = \left| \frac{3}{2}, +\frac{3}{2} \right\rangle \quad (4.10.11)$$

$$|\pi^- p\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} \left| \frac{3}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}} \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \quad (4.10.12)$$

$$|\pi^0 n\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}} \left| \frac{3}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}} \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \quad (4.10.13)$$

On est donc amené à définir deux éléments de matrice associés à l'isospin total $1/2$ et $3/2$:

$$\mathcal{M}^1 = \langle \frac{1}{2}, I_3 | \mathcal{M} | \frac{1}{2}, I_3 \rangle \quad \text{et} \quad \mathcal{M}^3 = \langle \frac{3}{2}, I_3 | \mathcal{M} | \frac{3}{2}, I_3 \rangle \quad (4.10.14)$$

Dans le cas de la diffusion élastique $\pi^+ p$ seul l'état d'isospin total $3/2$ est concerné ; la section efficace de transition se réduit à :

$$\sigma_{\pi^+ p \rightarrow \pi^+ p} = K |\mathcal{M}^3|^2 \quad (4.10.15)$$

K contient les facteurs d'espace de phase, de spin, ... Si l'on néglige la différence de masse entre particules chargées, le facteur K est le même pour les réactions

⁶²L'élément de matrice pour l'isospin total I est écrit conventionnellement \mathcal{M}^{2I} .

4.9.7 et 4.9.8. Par contre, dans le cas de la diffusion élastique π^-p il intervient une composante d'isospin total 3/2 et une composante d'isospin total 1/2; on a donc :

$$\sigma_{\pi^-p \rightarrow \pi^-p} = K \left[\frac{1}{3} \mathcal{M}^3 + \frac{2}{3} \mathcal{M}^1 \right]^2 \quad (4.10.16)$$

Il en est de même dans le cas de l'échange de charge où les particules de l'état initial et de l'état final sont différentes :

$$\sigma_{\pi^-p \rightarrow \pi^0n} = \langle \pi^0n | \mathcal{M} | \pi^-p \rangle = K \left[\frac{\sqrt{2}}{3} \mathcal{M}^3 - \frac{\sqrt{2}}{3} \mathcal{M}^1 \right]^2 \quad (4.10.17)$$

On en déduit les rapports des sections efficaces :

$$\sigma_{\pi^+p \rightarrow \pi^+p} : \sigma_{\pi^-p \rightarrow \pi^-p} : \sigma_{\pi^-p \rightarrow \pi^0n} := | \mathcal{M}^3 |^2 : \left[\frac{1}{3} \mathcal{M}^3 + \frac{2}{3} \mathcal{M}^1 \right]^2 : \left[\frac{\sqrt{2}}{3} \mathcal{M}^3 - \frac{\sqrt{2}}{3} \mathcal{M}^1 \right]^2 \quad (4.10.18)$$

La figure 4.9.1 montre les valeurs mesurées des sections efficaces pion-proton et pion-deuton en fonction de l'énergie. Si l'on se place au niveau du premier pic observé à 1.23 GeV/c dans le CM, on trouve des valeurs de sections efficaces d'environ 200 mb : 25 mb : 50 mb (cette dernière est calculée en soustrayant de la section efficace totale π^-p (environ 75 mb) la section efficace élastique (25 mb)). On a donc des rapports mesurés d'environ 8 : 1 : 2. A cette énergie les processus 4.9.7 et 4.9.8 sont dominés par la formation de l'état résonnant $\Delta(m=1.232 \text{ GeV}/c, J=3/2, I=3/2)$. On peut donc admettre dans ces conditions que $\mathcal{M}^3 \gg \mathcal{M}^1$ et négliger la contribution de \mathcal{M}^1 dans les relations 4.9.16 à 4.9.18. On obtient alors des rapports calculés d'environ 9 : 1 : 2, en bon accord avec les résultats de l'expérience.

Q. : traiter de la même façon le cas de la diffusion nucléon-nucléon en analysant les réactions :

$$p + p \rightarrow \pi^+ + d, \quad p + n \rightarrow \pi^0 + d, \quad n + n \rightarrow \pi^- + d;$$

montrer que le rapport des sections efficaces de ces trois réactions, basé sur la conservation de l'isospin, est de 2 : 1 : 2;

que vaut I pour la particule ρ ? Laquelle de ces désintégrations fortes est interdite :

$$\rho^+ \rightarrow \pi^+\pi^0, \quad \rho^- \rightarrow \pi^-\pi^0, \quad \rho^0 \rightarrow \pi^-\pi^0, \quad \rho^- \rightarrow \pi^-\pi^+, \quad \rho^0 \rightarrow \pi^0\pi^0 \quad ?$$

4.11 L'isospin, SU(2) et les quarks.

On anticipe dans ce paragraphe sur l'étude de la structure en quarks des hadrons présentée au chapitre sur le modèle des quarks.

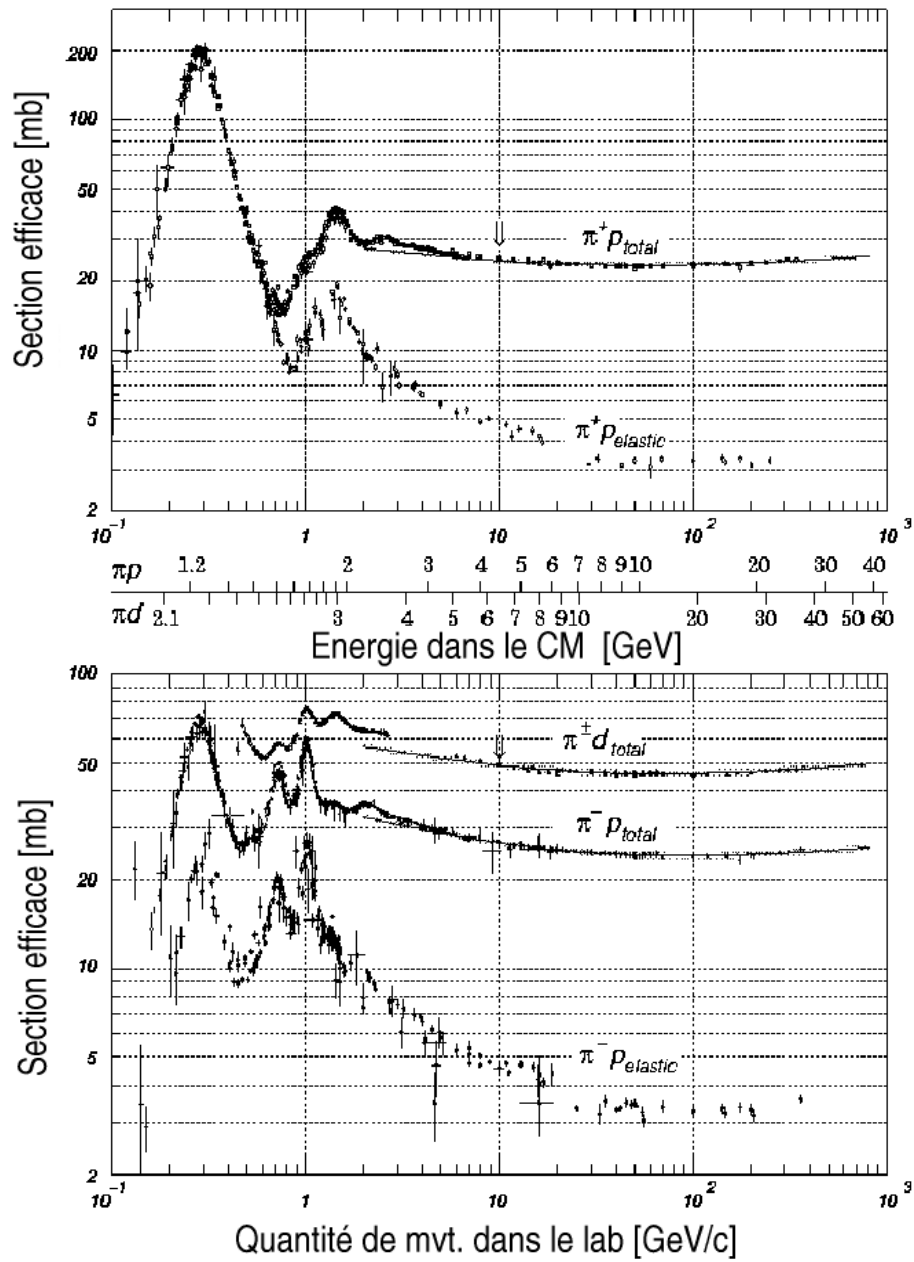


FIG. 4.10.1 – Sections efficaces totales et élastiques pion-nucléon et pion-deuton, en fonction de la quantité de mouvement du faisceau de pions et de l'énergie dans le c.m.

On peut faire remonter la raison d'être du formalisme d'isospin au fait que les quarks u et d, qui sont les constituants des particules les plus communes (p, n, pions) ont une masse très voisine. La différence de masse n'est que de quelques MeV, ce qui est petit en regard p. ex. de la masse du proton. On a :

$$|m_u - m_d| / m_p = \mathcal{O}(10^{-3}) \quad (4.11.1)$$

Du point de vue de l'interaction forte, ces deux quarks jouent un rôle identique dans la structure des hadrons. Si on néglige l'effet des interactions e.m. et faible, la symétrie $u \leftrightarrow d$ apparaît lorsqu'on compare la masse des nucléons :

$$p = uud, \quad m_p = 938 \text{ MeV}; \quad n = udd, \quad m_n = 940 \text{ MeV} \quad (4.11.2)$$

Le kaon est un autre exemple, avec le quark s dans le rôle de spectateur :

$$K^+ = u\bar{s} \quad m_{K^+} = 494 \text{ MeV} \quad K^0 = d\bar{s} \quad m_{K^0} = 498 \text{ MeV} \quad (4.11.3)$$

L'échange d'un quark u et d'un quark d a un effet de l'ordre de quelques pourcents, au maximum.

Dans le formalisme d'isospin appliqué aux quarks, on considère que (u, d) forment les éléments de base d'une représentation de $\dim = 2$ de $SU(2)$, c'est à dire :

$$u = |I = \frac{1}{2}, I_3 = +\frac{1}{2}\rangle \quad d = |I = \frac{1}{2}, I_3 = -\frac{1}{2}\rangle \quad (4.11.4)$$

Les nucléons et les pions sont des représentations obtenues par combinaison de briques u et d. Pour les hadrons formés par d'autres quarks, comme par exemple les kaons, il faut ajouter des degrés de liberté supplémentaires, ce qui conduit à recourir à des groupes de dimension supérieure : $SU(n)$, $n > 2$). L'addition de deux isospins obéit aux règles usuelles d'addition des spins. La figure 4.11.1 est une représentation graphique intuitive illustrant la composition de deux isospins (spins). Cette méthode graphique sera utile dans le cas du $SU(n)$.

L'application de la relation 4.8.12 aux quarks u et d donne une charge électrique $1/6 + 1/2 = 2/3$ et respectivement $1/6 - 1/2 = -1/3$, en attribuant la valeur $B = 1/3$ à chaque quark.

Pour le proton, système uud, I_3 vaut $1/2 + 1/2 - 1/2 = 1/2$; pour le neutron, la configuration udd donne $I_3 = -1/2$. On peut donc associer la paire p, n à un doublet $I = 1/2$.

Si l'on additionne 3 (iso)spin $1/2$, on obtient un quadruplet $3/2$ et deux doublets $1/2$, ce qui en utilisant la dimension des représentations ($\dim = 2I + 1$), s'écrit formellement :

$$\mathbf{2} \otimes \mathbf{2} \otimes \mathbf{2} = (\mathbf{3} \oplus \mathbf{1}) \otimes \mathbf{2} = \mathbf{4} \oplus \mathbf{2} \oplus \mathbf{2} \quad (4.11.5)$$

On peut associer l'un des doublets au système p, n, et le quadruplet au système $\Delta^{++}, \Delta^+, \Delta^0, \Delta^-$ composés des quarks uuu, uud, udd et ddd respectivement.

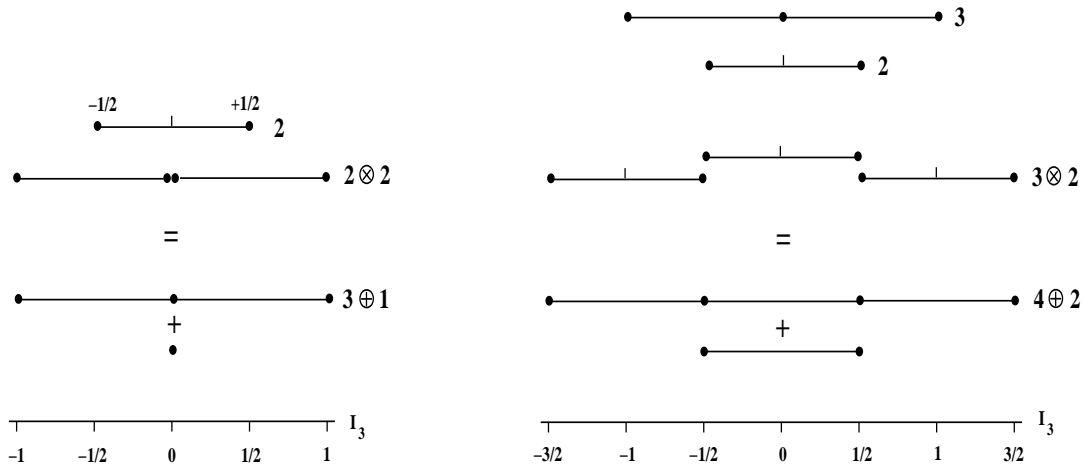


FIG. 4.11.1 – A gauche : composition de deux isospins $1/2$. A droite composition d'un isospin $1/2$ et d'un isospin 1

Les différents états de charge du Δ ont des masses très proches d'environ 1232 MeV.

Pour distinguer le n du Δ^0 , p. ex., il faut écrire explicitement la composition SU(2) des deux hadrons, ce qui sera fait dans le chapitre sur le modèle des quarks.

Si l'on additionne un quark et un antiquark, on peut former un triplet d'isospin $I = 1$ et un singulet d'isospin $I = 0$. Dans la nature on trouve effectivement le triplet des pions, et le η comme candidat à la position du singulet.

Considérons maintenant le système du kaon. Dans ce cas l'isospin ne s'applique qu'aux composantes u et d; la composante s est à considérer à part. En incluant l'étrangeté, la relation (4.8.12) devient :

$$Q = \frac{1}{2}(B + S) \times \mathbb{1} + I_3 = \frac{1}{2}Y \times \mathbb{1} + I_3 \quad (4.11.6)$$

Y est appelée l'**hypercharge**; c'est le barycentre de la charge du multiplet.

Les K^\pm ont $B=0$ et $S = \pm 1$, donc $Q = (0 \pm 1)/2 \pm \frac{1}{2} = \pm 1$. Pour les quarks constituants on a :

$$Q \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1/3 + 0 \\ 1/3 + 0 \end{pmatrix} \pm \frac{1}{2} = \begin{pmatrix} +2/3 \\ -1/3 \end{pmatrix}, \quad Q(s) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} - 1 \right) + 0 = -\frac{1}{3}$$

On peut dès lors anticiper la forme que prend l'opérateur Q quand on prend en compte l'ensemble des saveurs de quark du SM :

$$Q = \frac{1}{2}(Bar. + Str. + Cha. + Bot. + Top.) \times \mathbb{1} + I_3, \quad avec : \quad (4.11.7)$$

$Bar.$ $\equiv B$ dans (4.10.6) (le nombre baryonique),
 $Str.$ = "Strangeness" (l'étrangeté),
 $Cha.$ = "Charm",
 $Bot.$ = "Bottomness",
 $Top.$ = "Topness".

D'autre part, on s'en tient à la définition : $Y = Bar. + Str. (\equiv B + S)$.

4.12 La parité G .

On a vu que l'opérateur conjugaison de charge C n'a des fonctions propres que pour les particules indiscernables de leur antiparticule. Il s'agit donc de particules neutres, comme le π^0 :

$$C|\pi^0\rangle = C_{\pi^0}|\pi^0\rangle = +1|\pi^0\rangle \quad (4.12.1)$$

Par contre, un π^+ est transformé en π^- et *vice versa* :

$$\begin{aligned} C|\pi^+\rangle &= |\pi^-\rangle \\ C|\pi^-\rangle &= |\pi^+\rangle \end{aligned} \quad (4.12.2)$$

Mais il y a une autre façon de transformer un π^+ en π^- : on peut effectuer une rotation de 180° dans l'espace d'isospin, par exemple autour de l'axe y associé à I_2 (on aurait pu choisir l'axe x associé à I_1) :

$$R_2(\pi) = \exp(i\pi I_2) \quad (4.12.3)$$

l'opération a pour effet de changer le signe de I_3 . L'application de $R_2(\pi)$ à l'état $|I_1, I_3 = 0\rangle$ donne :

$$R_2(\pi)|I, 0\rangle = (-1)^I|I, 0\rangle \quad (4.12.4)$$

Q. : démontrer (4.11.4).

On définit l'opération combinée :

$$G = C R_2(\pi) \quad (4.12.5)$$

G est appelée la parité G ou aussi l'isoparité.

On obtient pour les pions neutres :

$$\begin{aligned} G|\pi^0\rangle &= C R_2(\pi)|\pi^0\rangle = C R_2(\pi)|I = 1, I_3 = 0\rangle = C(-1)^1|1, 0\rangle \\ &= -C|1, 0\rangle = -C|\pi^0\rangle = -|\pi^0\rangle \end{aligned}$$

Pour les pions chargés on a une liberté de choix de la phase, que l'on utilise de façon à obtenir la même valeur propre -1 que pour le pion neutre. La famille du pion se caractérise donc par :

$$G|\pi\rangle = G_\pi|\pi\rangle \quad \text{où} \quad G_\pi = -1 \quad (4.12.6)$$

G est un nombre quantique multiplicatif; pour un système de N pions chargés ou neutres, on a :

$$G_N = (-1)^N \quad (4.12.7)$$

D'une façon générale les mésons sans Etrangeté, sans "Charm", sans "Bottomness", etc... sont des états propres de G, avec les valeurs propres :

$$G = (-1)^I C_0 \quad (4.12.8)$$

où C_0 est la parité C de l'élément neutre du multiplet d'isospin.

G est conservée dans l'interaction forte; par contre G est violée dans les interactions électromagnétique et faible. Illustrons cette prédiction par quelques exemples.

Le méson ρ est caractérisé par : $I=1$, $C_0=-1$, donc $G_\rho=+1$. La désintégration forte $\rho \rightarrow \pi\pi$ est permise car l'ensemble de deux pions a une parité G positive. Par contre la désintégration forte du ρ en un nombre impair de pions est interdite.

Nous avons vu que la paire fermion-antifermion a une conjugaison de charge $C=(-1)^{L+S}$ (4.4.11).

Le système nucléon-antinucleon forme un isomultiplet $I=1$; Il est donc un état propre de G, avec les valeurs propres :

$$G = (-1)^{I+L+S} = (-1)(-1)^{L+S} \quad (4.12.9)$$

En conséquence de la conservation de G, le système $N\bar{N}$ dans l'état de moment orbital $L=0$ s'annihile en un nombre impair de pions si $S=0$ (singulet de spin) et en un nombre pair de pions si $S=1$ (triplet de spin).

On voit qu'à l'intérieur des limites de son champ d'application, l'opérateur G présente de l'intérêt, en raison de la contrainte de sélection qu'il introduit dans certains processus gouvernés par l'interaction forte.

4.13 Le théorème spin et statistique

Le précurseur de ce théorème est le principe d'exclusion de Pauli, qui s'applique à des fermions identiques, comme les électrons de l'atome. Le théorème qui associe spin et statistique a été énoncé par Schwinger en 1951. A la base il y a le principe de causalité⁶³ : les messages entre deux particules ne peuvent pas se propager plus vite que c . La règle est la suivante :

les particules à spin entier (les bosons) sont soumis à la statistique de Bose-Einstein, les particules à spin demi-entier (fermions) à celle de Fermi-Dirac.

⁶³Voir par ex., K. Gottfried, V.F. Weisskopf, Concepts of Particle Physics, Vol II, Appendix IV.

Le choix de la statistique détermine la symétrie de la fonction d'onde qui décrit une paire de particules identiques lorsqu'on échange leur rôle. On peut imaginer qu'un ange, vivant dans l'univers U , numérote deux particules avec les étiquettes 1 et 2 et que lui seul peut lire les étiquettes. Un petit diable décide de créer un autre univers, U' . Dans U' les deux particules ont été échangées : la 1 exactement dans la même configuration que la 2 avait dans U , et réciproquement pour la 2. Les fonctions d'onde qui décrivent le système (1,2) dans U' et dans U sont de même signe si les deux particules sont des bosons et de signe opposé si les deux particules sont des fermions :

$$\begin{aligned} & \Psi \rightarrow +\Psi \quad \text{pour les bosons} \\ \text{échange } 1 \longleftrightarrow 2 : & \\ & \Psi \rightarrow -\Psi \quad \text{pour les fermions} \end{aligned} \tag{4.13.1}$$

La fonction d'onde d'un système est composée de sa partie spatiale et des parties correspondant aux degrés de libertés internes (spin, isospin, couleur, ...) :

$$\psi_i = \psi(\text{espace})_i \chi(\text{spin})_i t(\text{isospin})_i \dots$$

L'échange de deux particules du système signifie transporter les identificateurs (position, nombres quantiques) de la particule 1 sur la particule 2 et *vice et versa* :

$$\begin{aligned} \Psi(\mathbf{x}_1, \mathbf{S}_1, \mathbf{I}_1; \mathbf{x}_2, \mathbf{S}_2, \mathbf{I}_2) & \longrightarrow \pm \Psi(\mathbf{x}_2, \mathbf{S}_2, \mathbf{I}_2; \mathbf{x}_1, \mathbf{S}_1, \mathbf{I}_1) \\ \Psi(1, 2) & \longrightarrow \pm \Psi(2, 1) \end{aligned} \tag{4.13.2}$$

Appelons ψ_a la fonction d'onde qui représente l'état de la particule a et ψ_b la fonction d'onde qui représente l'état de la particule b . Ces particules peuvent être des bosons ou des fermions ; à priori, il peut s'agir de bosons (fermions) différents ou identiques. On obtient les états du système des deux particules en formant :

$$\begin{aligned} \Psi_{\text{bosons}} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|\psi_a\rangle_1 |\psi_b\rangle_2 + |\psi_b\rangle_1 |\psi_a\rangle_2) \\ \Psi_{\text{fermions}} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|\psi_a\rangle_1 |\psi_b\rangle_2 - |\psi_b\rangle_1 |\psi_a\rangle_2) \end{aligned}$$

S'il s'agit de deux fermions identiques $\psi_a = \psi_b$, on a $\Psi_{\text{fermions}} = 0$. On est ramené au principe de Pauli. Les conséquences de ce théorème sont nombreuses dans les différents secteurs de la physique. Pour des exemples d'applications en physique des particules.

Il faut aussi mentionner les tentatives récentes de mettre en évidence les effets de la statistique de Bose sur l'émission de pions dans des collisions à haute énergie. Pour des pions identiques (même charge) qui sont émis dans une région de fragmentation "restreinte", on s'attend à ce que la distribution angulaire relative soit modifiée par la statistique de Bose.

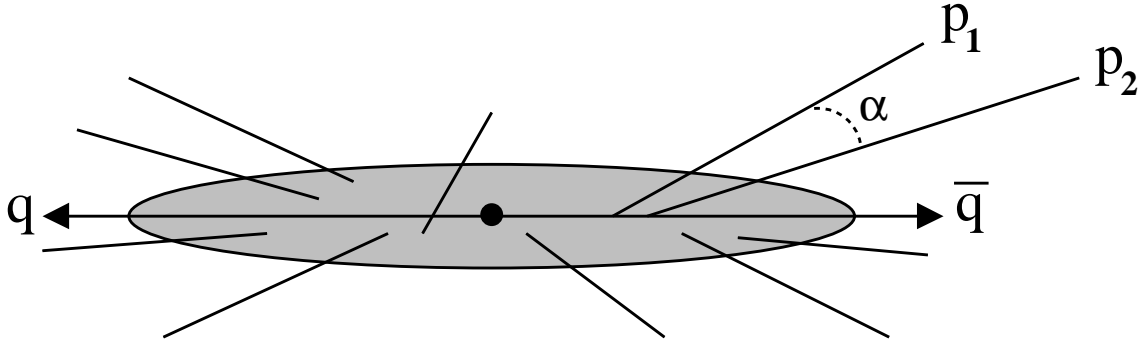


FIG. 4.13.1 – Production de hadrons par fragmentation dans le processus $e^+e^- \rightarrow \bar{q} + q$

La fragmentation d'une paire quark-antiquark issue d'une collision électron positron génère des jets d'hadrons (voir figure 4.13.1). On s'intéresse à la distribution des angles α entre les paires de pions chargés de même signe et de signes opposés. Pour que l'effet de "condensation" de la statistique de Bose soit actif, il faut que les particules proviennent de la même source. On s'attend à observer un effet non nul lorsque les deux particules ont une quantité de mouvement proche en module et direction, donc presque au repos dans leur c.m. (large recouvrement de leur fonction d'onde).

En pratique on considère une fonction de corrélation :

$$R(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) = \frac{\sigma(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2)}{\sigma(\mathbf{p}_1)\sigma(\mathbf{p}_2)}$$

qu'on paramétrise par la fonction :

$$R(Q) = 1 + \lambda \exp(-r^2 Q^2) \quad (4.13.3)$$

où $Q^2 = (p_1 + p_2)^2 - 4m_\pi^2 = M_{\pi\pi}^2 - 4m_\pi^2$, un petit Q^2 correspond à des particules "proches" ; r représente les dimensions de la région source. Enfin λ mesure l'importance de la corrélation.

Les figures 4.13.2 et 4.13.3 montrent le résultat d'expériences au LEP. Dans la figure, $R_\pm(Q) = N_{\pm\pm}(Q)/N_{+-}(Q)$, où $N_{\pm\pm}$ et N_{+-} sont les nombres de paires de pions chargés de même signe et de signes opposés. Pour éliminer le biais pouvant provenir de corrélations résiduelles dans l'échantillon de référence, les valeurs de R_\pm dans les données ont été rapportées à celles prédites par simulation Monte Carlo. De plus, le facteur Corr représente des corrections pour des effets coulombiens et pour la contamination en paires mal identifiées. L'accumulation près de l'origine est compatible avec un regroupement important des bosons identiques. Le résultat de l'ajustement donne $r = 0.8$ fm pour la partie de la source affectée par l'effet. Le paramètre de corrélation λ s'étale sur une plage importante ; l'interprétation de l'effet est encore incertaine.

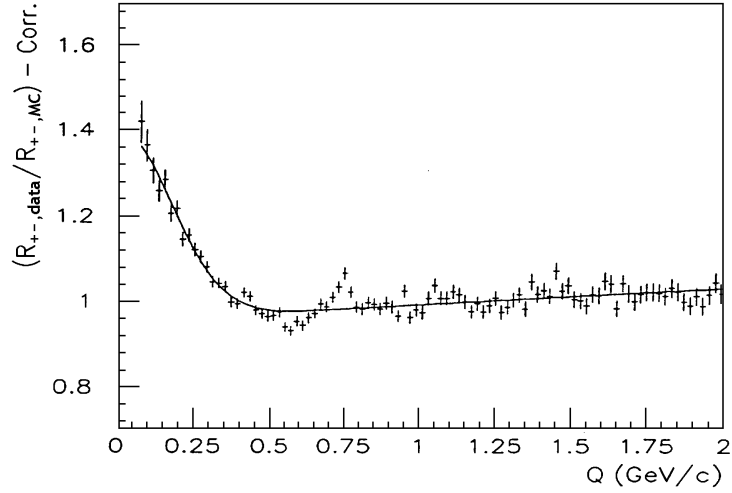


FIG. 4.13.2 – Rapport du nombre de paires de pions de même signe et de signes opposés en fonction de la variable $Q = (M_{\pi\pi}^2 - 4m_\pi^2)^{1/2}$, où $M_{\pi\pi}$ est la masse effective des deux pions

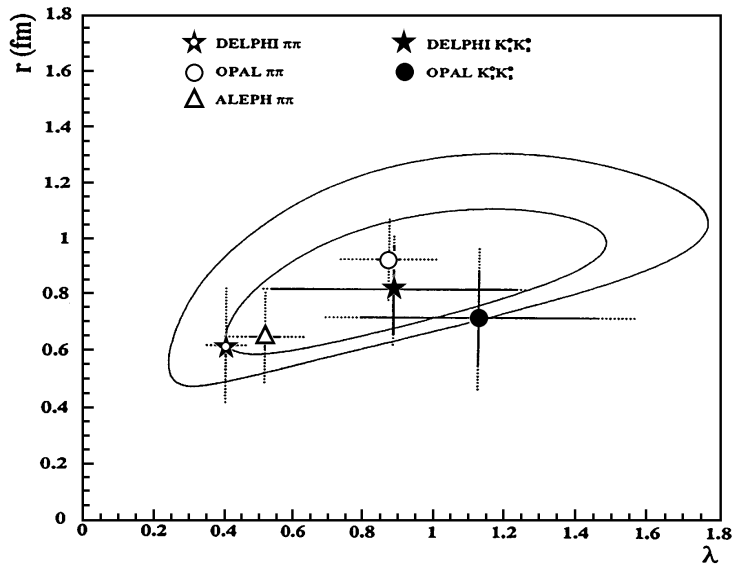


FIG. 4.13.3 – Taille de la région source affectée en fonction du paramètre de corrélation ; comparaison des résultats de différentes expériences au LEP et portant sur des paires de pions et des paires de kaons

5 L'interaction électromagnétique (e.m.)

5.1 Introduction

Le graphe de la figure 5.1.1 représente la diffusion e.m. d'une particule sur une autre. Le quantum responsable du processus est un photon, c'est à dire le quantum de l'interaction e.m.. Le processus n'est possible que si les particules sont chargées ou si elles sont composées de particules chargées, bien que globalement neutres. Dans ce dernier cas, les particules peuvent avoir un moment magnétique non nul et l'interaction e.m. avoir lieu via la composante "magnétique" (p. ex. : le neutron a une charge nulle mais un moment magnétique non nul).

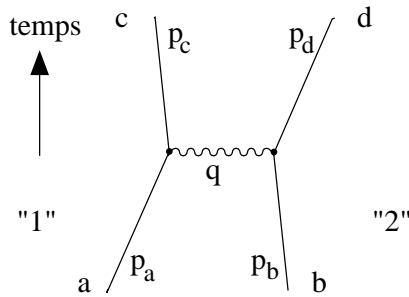


FIG. 5.1.1 – Diagramme de la diffusion e.m. de deux particules chargées

Nous voulons calculer, p. ex., la probabilité que la particule 2 (qui va de b à d) soit diffusée dans l'angle solide $\Delta\Omega$. Imaginez une expérience dans laquelle la particule 1 (de a à c) est un noyau de charge Z appartenant à une cible fixe et la particule 2 un électron appartenant à un faisceau. Les noyaux cible sont au repos dans le référentiel du laboratoire. Un ensemble d'aimants focalisent le faisceau d'électrons sur la cible. Le détecteur des électrons est placé sous l'angle θ par rapport à l'axe du faisceau et couvre la portion d'angle solide $\Delta\Omega$. Le flux d'électrons incidents est $I_b = n_b v_b$ où n_b est la densité des particules dans le faisceau et v_b leur vitesse. Soit N le nombre de noyaux contenus dans la portion de la cible touchée par le faisceau. Le taux des électrons diffusés dans le détecteur est donné par :

$$\Delta W = I_b N \iint_{\Delta\Omega} \left(\frac{d\sigma(\theta)}{d\Omega} \right) d\Omega, \quad d\Omega = \sin\theta \, d\theta \, d\phi \quad (5.1.1)$$

où $\frac{d\sigma(\theta)}{d\Omega}$ est la **section efficace différentielle** de diffusion e.m. sous l'angle θ . On fait ici l'hypothèse que le détecteur est sensible à toute la gamme des énergies accessibles à la particule diffusée d (cela n'est souvent pas le cas car il y a un seuil

de comptage, p. ex. à cause du bruit ; on doit alors introduire une intégration supplémentaire du type : $\int_{E_{seuil}}^{E_{max}} dE$)

On a aussi admis que le taux de réaction ne dépend pas de l'angle azimutal ϕ : c'est le cas pour un faisceau non polarisé et pour un détecteur insensible à la polarisation des particules diffusées. On a aussi intégré sur la dispersion en énergie du faisceau. Le terme $d\sigma/d\Omega$ inclut l'effet des spins des particules, etc..

Dans cet exemple, la **section efficace totale**, σ , serait obtenue en intégrant sur l'angle solide 4π . Puisque le taux W a la dimension temps⁻¹, σ a la dimension (temps⁻¹) / (vitesse \times volume⁻¹) = surface. L'unité usuelle est le barn = 10⁻²⁴ cm² ou l'un de ses sous-multiples (mb, μ b, nb,...) .

Les prédictions théoriques de la section efficace sont basées sur la règle d'or de Fermi. Le facteur densité d'état (ou espace de phase) est donné dans l'annexe C.4. Les caractéristiques physiques du processus sont essentiellement contenues dans l'élément de matrice (ou amplitude de transition) \mathcal{M} :

$$d\sigma = \frac{2\pi}{\hbar} |\mathcal{M}|^2 \times d(\text{espace de phase}) \quad (5.1.2)$$

Dans le c.m. de la réaction, on obtient :

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{\hbar c}{8\pi} \right)^2 \frac{Stat}{(E_a + E_b)^2} \frac{|\mathbf{p}_2|}{|\mathbf{p}_1|} \times |\mathcal{M}|^2 \quad (5.1.3)$$

Stat est un facteur statistique qui vaut 1/2 (1) si les deux particules de l'état final sont identiques (différentes). On a appelé $\mathbf{p}_1 \equiv \mathbf{p}_a = -\mathbf{p}_b$, $\mathbf{p}_2 \equiv \mathbf{p}_c = -\mathbf{p}_d$.

Pour le **cas d'une diffusion élastique**, $|\mathbf{p}_1| = |\mathbf{p}_2|$ et on peut introduire $E_i = E_a + E_b$.

Cherchons maintenant à expliciter la forme de \mathcal{M} sur la base de nos connaissances de l'interaction e.m.. On peut deviner les composantes en jeu. D'une part, pour que la diffusion ait lieu il faut que les deux particules soient "présentes" dans la même région d'espace temps. En termes de "quasi-mécanique quantique", leurs courants de probabilité doivent se croiser pendant un temps suffisamment long pour qu'une certaine quantité de quadrimoment soit transférée sous forme d'un photon virtuel. L'expression de \mathcal{M} doit donc contenir une intégrale du produit des deux densités de courant de probabilité : $\mathcal{M} \propto \int d^4x j_1 j_2$. D'autre part, l'interaction étant de type e.m., un terme proportionnel à la charge de chaque particule doit être introduit comme facteur multiplicatif à chaque j, qui représenteront le courant e.m..

Il reste à inclure le photon virtuel échangé, caractérisé par le quadrivecteur :

$$q^\mu = (p_a - p_c)^\mu = (p_d - p_b)^\mu \quad (5.1.4)$$

Pour ce faire on insère une fonction f(q) (à déterminer) dans l'expression de l'amplitude, qui prend la forme :

$$\mathcal{M} = \alpha e_{ac} e_{bd} \int d^4x (j_{ac}) f(q) (j_{bd}) \quad (5.1.5)$$

α est un facteur qui représente la force du couplage e.m., e_i sont les charges des particules $a=c$ et $b=d$.

La relation 5.1.5 peut être comparée à l'expression classique de l'interaction entre deux courants électriques.

L'examen de la relation (5.1.5) appelle quelques remarques.

- a) Les courants j_{ac} et j_{bd} sont des 4-vecteurs et $f(q)$ un scalaire; \mathcal{M} est donc une amplitude invariante de Lorentz.
- b) L'expression de \mathcal{M} est symétrique en j_{ac} et j_{bd} et dépend de la charge portée par chaque particule. Une différence de masse entre ces particules n'intervient que dans les facteurs cinématiques (espace de phase).
- c) Si les particules sont identiques, il faut faire intervenir des diagrammes croisés, car on ne peut pas distinguer les trajectoires ac et bd . De plus il faut symétriser ou antisymétriser l'amplitude, selon la nature des particules (bosons ou fermions).

5.2 L'interaction e.m. au premier ordre de perturbation

(Voir ref. 6)

Considérons le cas de deux particules a ($\equiv c$) et b ($\equiv d$) différentes, supposées ponctuelles et sans spin; par exemple convenons que a (c) est un pion positif et b (d) est un kaon positif, supposés "sans structure".

Si ces particules (pseudo)scalaires se propagent librement et avec une énergie définie, leur fonction d'onde s'écrit :

$$\Psi_i = N_i \exp(-ip_i x) \quad i = a, b, c, d \quad (5.2.1)$$

N est un facteur de normalisation que l'on discute dans l'annexe C.3. Les fonctions 5.2.1 sont des solutions de l'équation de Klein-Gordon (2.2.10).

Pour une introduction au sujet, imaginons l'interaction e.m. représentée par la forme simple d'un potentiel oscillant $V(t)=\exp(-i\omega t)$. En présence de l'interaction l'équation de Klein-Gordon devient :

$$(\square + m^2)\Psi = -V(t)\Psi \quad (5.2.2)$$

Un résultat de la théorie de perturbation est qu' au premier ordre l'amplitude associée à la perturbation V est donnée par :

$$\mathcal{M} = -i \int d^4x \Psi_c^* V \Psi_a \quad (5.2.3)$$

Si l'on remplace dans 5.2.3 Ψ_a et Ψ_c par la fonction d'onde 5.2.1 ⁶⁴ et si l'on ne considère que la partie dépendante du temps, l'intégrale dans 5.2.3 devient :

$$\int d^4x \Psi_c^* V \Psi_a \propto \int dt \exp\{i(E_c - \omega - E_a)\} = 2\pi\delta(E_c - \omega - E_a) \quad (5.2.4)$$

⁶⁴les particules sont décrites en dehors de la région d'interaction

On a donc un transfert d'énergie du potentiel vers la particule tel que : $E_c = E_a + \omega$.

Remarquez que l'on obtient un résultat identique si l'on considère un pion négatif et que l'on applique la convention de Feynman qui identifie l'antiparticule ayant une énergie positive avec une particule remontant le temps ayant une énergie négative. (voir figure 5.2.1).

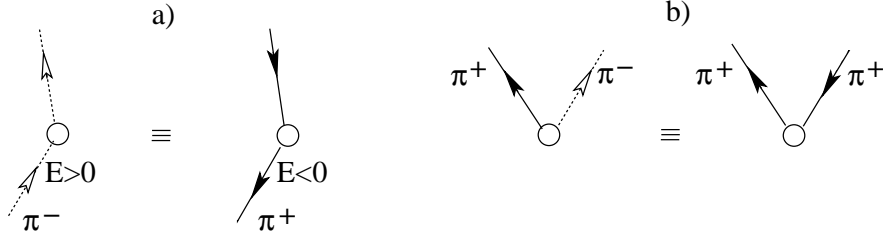


FIG. 5.2.1 – Représentation conventionnelle d'une particule et d'une antiparticule dans un diagramme de Feynman : **a)** au vertex d'une diffusion ; **b)** au vertex d'une création de paire

L'inversion des quadrivecteurs : $p_i = (E_i, \mathbf{p}_i) \rightarrow (-E_i, -\mathbf{p}_i)$ et l'échange des états "initial" et "final" (on parle souvent d'états d"entrée" et de "sortie") donne un résultat exprimant correctement la conservation de l'énergie (exercice).

De même, on obtient (figure 5.2.1 b) pour la création de paires le résultat :

$$(5.2.5)$$

$$\int d^4x \Psi_{\pi^+ \text{sortie}}^* V \Psi_{\pi^+ \text{entrée}} = \int d^4x e^{+iE_{\pi^+}t} e^{-i\omega t} e^{-i(-E_{\pi^-})t} \propto 2\pi\delta(E_{\pi^+} - \omega + E_{\pi^-})$$

L'énergie ω communiquée par le potentiel d'interaction se répartit entre les deux pions de la paire créée.

Nous pouvons maintenant étendre les considérations ci-dessus au cas de l'interaction e.m. décrite par un quadripotiel A^μ . Si l'on effectue le remplacement (couplage minimal) $\partial^\mu \rightarrow \partial^\mu + ieA^\mu$ dans l'équation de Klein-Gordon, on obtient :

$$(\square + m^2)\Psi = -ie(\partial_\mu A^\mu + A^\mu \partial_\mu)\Psi + e^2(A^\mu)^2\Psi \quad (5.2.6)$$

Q. : démontrer l'équation 5.2.6.

On peut tenter une première approximation en laissant de côté le terme en $(A^\mu)^2$ et en remplaçant dans l'équation 5.2.3 V par :

$$V = ie(\partial_\mu A^\mu + A^\mu \partial_\mu) \quad (5.2.7)$$

$$\mathcal{M} = -i \int d^4x \Psi_c^* [ie(\partial_\mu A^\mu + A^\mu \partial_\mu)] \Psi_a \quad (5.2.8)$$

Effectuons l'intégration quadridimensionnelle par parties du premier terme de la somme :

$$\int d^4x \Psi_c^* \partial_\mu A^\mu \Psi_a = \Psi_c^* A^\mu \Psi_a \Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int d^4x (\partial_\mu \Psi_c^*) A^\mu \Psi_a$$

Le terme de surface est nul si A est nul à l'infini, dans l'espace et dans le temps. L'amplitude devient :

$$\mathcal{M} = e \int d^4x [\Psi_c^* (\partial_\mu \Psi_a) - (\partial_\mu \Psi_c^*) \Psi_a] A^\mu = -i \int d^4x j_\mu A^\mu \quad (5.2.9)$$

Après substitution des fonctions d'onde Ψ_a et Ψ_c par leur expression pour des particules libres (5.2.1) :

$$\mathcal{M} = -ie N_a N_c (p_a + p_c)_\mu \int d^4x e^{-iqx} A^\mu \quad (5.2.10)$$

avec le quadrivecteur de transfert q^μ donné par :

$$q^\mu = (p_a - p_c)^\mu \quad (5.2.11)$$

On définit le (quadri)courant e.m. par :

$$j^\mu = ie [\Psi_c^* (\partial^\mu \Psi_a) - (\partial^\mu \Psi_c^*) \Psi_a] \quad (5.2.12)$$

C'est une extension du concept de courant donné au chapitre 2 (voir 2.2.8), qui s'applique lorsqu'on est en présence d'interaction (graphe de la figure 5.2.2).

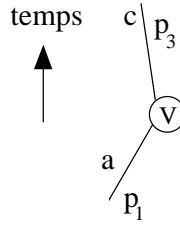


FIG. 5.2.2 – Vertex de diffusion

On veut décrire l'évolution du courant de la "charge électrique" transportée successivement par a et c, le photon ayant une charge nulle. Pour ce faire, on construit l'élément de matrice du courant e.m. évalué entre l'état initial a et l'état final c :

$$j^\mu(\text{pion}) \equiv \langle c | j^{em\mu} | a \rangle = \langle \text{pion}(p_c) | j^{em\mu} | \text{pion}(p_a) \rangle \quad (5.2.13)$$

Notons que le courant e.m. est conservé (la charge de a est la même que celle de c) :

$$\partial_\mu j^\mu = 0 \quad (5.2.14)$$

On verra que dans l'interaction faible, le courant faible peut impliquer des particules ayant des charges électriques différentes (p.ex., un électron devenant un neutrino électronique).

La forme du courant initial pour des états représentés par des ondes planes se déduit de 5.2.13 :

$$(5.2.15)$$

$$j_{ac}^\mu = eN_a N_c (p_a + p_c)^\mu \exp\{-i(p_a - p_c)x\} = eN_a N_c (p_a + p_c)^\mu \exp\{-iqx\}$$

Il reste à exprimer le champ A^μ créé par "l'autre" particule et introduire le résultat dans 5.2.10. L'expression finale doit être symétrique au niveau des courants des deux particules, comme on l'a mentionné en 5.1. On s'inspire à nouveau des concepts de l'électrodynamique classique ; le courant de "l'autre" particule génère le champ A^μ sous la contrainte des équations de Maxwell⁶⁵ :

$$\partial_\mu \partial^\mu A^\nu = j^\nu \quad \text{ou} \quad \square A^\nu = j^\nu \quad (5.2.16)$$

On a adopté la condition de jauge "de Lorentz" :

$$\partial_\mu A^\mu = 0 \quad (5.2.17)$$

Pour l'expression du courant final on a par symétrie une forme similaire à 5.2.15 :

$$j_{bd}^\mu = eN_b N_d (p_b + p_d)^\mu \exp\{i(p_d - p_b)x\} = eN_b N_d (p_b + p_d)^\mu \exp\{iqx\} \quad (5.2.18)$$

Le moment de transfert q est tel que :

$$q^\mu = (p_d - p_b)^\mu = (p_a - p_c)^\mu \quad (5.2.19)$$

On remarque que la dépendance spatio-temporelle dans l'expression du courant est contenue dans le terme de l'exponentielle, et que $\square \exp(iqx) = (-q^2) \exp(iqx)$. On en déduit que le potentiel A^μ qui satisfait 5.2.16 est de la forme :

$$A^\mu = -\frac{1}{q^2} j_{bd}^\mu \quad (5.2.20)$$

⁶⁵courant exprimé en unités naturelles et "rationalisé", ce qui élimine le $1/4\pi$ et permet de simplifier les notations. Voir J.D.Jackson : Classical Electrodynamics. Appendix on Units and Dimensions.

En substituant 5.2.18 et 5.2.20 dans 5.2.10, on obtient pour l'amplitude :

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &= +i \int d^4x j_{ac\mu} \frac{1}{q^2} j_{bd}^\mu = & (5.2.21) \\ &= ie^2 N_a N_b N_c N_d (p_a + p_c)^\mu (p_b + p_d)_\mu \frac{1}{q^2} \int d^4x e^{-i(p_a - p_c)x} e^{i(p_d - p_b)x} \end{aligned}$$

L'intégrale donne un facteur $(2\pi)^4 \delta(p_c + p_d - p_a - p_b)$, qui exprime la conservation de la quantité de mouvement et de l'énergie. Les N_i sont des facteurs de normalisation relatifs aux particules entrantes et sortantes. Par la suite ces facteurs disparaissent des expressions, absorbés par des facteurs cinématiques décrits dans l'annexe C.3. Le Dirac $\delta(p_c + p_d - p_a - p_b)$ disparaît également, la conservation du quadrimoment étant implicitement admise.

5.3 Le diagramme de Feynman pour l'amplitude de diffusion e.m. $\pi^+ K^+ \rightarrow \pi^+ K^+$

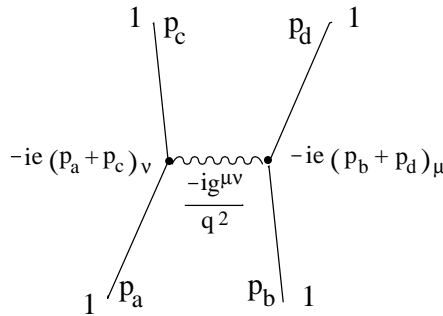


FIG. 5.3.1 – Diagramme de Feynman pour la diffusion de deux bosons

L'amplitude invariante de Lorentz de la diffusion e.m. $\pi^+ K^+ \rightarrow \pi^+ K^+$ au premier ordre en $\alpha_{em} = e^2/4\pi$ s'écrit sous sa forme "à la Feynman" :

$$\mathcal{M} = (-i)e(p_a + p_c)_\mu \frac{-ig^{\mu\nu}}{q^2} (-i)e(p_b + p_d)_\nu \quad (5.3.1)$$

On reconnaît dans 5.2.21 les différents éléments constitutifs de 5.3.1. R. Feynman a imaginé de décrire picturalement ces éléments dans un graphe tel que celui de la figure 5.3.1.

Spin	Description	Représentation graphique	Facteur multiplicatif
Lignes externes			
0	Boson ou antiboson		1
$\frac{1}{2}$	Fermion entrée (initial) sortie (final)		$u(p)$ $\bar{u}(p)$
	Antifermion sortie (initial) entrée (final)		$\bar{v}(p)$ $v(p)$
1	Boson ou antiboson photon inclu		ϵ_μ ϵ_μ^*
Lignes internes			
0	Boson		$-i/(k^2 - m^2)$
$\frac{1}{2}$	Fermion		$i \frac{\gamma^\mu k_\mu + m}{k^2 - m^2}$
1	Boson massif		$i \frac{-g_{\mu\nu} + k_\mu k_\nu / m^2}{k^2 - m^2}$
1	Photon		$i(-g_{\mu\nu} / k^2)$
Vertex électrodynamique	Particules ponctuelles		
0-0			$-ie(p + p')^\mu$
$\frac{1}{2} - \frac{1}{2}$			$-ie\gamma^\mu$
1-1			$-ie[(p + p')^\mu g_{\alpha\beta}$ $- p'_\alpha g_\beta^\mu - p_\beta g_\alpha^\mu]$

FIG. 5.3.2 – Règles pour les diagrammes de Feynman. Les facteurs multiplicatifs sont utilisés dans la construction de l'élément de matrice $-i\mathcal{M}$. Notons que $u(p)$ et $v(p)$ sont des spineurs de fermion et d'antifermion. e_μ est le quadrivecteur de polarisation d'un boson de spin 1

L'application dans la jauge de Lorentz des règles de Feynman suivantes (voir figure 5.3.2) permet de retrouver la relation 5.3.1 ; on introduit :

- 1) un facteur 1 pour tout boson externe, entrant ou sortant (et supposé ponctuel) ;
- 2) un terme $-ie(p+p')$ pour chaque vertex impliquant 2 particules de spin 0 et un photon interne ;
- 3) un **propagateur** $1/q^2$ pour le photon (jauge de Lorentz).

Le facteur q^2 , parfois appelé "la masse au carré du photon virtuel", est non nul. La forme $1/q^2$ vient du choix de la jauge de Lorentz. Cette forme serait différente pour d'autres choix de jauge, mais les résultats physiques seraient les mêmes. Le facteur $g^{\mu\nu}$ fait la connexion entre les deux vertex e.m..

La probabilité de transition est donc proportionnelle à :

$$|\mathcal{M}_{fi}|^2 = [(p_a + p_c)(p_b + p_d)]^2 \left(\frac{e^2}{q^2}\right)^2 \quad (5.3.2)$$

5.4 Section efficace différentielle de $\pi^+ K^+ \rightarrow \pi^+ K^+$ dans le c.m. de la réaction

Plaçons-nous dans le référentiel du c.m. de a et b. Dans ce référentiel, la formule C.4.7 se réduit à :

$$d\sigma(i \rightarrow f) = \frac{1}{4|\mathbf{p}|E_i} |\mathcal{M}_{fi}|^2 dLips(p_a + p_b, \{p_j\})$$

où $E_i = E_a + E_b$. Utilisant C.6.6 pour le dLips, on obtient :

$$d\sigma(i \rightarrow f) = \frac{1}{4|\mathbf{p}|E_i} |\mathcal{M}_{fi}|^2 \frac{1}{(4\pi)^2} \frac{|\mathbf{p}|}{E_i} d\Omega = \frac{|\mathcal{M}_{fi}|^2}{(8\pi E_i)^2} d\Omega$$

On retrouve la relation 5.1.3 si le processus est élastique ($|p_1| = |p_2|$) et si on pose $\hbar c = 1$. La section efficace différentielle de diffusion dans le c.m. s'écrit donc :

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(\text{c.m.}) = \frac{|\mathcal{M}_{fi}|^2}{(8\pi E_i)^2} \quad (5.4.1)$$

où l'élément de matrice au carré est donné par 5.3.2.

5.5 Section efficace différentielle sous forme “invariante”

On définit communément les grandeurs invariantes (voir la table PDG sous “Kinematics”) :

Variables de Mandelstam :

$$s = (p_a + p_b)^2 = (p_c + p_d)^2$$

$$t = (p_a - p_c)^2 = (p_b - p_d)^2$$

$$u = (p_a - p_d)^2 = (p_b - p_c)^2$$

$$s + t + u = m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 + m_d^2 \quad (5.5.1)$$

En terme de ces variables, la section efficace différentielle s’écrit :

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{1}{64\pi} \frac{|\mathcal{M}|^2}{(p_a p_b)^2 - (m_a m_b)^2} \quad (5.5.2)$$

que l’on peut développer en :

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{1}{16\pi} \frac{|\mathcal{M}|^2}{[s - (m_a + m_b)^2][s - (m_a - m_b)^2]} \quad (5.5.3)$$

On peut aussi exprimer $|\mathcal{M}|^2$ en fonction de s, t, u. On trouve, à partir de 5.3.2 :

$$|\mathcal{M}|^2 = e^4 \left(\frac{s - u}{t} \right)^2 = (4\pi\alpha_{em})^2 \left(\frac{s - u}{t} \right)^2 \quad (5.5.4)$$

Q. : montrer que dans l'approximation $m_a \ll m_b$, et $|\mathbf{p}_b| \ll m_b$ on trouve la formule de Rutherford :

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Rutherford} = \frac{1}{4} \frac{\alpha^2}{|p_a|^2} \frac{1}{\sin^4(\theta/2)} \quad (5.5.5)$$

5.6 Amplitudes de diffusion e.m. de $\pi^+\pi^+ \rightarrow \pi^+\pi^+$ et de $\pi^+\pi^- \rightarrow \pi^+\pi^-$

Dans le cas de deux bosons identiques, l'amplitude doit être symétrique par échange des deux particules. Dans le langage des graphes de Feynman, on doit prendre en compte le graphe dans lequel les deux particules finales sont échangées (voir figure 5.6.1).

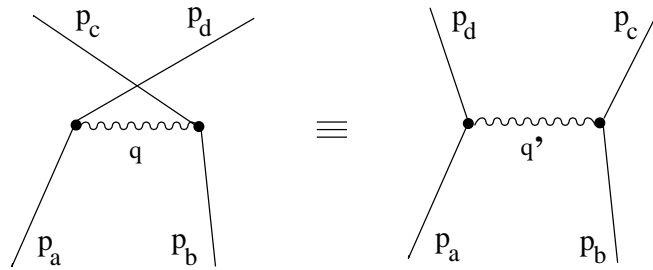


FIG. 5.6.1 – Diagramme d'échange pour la diffusion $\pi^+\pi^+$

L'amplitude de diffusion s'écrit :

$$\mathcal{M}(\pi^+\pi^+) = (-i)^3 e^2 \left[\frac{(p_a + p_c)_\mu (p_b + p_d)^\mu}{(p_b - p_d)^2} + \frac{(p_a + p_d)_\mu (p_b + p_c)^\mu}{(p_b - p_c)^2} \right] \quad (5.6.1)$$

On peut utiliser ce résultat pour écrire l'amplitude de diffusion $\pi^+\pi^- \rightarrow \pi^+\pi^-$. Le π^- étant pris comme l'antiparticule, on lui applique la règle de l'inversion du 4-vecteur (figure 5.6.2).

On échange l'état entrant b et l'état sortant d et on effectue un changement de signe des 4-vecteurs :

$$\mathcal{M}(\pi^+\pi^-) [p_a, p_b; p_c, p_d] \equiv \mathcal{M}(\pi^+\pi^+) [p_a, -p_d; p_c, -p_b]$$

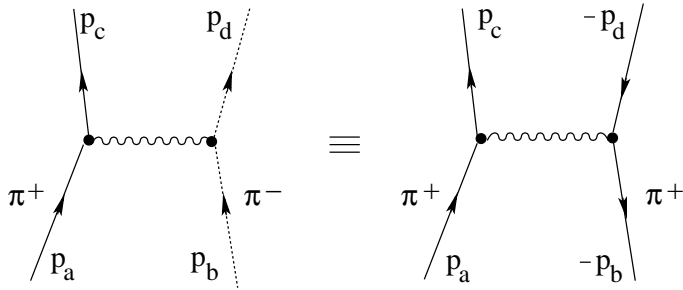


FIG. 5.6.2 – Diagramme d'échange pour la diffusion $\pi^+\pi^-$.

ce qui donne :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{M}(\pi^+\pi^-) &= (-i)^3 e^2 \left[\frac{(p_a + p_c)_\mu (-p_d - p_b)^\mu}{(-p_d + p_b)^2} + \frac{(p_a - p_b)_\mu (-p_d + p_c)^\mu}{(-p_d - p_c)^2} \right] = \\
 &= (-i)^3 e^2 \left[\frac{-(p_a + p_c)_\mu (p_d + p_b)^\mu}{(p_b - p_d)^2} + \frac{(p_a - p_b)_\mu (-p_d + p_c)^\mu}{(p_a + p_b)^2} \right]
 \end{aligned}
 \tag{5.6.2}$$

On reconnaît dans le premier terme l'amplitude obtenue pour π^+K^+ , hormis un changement de signe dû à la présence d'une charge négative. Le deuxième terme correspond à un processus d'annihilation comme représentée par le graphe de la figure 5.6.3

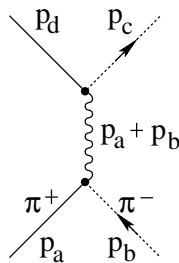


FIG. 5.6.3 – Diagramme d'annihilation $\pi^+\pi^- \rightarrow \gamma^* \rightarrow \pi^+\pi^-$

5.7 Photons réels et “massifs”

La solution des équations de Maxwell pour le champ \mathbf{E} de l'onde e.m. libre se propageant selon l'axe z peut être écrite :

$$\mathbf{E}(t, z) = (\mathbf{e}_x E_1 + \mathbf{e}_y E_2) \exp(ikz - i\omega t) \quad (5.7.1)$$

Une forme analogue peut être prise pour le champ \mathbf{B} orthogonal à \mathbf{E} et à l'axe de propagation. Le vecteur unité \mathbf{e} constitue la base dans laquelle on exprime la **polarisation** de l'onde.

Les amplitudes E_1 et E_2 sont des quantités complexes, ce qui permet d'introduire un déphasage δ entre les deux projections. Pour le champ physique on prend la partie réelle de la solution. Si $\delta = 0$, on a une polarisation linéaire : le champ \mathbf{E} oscille dans un plan qui fait un angle $\theta = \tan^{-1}(E_2/E_1)$ par rapport à l'axe x . Si la phase n'est pas nulle, on parle de **polarisation elliptique**. En particulier, si elle est de 90° , la **polarisation est circulaire**. Le champ physique tourne autour de l'axe z et deux polarisations circulaires gauche et droite sont possibles :

$$\mathbf{E}(t, z) = E(\mathbf{e}_x \pm i\mathbf{e}_y) \exp(ikz - i\omega t) \quad (5.7.2)$$

c. à. d., pour le champ réel :

$$E_x = E \cos(kz - \omega t) \quad E_y = \mp E \sin(kz - \omega t)$$

On parle d'**hélicités positive et négative** : $\lambda = \pm 1$.

Dans 5.7.1 la polarisation de l'onde est décrite à l'aide des deux composantes linéaires orthogonales selon \mathbf{e}_x et \mathbf{e}_y . On peut alternativement définir une base formée des deux vecteurs complexes orthogonaux :

$$\mathbf{e}_\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_x \pm i\mathbf{e}_y) \quad \text{que l'on complète par la direction } \mathbf{e}_0 = \hat{\mathbf{z}} \quad (5.7.3)$$

La solution 5.7.1 devient :

$$\mathbf{E}(t, z) = (\mathbf{e}_+ E_+ + \mathbf{e}_- E_-) \exp(ikz - i\omega t) \quad (5.7.4)$$

Cela revient à exprimer l'état de polarisation comme une superposition de deux polarisations circulaires d'hélicités opposées. Dans cette base, l'onde polarisée circulairement avec $\lambda = +1$ a les composantes $(1,0,0)$ et celle avec $\lambda = -1$ les composantes $(0,0,1)$.

On associe généralement le champ du photon au potentiel \mathbf{A} . Dans la jauge de Coulomb, la solution de l'équation de propagation $\square \mathbf{A} = 0$ est de la forme :

$$\mathbf{A} = \mathbf{e} N \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - i\omega t) \quad (5.7.5)$$

La relation 5.7.5 représente une onde (photon) de polarisation \mathbf{e} se propageant dans la direction \mathbf{k} telle que :

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{e} = 0 \quad (5.7.6)$$

Q. : vérifier cela pour la jauge de Coulomb $\nabla \mathbf{A} = 0$.

Conventionnellement \mathbf{e} indique la direction du champ \mathbf{E} . Ses composantes peuvent être définies sur une base de polarisations linéaires (comme dans 5.7.1) ou sur une base de polarisations circulaires (5.7.3). Dans ce dernier cas on a :

$$e(\lambda = +1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad e(\lambda = -1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (5.7.7)$$

L'état $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ représente un photon d'hélicité +1.

5.7.7 montre que l'on a bien deux états de polarisation c. à. d. deux états d'hélicité indépendants.

Dans le cas d'un photon "massif" on aurait aussi la possibilité d'une composante longitudinale :

$$e(\lambda = 0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (5.7.8)$$

On peut vérifier que si l'on effectue une rotation d'angle θ autour de l'axe z de propagation de l'onde, dans la base "linéaire" les composantes se transforment comme :

$$\begin{aligned} e'_x &= e_x \cos \theta - e_y \sin \theta \\ e'_y &= e_x \sin \theta + e_y \cos \theta \\ e'_z &= e_z \end{aligned} \quad (5.7.9)$$

tandis que dans la base "circulaire" elles se transforment comme :

$$\begin{aligned} e'_+ &= e_+ \exp(i(+1)\theta) \\ e'_- &= e_- \exp(i(-1)\theta) \\ e'_0 &= e_z \end{aligned} \quad (5.7.10)$$

On reconnaît ici la forme de l'opérateur de rotation autour de l'axe z pour une particule de spin 1 : $R_z(\theta) = \exp(iJ_z\theta)$ (voir §4.2).

Ce sujet est repris dans les paragraphes qui suivent, en considérant séparément le cas d'une particule ayant une masse et le cas d'une particule de masse nulle (le photon).

Q. : étudier l'émission de rayonnement e.m. par un électron non relativiste dans un champ magnétique (rayonnement cyclotron). Quelle est la polarisation de l'onde e.m. parallèlement au champ magnétique ? Et perpendiculairement à ce champ ?

Q. : idem pour le cas relativiste (rayonnement synchrotron).

5.8 La particule massive de spin 1

Aux états d'hélicité $\lambda = +1, 0, -1$, on fait correspondre un vecteur polarisation $\mathbf{e}(\lambda)$. Si on se place dans le référentiel de repos de la particule, on a la base cartésienne :

$$\mathbf{e}_x = (1, 0, 0) \quad \mathbf{e}_y = (0, 1, 0) \quad \mathbf{e}_z = (0, 0, 1) \quad (5.8.1)$$

Communément l'état est décrit dans une base de polarisation circulaire :

$$\begin{aligned} \mathbf{e}(\lambda = +1) &\equiv -\frac{1}{\sqrt{2}}(1, i, 0) \\ \mathbf{e}(\lambda = 0) &\equiv (0, 0, 1) \\ \mathbf{e}(\lambda = -1) &\equiv -\frac{1}{\sqrt{2}}(1, -i, 0) \end{aligned} \quad (5.8.2)$$

avec la condition d'orthogonalité :

$$\mathbf{e}^*(\lambda)\mathbf{e}(\lambda') = \delta_{\lambda\lambda'} \quad (5.8.3)$$

Pour décrire l'objet en mouvement, on est amené à construire un quadrivecteur :

$$e = (e^0(\lambda), \mathbf{e}(\lambda)) \quad (5.8.4)$$

avec $e^0 = 0$ dans le système de repos de la particule. Dans ce système on a aussi $p = (M, 0, 0, 0)$, d'où :

$$p^\mu e_\mu(\lambda) = 0 \quad (5.8.5)$$

Ce résultat est valable dans tout repère, et montre que l'on a trois quadrivecteurs de polarisation indépendants. On a bien une particule de spin 1.

5.9 La particule de masse nulle et de spin 1 (le photon)

La particule se propage dans le vide à vitesse c et on n'a pas de référentiel de repos. Ecrivons la solution de l'équation d'onde libre $\square A^\mu = 0$ sous la forme :

$$A^\mu = N e^\mu \exp(-ikx) \quad (5.9.1)$$

avec :

$$k^2 = 0 \quad (5.9.2)$$

car l'objet est de masse nulle. La jauge de Lorentz $\partial_\mu A^\mu = 0$ se traduit par :

$$k^\mu e_\mu = 0 \quad (5.9.3)$$

Cette condition est analogue à 5.8.5, mais ici elle est associée au choix de la jauge.

Etablissons maintenant que l'on a que deux états de polarisation indépendants et que la condition d'orthogonalité 5.7.6 est toujours valable. On peut montrer que la jauge de Lorentz est encore satisfaite si l'on remplace :

$$A^\mu \rightarrow A^\mu - \partial^\mu \chi \quad (5.9.4)$$

pourvu que la fonction scalaire χ soit une solution de l'équation :

$$\square \chi = 0 \quad (5.9.5)$$

Si χ est de la forme $\exp(-ikx)$, 5.9.4 devient :

$$A^\mu \rightarrow A^\mu - i\alpha k^\mu \exp(-ikx) = N(e^\mu + \beta k^\mu) \exp(-ikx)$$

ce qui est équivalent à changer le vecteur polarisation d'une quantité proportionnelle au quadrimoment de la particule :

$$e^\mu \rightarrow e^\mu + \beta k^\mu \quad (5.9.6)$$

Puisque $k^2 = 0$, ce nouveau quadrivecteur de polarisation satisfait toujours 5.9.3. On peut s'arranger pour trouver la valeur de β qui annule la composante temporelle du nouveau quadrivecteur e . De cette façon, on retrouve à partir de 5.9.3 la condition de transversalité $\mathbf{k} \cdot \mathbf{e} = 0$, qui exprime aussi l'existence de deux états de polarisation indépendants. Remarquez que ce raisonnement tient parce que l'objet a une masse nulle ($k^2 = 0$).

Dans les règles de Feynman, on inclut la possibilité de faire participer un photon réel de quadrimoment k et polarisation λ à un processus de diffusion :

$$\begin{aligned} A^\mu &= N e^\mu(k, \lambda) \exp(-ikx) && \text{pour le photon entrant} \\ A^\mu &= N e^{\mu*}(k, \lambda) \exp(+ikx) && \text{pour le photon sortant} \end{aligned} \quad (5.9.7)$$

avec la relation d'orthogonalité (le signe moins vient du fait que l'on a un quadrivecteur) :

$$e^*(\lambda) e(\lambda') = -\delta_{\lambda\lambda'} \quad (5.9.8)$$

La normalisation est la même que pour les particules de spin 0.

5.10 La particule de spin 1/2

La procédure est analogue à celle utilisée pour la particule de spin 0 (§5.2), hormis qu'on part maintenant des solutions de l'équation de Dirac. On a vu (§2.2) que ces solutions sont de la forme :

$$\Psi = \omega(p, s) \exp(-ipx) \quad (5.10.1)$$

où ω est le quadrispincieur de Dirac, de type u (équation 2.2.27) pour la particule et de type v (2.2.29) pour l'antiparticule.

Partant de la structure générale du courant (2.2.22), on peut exprimer la densité de courant de probabilité pour l'interaction e.m. (calculée à partir de $\int d^4x \bar{\Psi}_f V \Psi_i$) sous la forme :

$$j^\mu(e^-) = (-e) \bar{\Psi}_f \gamma^\mu \Psi_i \quad (5.10.2)$$

ce qui peut être développé en :

$$j^\mu(e^-) = (-e) N_i N_f \bar{u}(p_f, s_f) \gamma^\mu u(p_i, s_i) \exp\{i(p_f - p_i)x\} \quad (5.10.3)$$

Nous adoptons la même normalisation que pour la particule de spin 0. D'autres conventions sont possibles. Les règles de Feynman pour un électron et un positron sont rappelées dans la figure 5.3.2.

Q. : l'interaction e.m. d'un fermion de spin 1/2 s'exprime par un courant "vectorel" de la forme $\bar{u}_f \gamma^\mu u_i$. Montrer que l'hélicité du fermion est conservée.

Pour donner un exemple, l'amplitude de diffusion e.m. d'un électron par un pion positif $e^- \pi^+ \rightarrow e^- \pi^+$ est exprimée par :

$$\mathcal{M} = \int d^4x j^\nu(e^-) \frac{g_{\mu\nu}}{q^2} j^\mu(\pi^+) \quad (5.10.4)$$

Le propagateur est encore de la forme $1/q^2$. Une fois éliminés les facteurs de normalisation et le Dirac δ , nous obtenons l'analogie de 5.3.1 :

$$\mathcal{M}_{s_a s_c} = i(-i) e \bar{u}(p_c, s_c) \gamma_\mu u(p_a, s_a) \frac{-i g^{\mu\nu}}{q^2} (-i) e (p_b + p_d)_\nu \quad (5.10.5)$$

Les états de spin des fermions entrant et sortant sont spécifiés par les indices s_a et s_c (graphe de la figure 5.10.1).

La construction de la section efficace différentielle est ici plus compliquée que dans la diffusion de deux bosons. Etant donné la présence du spin on va obtenir :

$$d\sigma_{s_a s_c} \propto |\mathcal{M}_{s_a s_c}|^2 \quad (5.10.6)$$

- Si l'on a des électrons non polarisés on doit faire une moyenne sur les états de spin $+1/2$ et $-1/2$.

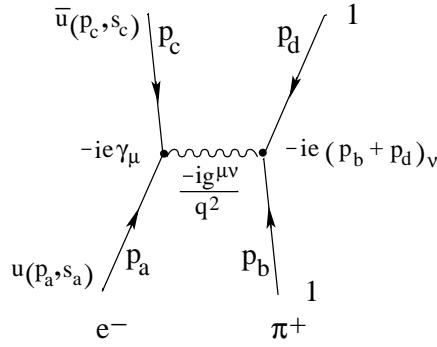


FIG. 5.10.1 – Diagramme de Feynman pour la diffusion $e^- \pi^+ \rightarrow e^- \pi^+$

- Si le détecteur est insensible à la polarisation, on a pour chaque état de spin à l’entrée deux états de spin possibles à la sortie, sur lesquels il faut sommer.

La section efficace “non polarisée” est donc :

$$d\sigma_{NP} = \frac{1}{2} \sum_{s_a} \sum_{s_c} d\sigma_{s_a s_c} \quad (5.10.7)$$

Le calcul de l’élément de matrice peut se faire en exprimant explicitement les fonctions d’onde (les “u” données au chapitre 2). Quelques exemples sont donnés au §5.12.

Q. : étudier le cas de la diffusion de deux particules de spin 1/2.

5.11 Le propagateur d’une particule massive

Le propagateur photonique est de la forme $1/q^2$ (voir 5.2.20). La quantité q^2 est nulle pour le photon réel, mais elle est non nulle pour le photon virtuel du propagateur. Rappelons schématiquement qu’on a été amené à 5.2.20 par :

$$\square A = j \sim (q \cdot q) A = j \rightarrow A \propto \frac{1}{q^2} j$$

où j est le courant e.m..

Considérons maintenant un boson massif de spin 0, obéissant à l’équation de Klein-Gordon :

$$(\square + m^2)\phi = j_h \rightarrow (-p^2 + m^2)\phi = j_h$$

où j_h est la source de “courant bosonique”.

La solution est de la forme :

$$\phi \propto \frac{1}{p^2 - m^2} jh$$

On est amené à la règle :

propagateur d'un boson de spin 0, de masse m et de 4-impulsion p :

$$\frac{-i}{p^2 - m^2} \quad (5.11.1)$$

La relation 5.11.1 est à utiliser p. ex. dans le cas de la diffusion Compton sur un pion positif (graphe de la figure 5.11.1). L'expression du propagateur présente

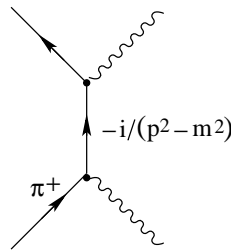


FIG. 5.11.1 – Diagramme de la diffusion Compton sur le π^+

un pôle quand la particule échangée devient réelle. Cette propriété permet une définition alternative de la “masse” : c’est la valeur de p^2 au pôle du propagateur.

D’autres subtilités sont présentes dans le propagateur de particules de spin 1/2 ou 1, le dénominateur en $p^2 - m^2$ étant toujours là. Pour les fermions de spin 1/2, on a⁶⁶ :

propagateur d'un fermion de spin 1/2, de masse m et de 4-impulsion p :

$$i \frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2} \quad (5.11.2)$$

⁶⁶Voir par ex. ref. 8, chap. 6.

5.12 Calcul de quelques sections efficaces $d\sigma/d\Omega$

Considérons la probabilité de diffusion électron pion : $e^-\pi^+ \rightarrow e^-\pi^+$. On doit calculer :

$$|\mathcal{M}_{s_a s_c}|^2 = \mathcal{M}_{s_a s_c} (\mathcal{M}_{s_a s_c})^* = \left(\frac{e^2}{q^2}\right)^2 [\bar{u}(p_c, s_c) \gamma_\mu u(p_a, s_a) (p_b + p_d)^\mu] [\dots]^\dagger$$

où $\bar{u} = u^\dagger \gamma_0$.

Pour un scalaire conjugué complexe et conjugué hermitique coïncident. Le terme conjugué hermitique donne :

$$\begin{aligned} [\bar{u}(p_c, s_c) \gamma_\nu u(p_a, s_a) (p_b + p_d)^\nu]^\dagger &= [u^\dagger(p_a, s_a) \gamma_\nu^\dagger \bar{u}^\dagger(p_c, s_c)] (p_b + p_d)^\nu = \\ &= [u^\dagger(p_a, s_a) \gamma_\nu^\dagger \gamma_0^\dagger u(p_c, s_c)] (p_b + p_d)^\nu \end{aligned}$$

Puisque (exercice) :

$$\gamma_\nu^\dagger \gamma_0^\dagger = \gamma_\nu^\dagger \gamma_0 = \gamma_0 (\gamma_0 \gamma_\nu^\dagger \gamma_0) = \gamma_0 \gamma_\nu, \quad \text{on a aussi :}$$

$$[u^\dagger(p_a, s_a) \gamma_0 \gamma_\nu u(p_c, s_c)] = [\bar{u}(p_a, s_a) \gamma_\nu u(p_c, s_c)]$$

En conclusion, dans le calcul de 5.10.7, on doit évaluer :

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \sum_{s_a} \sum_{s_c} |\mathcal{M}_{s_a s_c}|^2 = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{e^2}{q^2}\right)^2 \sum_{s_a} \sum_{s_c} [\bar{u}(p_c, s_c) \gamma_\mu u(p_a, s_a) (p_b + p_d)^\mu] [\bar{u}(p_a, s_a) \gamma_\nu u(p_c, s_c) (p_b + p_d)^\nu] = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{e^2}{q^2}\right)^2 \sum_{s_a} \sum_{s_c} [\bar{u}(p_c, s_c) \gamma_\mu u(p_a, s_a)] [\bar{u}(p_a, s_a) \gamma_\nu u(p_c, s_c)] (p_b + p_d)^\mu (p_b + p_d)^\nu = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{e^2}{q^2}\right)^2 L_{\mu\nu} T^{\mu\nu} \end{aligned}$$

On a donc le produit de deux tenseurs :

$$\frac{1}{2} \sum_{s_a} \sum_{s_c} |\mathcal{M}_{s_a s_c}|^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{e^2}{q^2}\right)^2 L_{\mu\nu} T^{\mu\nu} \quad (5.12.1)$$

le tenseur leptonique (fermion spin 1/2) est :

$$L_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \sum_{s_a} \sum_{s_c} [\bar{u}(p_c, s_c) \gamma_\mu u(p_a, s_a)] [\bar{u}(p_a, s_a) \gamma_\nu u(p_c, s_c)] \quad (5.12.2)$$

le tenseur hadronique (boson spin 0) est :

$$T^{\mu\nu} = (p_b + p_d)^\mu (p_b + p_d)^\nu \quad (5.12.3)$$

Cette séparation, qui est associée au fait que l'on a échangé uniquement un photon entre les deux courants, est bénéfique en termes du calcul.

Pour le tenseur leptonique de la forme 5.12.2, en introduisant les valeurs explicites de u et après un peu d'algèbre, on trouve :

$$\begin{aligned} L_{\mu\nu} &= \frac{1}{2} \text{Tr} \left[(\not{p}_c + m) \gamma_\mu (\not{p}_a + m) \gamma_\nu \right] \quad \text{où :} & (5.12.4) \\ \not{p} &= \gamma^\mu p_\mu. \end{aligned}$$

L'application des **théorèmes de traces** aux matrices γ ⁶⁷ donne :

$$L_{\mu\nu} = 2 [p_{c_\mu} p_{a_\nu} + p_{c_\nu} p_{a_\mu} + (q^2/2) g_{\mu\nu}] \quad (5.12.5)$$

Le développement du calcul conduit à l'expression suivante pour la section efficace différentielle angulaire⁶⁸, en admettant le pion au repos et sans structure :

$$\frac{d\sigma_{NP}}{d\Omega}(e^- \pi^+) = \frac{\alpha^2}{4 |\mathbf{p}|^2 \sin^4(\theta/2)} \cos^2(\theta/2) \frac{|\mathbf{p}'|}{|\mathbf{p}|} \equiv \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{ss} \quad (5.12.6)$$

avec $|\mathbf{p}|$ et $|\mathbf{p}'|$ les quantités de mouvement de l'électron avant et après la collision.

On a négligé la masse de l'électron, ce qui a permis d'écrire :

$$q^2 = -4 |\mathbf{p}| |\mathbf{p}'| \sin^2(\theta/2)$$

Le facteur $|\mathbf{p}'| / |\mathbf{p}|$ est dû au recul de la particule cible (masse M). Il peut être exprimé sous la forme (à démontrer comme exercice) :

$$\frac{|\mathbf{p}'|}{|\mathbf{p}|} = 1 / \left[1 + \frac{2|\mathbf{p}|}{M} \sin^2(\theta/2) \right] \quad (5.12.7)$$

Si la particule cible est très lourde par rapport au projectile, on peut poser $\frac{|\mathbf{p}'|}{|\mathbf{p}|} \simeq 1$.

Q. : partant des tenseurs 5.12.5 et 5.12.3 effectuer en détail le calcul de $d\sigma/d\Omega$ pour la diffusion $e^- \pi^+ \rightarrow e^- \pi^+$.

Dans le cas de la diffusion $e^- \mu^- \rightarrow e^- \mu^-$, on doit contracter deux tenseurs fermioniques, le tenseur électronique $L_{\mu\nu}$ et son homologue muonique $M_{\mu\nu}$. Le résultat est :

$$\frac{d\sigma_{NP}}{d\Omega}(e^- \mu^-) = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{ss} \left[1 - \frac{q^2 \tan^2 \theta/2}{2M^2} \right] \quad (5.12.8)$$

⁶⁷Voir par ex. ref 6, annexe D.2, ou ref. 10, § 7.7.

⁶⁸appelée communément : section efficace de **Mott**. On trouve aussi la notation $\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{ss}$, l'indice ss signifiant "sans structure".

Le terme en $\tan\theta/2$ est dû au fait que l'électron et le muon interagissent non seulement par leurs charges électriques mais également par leurs moments magnétiques. M est ici la masse du muon.

Exprimée en terme des variables de Mandelstam s, t, u cette section efficace s'écrit :

$$\frac{d\sigma}{dt}(e^-\mu^-) = \frac{2\pi\alpha^2}{t^2} \left[1 + \frac{u^2}{s^2} \right] \quad (5.12.9)$$

On trouve aussi :

$$\frac{d\sigma}{dy}(e^-\mu^-) = \frac{2\pi\alpha^2}{t^2} s (1 + (1 - y)^2) \quad (5.12.10)$$

$y=(p-p')/p$ où p et p' sont les modules des quantités de mouvement de l'électron dans le référentiel du muon "cible".

La section efficace différentielle d'annihilation $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ dans le c.m. (toutes les masses ont été négligées et on est loin de la production de Z) est donnée par :

$$\frac{d\sigma_{NP}}{d\Omega}(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-) = \frac{\alpha^2}{4q^2}(1 + \cos^2\theta) \quad (5.12.11)$$

et la section efficace totale par :

$$\sigma_{NP}(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-) = \frac{4\pi\alpha^2}{3} \frac{1}{s} = \frac{21.7 \text{ nb}}{[E_{\text{faisceau}}(\text{GeV})]^2} \quad (5.12.12)$$

avec $q^2 = 4E_{\text{faisceau}}^2$ et $2E_{\text{faisceau}} = \sqrt{s}$.

Q. : justifier 5.12.12. par des arguments dimensionnels. Justifier la dépendance angulaire de 5.12.11, sur la base de la conservation de l'hélicité.

La diffusion Bhabha $e^+e^- \rightarrow e^+e^-$ (dans le c.m et loin du Z) est donnée par :

$$\frac{d\sigma_{NP}}{d\Omega}(e^+e^- \rightarrow e^+e^-) = \frac{\alpha^2}{2s} \left[\frac{1 + \cos^4\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\sin^4\left(\frac{\theta}{2}\right)} - \frac{2 \cos^4\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} + \frac{1 + \cos^2\theta}{2} \right] \quad (5.12.13)$$

Q. : pourquoi cette relation est-elle si différente de celle détenue pour $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$?

5.13 Le concept du facteur de forme

Jusqu'ici nous avons supposé le pion et le kaon ponctuel, Que se passe-t-il si nous voulons tenir compte de la structure de ces particules? Il s'agit de déterminer l'effet de la distribution des charges électriques à l'intérieur du pion. On représente conventionnellement cet effet par un disque plein ("blob") au vertex (voir graphe de la figure 5.13.1). La forme explicite de la distribution de charge

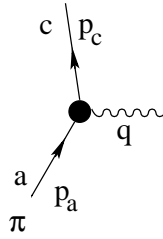


FIG. 5.13.1 – Interaction d'un pion avec structure

à l'intérieur d'un pion (et d'un hadron en général) est très difficile à trouver à cause de l'influence dominante de l'interaction forte. Il est plus commode de choisir l'approche indirecte amenant au concept du facteur de forme. Supposons l'interaction e.m.représentée par un potentiel V constant dans le temps. Si l'on considère la partie spatiale et que l'on se limite à un calcul au premier ordre, l'amplitude de transition \mathcal{M} est proportionnelle à la transformée de Fourier du potentiel :

$$\mathcal{M} \sim \int d^4x \Psi_f^* V \Psi_i \sim \int d^3x e^{-i\mathbf{p}_f \cdot \mathbf{x}} V(\mathbf{x}) e^{i\mathbf{p}_i \cdot \mathbf{x}} \sim \int d^3x V(\mathbf{x}) e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{x}} \sim \tilde{V}(\mathbf{q})$$

où $\mathbf{q} = \mathbf{p}_f - \mathbf{p}_i$.

Du point de vue classique et non relativiste, le potentiel $V(\mathbf{x})$ est associé à la distribution de densité de charges : $\rho(\mathbf{x})$ par :

$$V(\mathbf{x}) \sim e^2 \int d^3x' \frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}$$

Le développement du calcul donne :

$$\tilde{V}(\mathbf{q}) \sim \frac{e^2}{|\mathbf{q}^2|} F(\mathbf{q}), \quad \text{avec} \quad F(\mathbf{q}) = \int d^3x \rho(\mathbf{x}) e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}}$$

Q. : établir ce résultat à titre d'exercice. Pour éviter que l'intégrale définissant $V(\mathbf{x})$ diverge, introduire un coefficient "d'écrantage" de la forme $e^{-a|\mathbf{x}'|}$, où a est réduit à zéro une fois l'intégration effectuée.

Si la distribution de charges du pion est supposée sphérique, on conclut que F ne dépend que du module de \mathbf{q} , non de sa direction :

$$F(\mathbf{q}) \rightarrow F(q^2)$$

La distribution de charge à l'intérieur du pion vue par un observateur en mouvement n'a pas la symétrie sphérique. Dans un traitement relativiste le moment de transfert devient le quadrimoment de transfert $\mathbf{q} \rightarrow q$, et on retrouve dans le terme $1/q^2$ l'expression du propagateur du photon vu précédemment. De même $F(\mathbf{q}^2) \rightarrow F(q^2)$ et on obtient une forme invariante $F(q^2)$ qui est définie par un intégrale sur l'espace-temps.

Q. : montrer que pour un potentiel de type Yukawa dû à la distribution de densité de masses : $\rho(r) = \frac{m^2}{8\pi} \frac{\exp(-mr)}{r}$, on obtient le facteur de forme $F(q^2) = \frac{1}{1+q^2/m^2}$. On a un pôle en $q^2 = -m^2$.

A la base du concept de facteur de forme, il y a donc une distribution de densité des constituants (charges électriques, magnétiques, faibles,...) confinés par l'interaction forte. Ce facteur, qui représente l'extension de la source, agit sur le vertex d'interaction avec le photon (ou avec les autres bosons vecteurs).

5.14 Facteur de forme et symétrie

Des arguments simples permettent de donner les caractéristiques du facteur de forme. Considérons le cas du pion, particule sans spin. Le vertex du couplage avec le photon est caractérisé par les deux quadrivecteurs p_a et p_c . Le courant e.m. entre l'état a et l'état c est donné par (5.2.13) :

$$j^\mu(\text{pion}) = \langle \text{pion}(p_c) | j^{em\mu} | \text{pion}(p_a) \rangle \propto e(p_c + p_a)^\mu \exp(iqx) \quad (5.14.1)$$

Cette expression est applicable au pion supposé ponctuel. On aimerait la modifier pour tenir compte de la structure de la particule. Pour que la toile ainsi tissée

tienne, il faut que toute modification conserve la structure 4-vectorielle du courant, de façon à ce que l'amplitude (5.3.1) reste un invariant de Lorentz. Le courant du pion dans la transition $p_a \rightarrow p_c$ ne peut être construit qu'à l'aide des deux quadrivecteurs indépendants.

$$p_a + p_c \quad \text{et} \quad q = p_c - p_a \quad (5.14.2)$$

et du scalaire indépendant :

$$q^2 = p_a^2 + p_c^2 - 2p_a p_c = 2M^2 - 2p_a p_c \quad (5.14.3)$$

où M = masse du pion.

Notons que le scalaire $(p_a + p_c)^2$ est lié à q^2 par :

$$(p_a + p_c)^2 = p_a^2 + p_c^2 + 2p_a p_c = 2M^2 + 2p_a p_c = -q^2 + 4M^2$$

Une expression invariante de Lorentz pour le courant pionique peut être déduite de (5.14.1) en effectuant la substitution :

$$e(p_c + p_a)^\mu \rightarrow e [F(q^2)(p_c + p_a)^\mu + G(q^2)q^\mu] \quad (5.14.4)$$

Imposons maintenant la **conservation de la charge** e.m. à l'aide de l'équation de continuité :

$$\partial_\mu j^\mu = 0 \quad \rightarrow \quad q_\mu j^\mu = 0 \quad (5.14.5)$$

Le facteur q_μ vient de la dérivation de l'onde plane dans 5.14.1. Le produit scalaire appliqué à l'expression de droite de 5.14.4 donne effectivement 0 pour le premier terme ; le second terme de cette expression par contre, n'est nul que dans la limite d'un moment de transfert nul (ou avec un photon non virtuel). On en tire la conclusion qu'on doit avoir $G(q^2) = 0$ et que le facteur de forme décrivant le pion réel est le seul scalaire $F(q^2)$.

La règle de Feynman pour un boson de spin 0, avec structure, requiert l'adjonction d'un facteur $F(q^2)$ à chaque vertex e.m..

La section efficace différentielle (p. ex. 5.12.6) est à corriger par le facteur $|F(q^2)|^2$:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{ponct.}} \times |F(q^2)|^2 \quad (5.14.6)$$

Si le moment de transfert q est proche de zéro, le photon échangé n'est pas capable de reconnaître l'existence d'une structure car la longueur d'onde atteint la dimension physique de la particule. A la limite $q \rightarrow 0$ le photon sonde ne perçoit que la charge totale de la cible. On est conduit à normaliser F de façon telle que :

$$F(q^2 = 0) = 1 \quad (5.14.7)$$

5.15 Graphes d'ordres supérieurs ; le problème des infinis (divergence ultraviolette) ; la procédure de renormalisation

L'électrodynamique quantique (QED) présente quelques points délicats que nous voulons soulever ci-dessous.

Les graphes que nous avons étudiés jusqu'ici ne comportent qu'une seule particule échangée, photon virtuel dans le graphe de la figure 5.1.1, pion virtuel dans celui de la figure 5.11.1. La particule échangée ("interne") peut sortir de sa couche de masse ; par contre sa quantité de mouvement est déterminée par les quantités de mouvement des particules "externes" en raison des lois de conservation. Par exemple, dans le graphe de la figure 5.1.1, l'intégration sur tous les états intermédiaires possibles donne :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d^3k \delta(\mathbf{p}_c - \mathbf{p}_a - \mathbf{k}) \delta(\mathbf{p}_d - \mathbf{p}_b + \mathbf{k}) \approx \delta(\mathbf{p}_c - \mathbf{p}_a + \mathbf{p}_d - \mathbf{p}_b) \quad (5.15.1)$$

avec $\mathbf{k} = \mathbf{p}_c - \mathbf{p}_a = \mathbf{p}_d - \mathbf{p}_b = \mathbf{q}$

ce qui explique le facteur $\frac{1}{q^2}$ du propagateur du photon (§5.2).

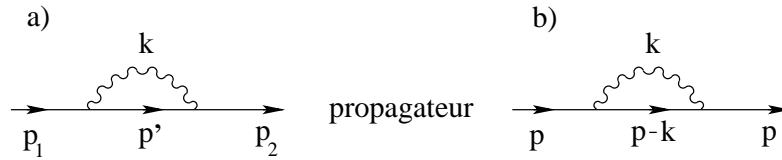


FIG. 5.15.1 – Diagrammes de la correction dite de self-énergie

On est amené à concevoir des situations plus compliquées en ce qui concerne le mécanisme d'échange. Par exemple, dans les graphes de la figure 5.15.1, la particule échangée émet un photon virtuel puis le réabsorbe. On prend cet effet en compte en appliquant une correction au propagateur de la particule (appelée correction de self-énergie). Pour ce faire, il faut considérer toutes les configurations intermédiaires possibles (graphe a) :

$$\int_{-\infty}^{\infty} d^3k d^3p' \delta(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}' - \mathbf{k}) \delta(\mathbf{p}' - \mathbf{p}_2 + \mathbf{k}) \dots \approx \delta(\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1) \int_{-\infty}^{\infty} d^3k \dots \quad (5.15.2)$$

On voit que la dépendance en \mathbf{p}' est "absorbée", mais que \mathbf{k} reste libre de varier sous réserve de la contrainte que $\mathbf{k} + \mathbf{p}' = \mathbf{p}_1 = \mathbf{p}_2 \equiv \mathbf{p}$ (voir graphe b).

En toute généralité, le calcul de l'amplitude implique une intégrale à 4 dimensions de la forme :

$$\int d^4k \frac{1}{k^2 [(p-k)^2 - m^2]} \quad (5.15.3)$$

qui se comporte asymptotiquement comme :

$$\int d^4k/k^4 \approx \int dk k^3/k^4 \approx \int \frac{dk}{k}$$

Cette intégrale diverge logarithmiquement (divergence ultraviolette), ce qui amène à placer une limite supérieure d'intégration (cut-off Λ) :

$$\int^\Lambda \frac{dk}{k} \approx \log \Lambda$$

La contribution du graphe 5.15.1 peut être évaluée à condition de “régulariser”

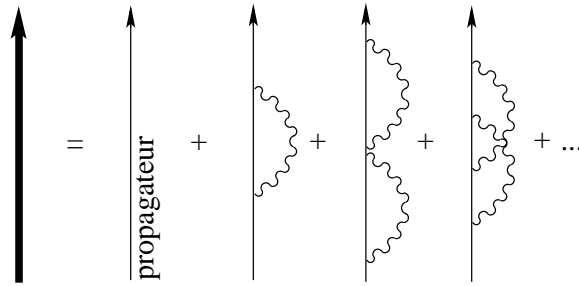


FIG. 5.15.2 – Diagrammes de la correction dite de self-énergie à des ordres croissants

l'intégration par ce “cut-off” Λ . On est dans une situation peu satisfaisante, aggravée si l'on considère des graphes encore plus compliqués tels que ceux représentés dans la figure 5.15.2. À la limite on peut concevoir un nombre infini de graphes donnant lieu chacun à un terme divergent à régulariser. La renormalisation est une procédure permettant de résoudre astucieusement un problème apparemment sans issue. Tout d'abord, on peut démontrer (voir par ex. ref. 6, chap 6.10) que sommer les corrections de self-énergie sur l'ensemble des graphes imaginables équivaut à substituer au propagateur $1/(p^2 - m^2)$ le propagateur $1/(p^2 - m'^2)$ dans 5.15.3, où :

$$m' = m(1 + \sum_{i=1}^{\infty} \alpha^i d_i(\Lambda^2)) \quad (5.15.4)$$

Les coefficients d_i sont propres aux graphes d'ordre α^i ; chaque terme de la somme de 5.15.14 diverge si $\Lambda \rightarrow \infty$.

On peut faire l'association suivante : la masse m intervenant dans le propagateur de 5.15.3 est une grandeur inaccessible à l'expérimentateur, c'est la masse de la particule "nue"; m' est la grandeur relevante du point de vue de la mesure physique, c'est la masse de la particule environnée de son nuage de photons virtuels.

On peut inverser 5.15.4 pour exprimer la grandeur m en terme de la masse mesurable m' , et substituer dans le propagateur. Si par exemple on revient au graphe de la figure 5.15.1, le facteur m à l'ordre α^2 à substituer peut s'écrire :

$$m = m'(1 - d \log \Lambda)$$

Il diverge quand $\Lambda \rightarrow \infty$ mais a pour effet de contrebalancer le mauvais comportement de l'intégrant de 5.15.3.

Les étapes importantes de la procédure de renormalisation de la masse sont donc :

- on effectue des corrections dites de self-énergie au propagateur d'une particule "nue" (figure 5.15.1), ce qui entraîne une divergence lors de l'intégration sur les états intermédiaires;
- on régularise cette divergence par l'introduction d'une coupure supérieure (cut-off Λ);
- on exprime la masse (m) de la particule "nue" en terme de la masse mesurable (m') de la particule "habillée" des photons virtuels;
- on peut dès lors prendre en compte toutes les corrections de self-énergie sans rencontrer de difficulté de comportement lors de l'intégration.

D'autres corrections interviennent, dans les calculs d'amplitude de transition, qui sont également la cause de problème de divergence d'intégration. Le graphe en forme de boucle de la figure 5.15.3 en est un exemple; il donne lieu à ce qu'on appelle communément la correction "de polarisation du vide". Le problème est résolu dans ce cas en effectuant la renormalisation de la charge électrique de la particule du propagateur, selon une procédure parallèle à celle mise en oeuvre pour la masse. Mentionnons également la nécessité d'une renormalisation des états



FIG. 5.15.3 – Diagramme de la correction dite de polarisation du vide

(fonctions d'onde) des particules entrantes et sortantes, seuls les états physiques de

ces particules étant à prendre en compte, non leurs états propres de l'hamiltonien libre.

En résumé, on dit que l'électrodynamique quantique actuelle (QED) est une théorie entièrement renormalisable en ce sens que tous les problèmes de divergence dans les calculs d'amplitude ont été résolus. Un de ses grands succès réside dans les prédictions de l'anomalie $a=(g-2)/2$ des leptons chargés, prédictions vérifiées par l'expérience à mieux de 10^{-8} dans le cas de l'électron (voir § 3.6).

5.16 Graphes d'ordres supérieurs ; autres problèmes d'infinis (divergence infrarouge)

Les graphes de la figure 5.16.1 sont un exemple de processus d'ordre supérieur pouvant impliquer les particules "externes" ; il s'agit de l'émission d'un photon réel, soit dans l'état initial soit dans l'état final d'une réaction d'annihilation e^+e^- . Ce phénomène est effectivement observé, comme le montre la figure 5.16.2 ; c'est ce qu'on appelle un événement Bhabha radiatif.

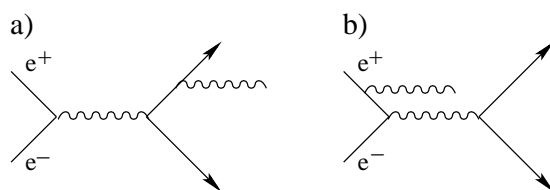


FIG. 5.16.1 – Diagrammes du processus Bhabha radiatifs ; graphe **a** : émission d'un photon par une particule chargée de l'état final ; graphe **b** émission d'un photon par le positron de l'état initial

La prise en compte d'un tel processus amène à faire une correction dans les calculs de l'amplitude de transition. Sans entrer dans le détail de ces calculs, mentionnons le problème occasionné par le comportement divergent du terme correctif lorsque l'énergie du photon tend vers zéro (divergence infrarouge) ou lorsque les trajectoires du photon et du lepton émetteur sont collinéaires.

On est ici hors du contexte de la procédure de normalisation. On s'en sort en pratique en introduisant des coupures aux limites inférieures, justifiées par le fait que les appareils ont un seuil de détection en énergie et une résolution angulaire finie. L'effet de telles coupures est étudié dans les programmes de simulation à l'aide des générateurs Monte Carlo.

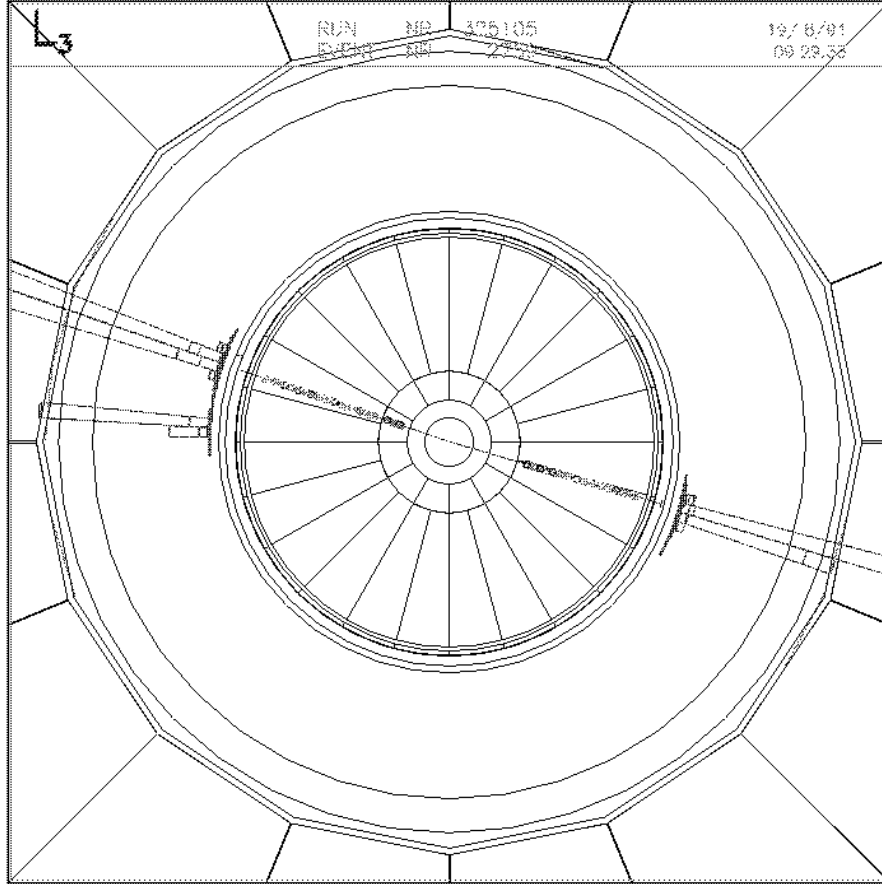


FIG. 5.16.2 – Événement Bhabha radiatif du type $e^+e^- \rightarrow e^+e^-(\gamma)$ observé par le détecteur L3 au CERN. Les faisceaux sont perpendiculaires à la figure et la collision a eu lieu au centre de celle-ci. Le e^+ et le e^- de l'état final ont donné des signaux en correspondance dans le détecteur à trace central et dans le calorimètre. Le photon est reconnaissable par la présence d'un signal dans le calorimètre et l'absence de trace correspondante

6 Partons et quarks.

Ce chapitre est consacré à l'étude phénoménologique de la structure des hadrons au moyen d'une sonde e.m.. On examine d'abord les caractéristiques de la diffusion électron (ou muon)-proton et en particulier la "diffusion inélastique profonde". On présente ensuite les enseignements qu'on peut tirer de l'étude de l'annihilation $e^+e^- \rightarrow \gamma \rightarrow \bar{q}q$.

6.1 La diffusion électron-nucléon.

La collision d'un électron (ou d'un muon) ponctuel avec un proton (avec structure) est représentée par le diagramme de la figure 6.1.1. L'expérience consiste à envoyer un faisceau d'électrons (ou de muons) sur une cible de protons au repos dans le laboratoire. On observe les produits de la collision : le lepton diffusé et les particules X.

La tache grise ("blob") représente le fait que la sonde (le photon virtuel) doit faire face à un proton avec structure. Plusieurs régimes sont possibles :

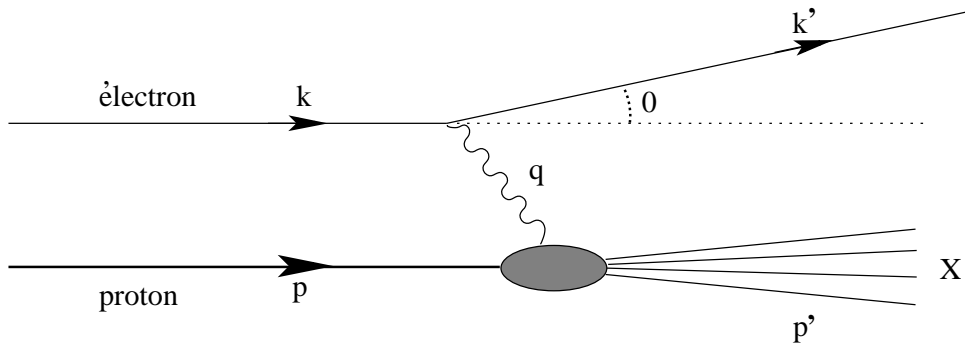


FIG. 6.1.1 – Diagramme de la diffusion électron-proton.

- le hadron peut sortir intact, la diffusion est élastique; $X = \text{proton}$ et $M_X = M_{\text{proton}}$;
- X peut être un état excité du nucléon (N^*, Δ). $M_X = M(\text{résonance}) > M_{\text{proton}}$;
- X peut représenter plusieurs hadrons produits, dont la masse effective $W > M_{\text{proton}}$.

Dans certaines expériences, on ne mesure que le lepton diffusé, les particules indiquées par X étant "ignorées". On parle alors de mesure de la **section efficace inclusive**. Dans la prédiction théorique de la section efficace inclusive, il faut sommer sur tous les états finaux X accessibles.

On peut mesurer une section efficace différentielle $d^2\sigma/dk'd\theta$ en fonction de la configuration du lepton sortant, c'est à dire de son angle de diffusion θ dans le laboratoire par rapport à la direction du faisceau et de son énergie. Dans le cas où l'énergie du faisceau est suffisamment élevée, on réalise ainsi une expérience à la Rutherford, qui a pour objectif d'explorer la structure e.m. du nucléon à des dimensions \mathcal{O} (1fm).

De telles expériences ont été effectuées au SLAC (USA) dans la décennie 1960. Leurs résultats sont compatibles avec l'existence d'une structure interne : **les partons**.

Le plus gros collisionneur e^-p actuel est HERA (Hambourg). Un faisceau d'électrons de 30 GeV est dirigé sur un faisceau de protons de 82 GeV. La luminosité est de $16 \times 10^{30} \text{ cm}^{-2}\text{s}^{-1}$. Les deux expériences installées sur la machine sont ZEUS et H1.

On peut déjà faire quelques prédictions qualitatives sur le comportement de l'interaction.

- Si le moment de transfert q est petit, le noyau cible subit un simple recul et la **diffusion est élastique**. Le lepton projectile ne parvient pas à résoudre la structure de la cible ; la section efficace différentielle angulaire est du type donné par la relation 5.12.8 pour la diffusion $e^-\mu^-$:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left[\frac{\alpha^2}{4 |\mathbf{k}|^2 \sin^4(\theta/2)} \cos^2(\theta/2) \right] \frac{|\mathbf{k}'|}{|\mathbf{k}|} \left[1 - \frac{q^2 \tan^2(\theta/2)}{2M^2} \right] \quad (6.1.1)$$

Le terme en $|\mathbf{k}'|/|\mathbf{k}|$ est dû au recul de la cible. Le terme avec la tangente est attribué au spin du noyau cible, donc à son moment magnétique. Le terme dans le premier crochet multiplié par $|\mathbf{k}'|/|\mathbf{k}|$ correspond à la section efficace de Mott, pour un noyau cible de masse M sans structure (notée aussi $\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{ss}$).

- Si le moment de transfert q est grand, le lepton projectile acquiert un pouvoir d'analyse lui permettant de révéler la structure du nucléon cible. On doit donc modifier dans la relation 6.1.1 le terme contenant la charge électrique en introduisant un facteur correctif $A(q^2)$, comparable au facteur de forme $F(q^2)$ que l'on a introduit pour le pion cible dans le cas de la diffusion $e^-\pi$ (§ 5.13). De même la partie magnétique de 6.1.1 doit être multipliée par un facteur de correction $B(q^2)$. On obtient finalement une expression de la forme :

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{ss} \times [A(q^2) + B(q^2) \tan^2(\theta/2)] \quad (6.1.2)$$

- Dès que l'énergie transférée est supérieure à un certain seuil, le recul X peut être constitué par une résonance voire plusieurs particules : c'est la **diffusion inélastique**. La masse effective du système X est supérieure à la masse du nucléon et l'énergie nécessaire pour former X est prise aux dépens de l'énergie totale disponible.

6.2 Section efficace différentielle angulaire de diffusion élastique électron-proton et électron-neutron.

Les directives exposées au § 5.10 sont applicables ici : le courant e.m. associé au proton en interaction doit satisfaire 1) à l'invariance de Lorentz et 2) à la conservation de la charge. L'expression 5.10.3 devient pour le proton supposé ponctuel :

$$j^\mu(\text{proton}) = (+e)NN'\bar{u}(p', s')\gamma^\mu u(p, s) \exp\{i(p' - p)x\}$$

Pour un proton cible non ponctuel, elle se transforme en :

$$j^\mu(\text{proton}) = (+e)NN'\bar{u}(p', s') \left[\gamma^\mu F_1(q^2) + \frac{i\kappa F_2(q^2)}{2M} \sigma^{\mu\nu} q_\nu \right] u(p, s) \exp\{i(p' - p)x\} \quad (6.2.1)$$

Notons qu'en raison du spin du nucléon on est amené à introduire deux facteurs de correction $F_1(q^2)$ pour le terme électrique et $F_2(q^2)$ pour le terme magnétique. Ce dernier terme contient le facteur κ correspondant à la partie anormale du moment magnétique du nucléon, et le facteur :

$$\sigma^{\mu\nu} = \frac{1}{2}i [\gamma^\mu \cdot \gamma^\nu] \quad (6.2.2)$$

Q. : que vaut $\sigma^{\mu\nu}$?

A la limite $q \rightarrow 0$, on a :

$$\begin{array}{ll} \text{pour le proton : } & F_1(0) = 1 \quad F_2(0) = 1 \\ \text{pour le neutron : } & F_1(0) = 0 \quad F_2(0) = 1 \end{array} \quad (6.2.3)$$

Le moment magnétique anormal du nucléon contribue à modifier l'interaction de la particule. Rappelons que pour un fermion de Dirac sans structure $\kappa = 0$.

La section efficace différentielle angulaire est donnée par la relation 6.1.2, où les facteurs $A(q^2)$ et $B(q^2)$ peuvent être exprimés en termes de $F_1(q^2)$ et $F_2(q^2)$:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{ss} \times \{ [F_1^2(q^2) + \tau\kappa^2 F_2^2(q^2)] + [2\tau(F_1(q^2) + \kappa F_2(q^2))]^2 \tan^2(\theta/2) \} \quad (6.2.4)$$

où $\tau = -q^2/4M^2$.

C'est ce qu'on appelle communément la **section efficace de Rosenbluth**.

Dans la littérature on trouve aussi la forme équivalente :

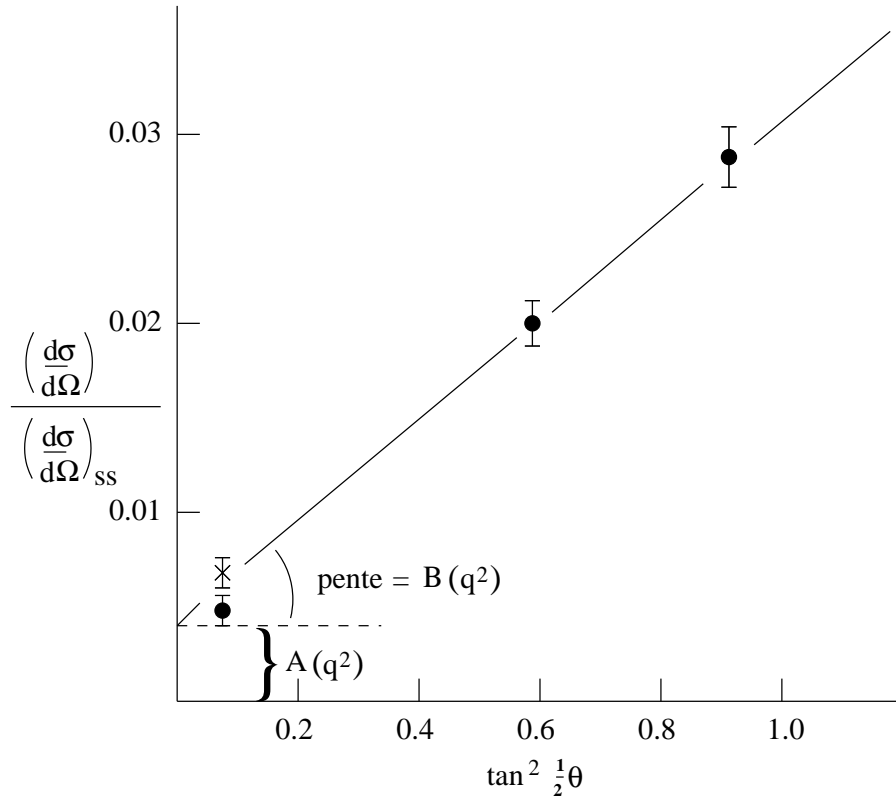


FIG. 6.2.1 – Section efficace différentielle normalisée de la diffusion e^-p , en fonction de $\tan^2(\theta/2)$ pour un q^2 fixe de -3 GeV^2 . Les points expérimentaux confirment la validité de la formule de Rosenbluth. Le calcul au premier ordre (un seul photon échangé) donne une bonne approximation de la section efficace.

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{ss} \times \left\{ \left(\frac{G_E^2 + \tau G_M^2}{1 + \tau}\right) + 2\tau G_M^2 \tan^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right\} \quad (6.2.5)$$

où :

$$\begin{aligned} G_E(q^2) &= F_1(q^2) + \kappa \frac{q^2}{4M^2} F_2(q^2) \\ G_M(q^2) &= F_1(q^2) + \kappa F_2(q^2) \end{aligned} \quad (6.2.6)$$

$G_E(q^2)$ et $G_M(q^2)$ sont appelés les facteurs de forme électrique et magnétique de

Sachs :

$$\begin{aligned} \text{pour le proton : } G_E^p(0) &= 1 & G_M^p(0) &= 1 + \kappa = 2.7928\dots = \mu_p \\ \text{pour le neutron : } G_E^n(0) &= 0 & G_M^n(0) &= 1 + \kappa = -1.9130\dots = \mu_n \end{aligned} \quad (6.2.7)$$

où μ_p et μ_n sont exprimés en magnéton nucléaire : μ_N . (Voir la table PDG pour des valeurs plus précises.)

L'hypothèse sous-jacente dans la relation de Rosenbluth est qu'un seul photon est échangé dans le processus (interaction au 1^{er} ordre). Cette prédiction est testée expérimentalement. Si l'on fixe la valeur de q^2 , on peut représenter le rapport $\frac{d\sigma}{d\Omega} / \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{ss}$ en fonction de $\tan^2(\theta/2)$ et vérifier la relation linéaire 6.2.4 (voir figure 6.2.1).

Pour les mesures de diffusion sur le proton, on utilise une cible d'hydrogène liquide. Le détecteur est capable d'identifier l'électron sortant et d'en déterminer sa direction et son énergie.

La cinématique de la diffusion $e + p \rightarrow e + p$ peut-être décrite à l'aide des variables définies sur la figure 6.1.1, où dans le cas présent X est un proton. Avant la diffusion :

$$\begin{aligned} p_e &= (|\mathbf{k}|, \mathbf{k}) \equiv (|\mathbf{k}|, |\mathbf{k}|, 0, 0) \\ p_p &= (M, 0, 0, 0) \end{aligned}$$

La masse de l'électron a été considérée négligeable en regard de son énergie cinétique ; le nucléon cible est supposé à l'arrêt. Après la diffusion :

$$\begin{aligned} p'_e &= (|\mathbf{k}'|, \mathbf{k}') \quad \text{avec} \quad \mathbf{k}' = \mathbb{1} |\mathbf{k}'| (\cos\theta, \sin\theta, 0) \\ p'_p &= (E', \mathbf{p}') \end{aligned}$$

Q. : montrer que si la diffusion est élastique :

$$|\mathbf{k}'| / |\mathbf{k}| = \left(1 + \frac{2|\mathbf{k}|}{M} \sin^2(\theta/2)\right)^{-1} \quad (6.2.8)$$

cette relation permet de contrôler l'élasticité de la réaction.

On a :

$$\begin{aligned} q^2 &= (p_e - p'_e)^2 = (|\mathbf{k}| - |\mathbf{k}'|)^2 - (\mathbf{k} - \mathbf{k}')^2 \\ &\simeq -2|\mathbf{k}||\mathbf{k}'|(1 - \cos\theta) = -4|\mathbf{k}||\mathbf{k}'|\sin^2(\theta/2) \end{aligned} \quad (6.2.9)$$

On définit souvent : $Q^2 = -q^2$ (pour se débarrasser du signe négatif). En combinant les relations 6.2.8 et 6.2.9, on obtient :

$$Q^2 = \frac{4|\mathbf{k}|^2 \sin^2(\theta/2)}{1 + \frac{2|\mathbf{k}|}{M} \sin^2(\theta/2)} \quad (6.2.10)$$

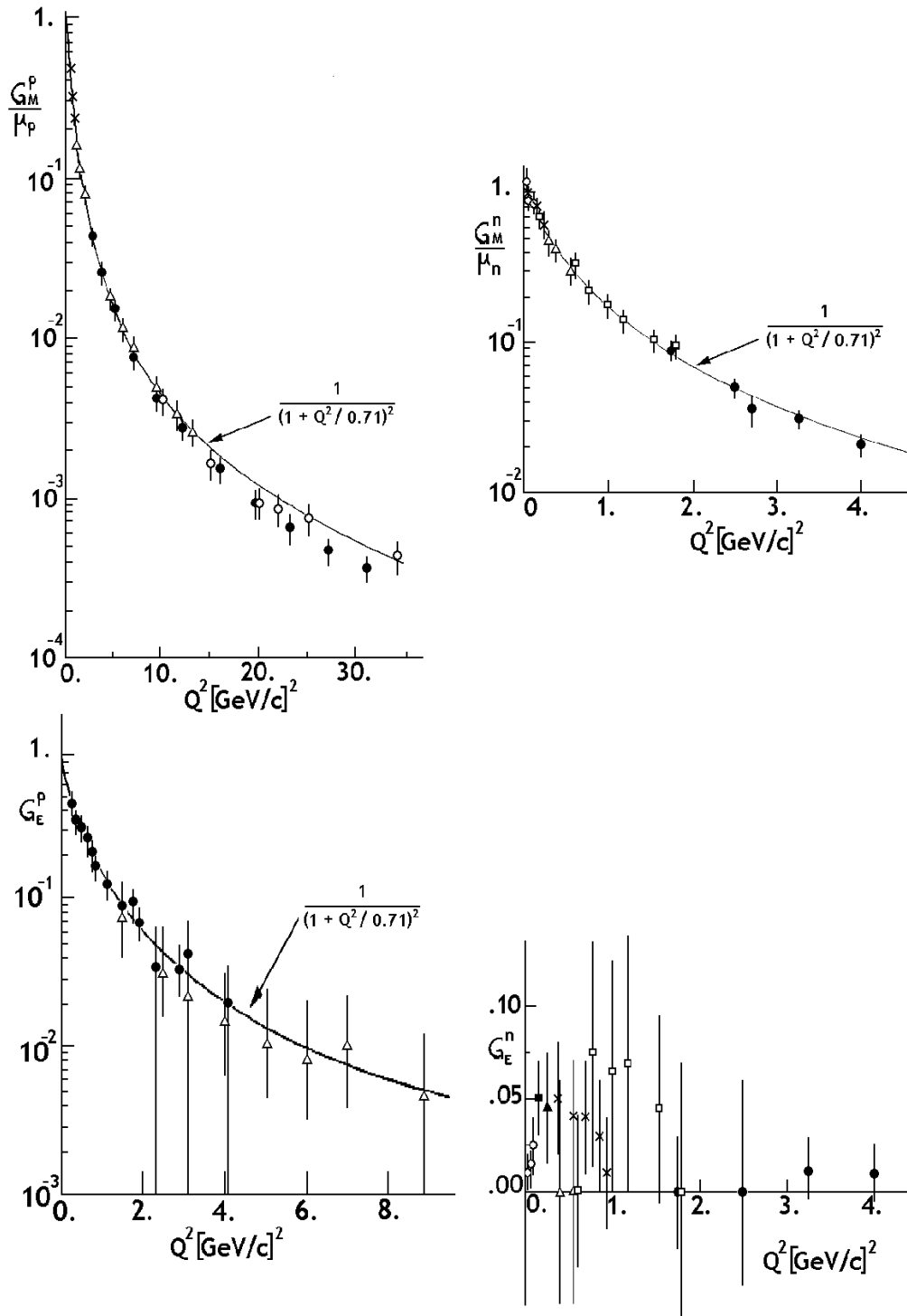


FIG. 6.2.2 – Facteurs de forme magnétique et électrique du proton et du neutron.

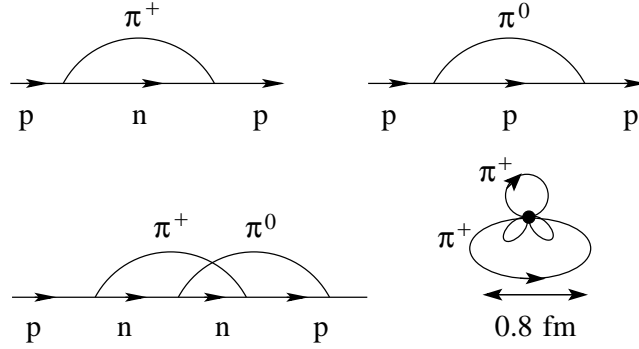


FIG. 6.2.3 – Image de la structure du proton comme étant celle d'un centre dur ponctuel, entouré par un nuage de pions virtuels (à la Yukawa). Les résultats expérimentaux sont en desaccord avec cette représentation.

On voit qu'il est possible de jouer sur les valeurs de l'énergie du faisceau $|\mathbf{k}|$ et de l'angle de diffusion θ de façon à conserver une valeur fixe de Q^2 ; c'est la procédure utilisée pour construire les points expérimentaux de la figure 6.2.1. Observons que Q^2 prend sa valeur maximum pour $\theta = 180^\circ$:

$$Q_{\max}^2 = \frac{4 |\mathbf{k}|^2}{1 + \frac{2|\mathbf{k}|}{M}}$$

Pour les mesures de diffusion sur le neutron, on utilise une cible de deutérium liquide. On doit donc soustraire la contribution du proton et effectuer quelques corrections nucléaires :

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(\text{e-n}) = \frac{d\sigma}{d\Omega}(\text{e-d}) - \frac{d\sigma}{d\Omega}(\text{e-p}) + \delta(\text{nucléaires})$$

Ces expériences ont montré que les facteurs de forme présentent un comportement simple :

$$\begin{aligned} G_E^p(q^2) &= G_M^p(q^2)/\mu_p = G_M^n(q^2)/\mu_n = G(q^2) \\ G_E^n(q^2) &\simeq 0 \end{aligned} \quad (6.2.11)$$

La fonction $G(q^2)$ est bien représentée par un pôle d'ordre 2 (ou dipôle) :

$$G(q^2) = \frac{1}{(1 + Q^2/M_v^2)^2} = \frac{1}{(1 - q^2/M_v^2)^2} \quad (6.2.12)$$

Avec $M_v = 0.84$ GeV, l'ajustement au facteur de forme magnétique du proton est correct à 10% près, jusqu'à $Q^2 \simeq 20\text{GeV}^2$. La figure 6.2.2 montre un certain nombre de ces ajustements.

Un facteur de forme dipolaire correspond dans l'espace physique ordinaire à une distribution de la densité de charges de type exponentiel :

$$\rho(r) = \rho_0 \exp(-rM_v) \quad (6.2.13)$$

Q. : calculer le rayon quadratique moyen du proton correspondant à $M_v = 0.84\text{GeV}$.

Observons que pour une particule de Dirac (ponctuelle) on a $G(q^2) = 1$, quel que soit le q^2 . Les relations 6.2.12 et 13 expriment le fait que le proton n'est pas ponctuel. De plus, 6.2.13 indique l'absence d'un centre "dur" ponctuel dans le nucléon. On ne peut donc pas imaginer le proton comme un objet ponctuel entouré par un nuage de pions, comme proposé par Yukawa (figure 6.2.3). Pour une distribution à la Yukawa $\sim r^{-1} \exp(-rM_v)$, on aurait obtenu un $G(q^2)$ de la forme $(1 + Q^2/M_v^2)^{-1}$.

Remarquons finalement que $G(q^2)$ tend vers 0 comme $1/Q^4$ (eq. 6.2.12). Donc la section efficace de diffusion élastique décroît très vite comme $\rightarrow \frac{1}{k^2} \left(\frac{1}{Q^4}\right)^2 \sim \frac{1}{Q^2} \left(\frac{1}{Q^4}\right)^2$. On verra que cela n'est pas le cas de la section efficace de diffusion **inélastique**.

6.3 La diffusion inélastique électron-proton.

On recourt à la figure 6.1.1 pour définir les variables de la cinématique de $e + p \rightarrow e + X$. Rappelons (§ 6.1) qu' X peut désigner une résonance baryonique de masse $M_X = M_{\text{res}} > M_p$, ou un ensemble de plusieurs hadrons de masse effective W . La cinématique d' X est encore décrite par le quadri-vecteur (E', \mathbf{p}') . De plus, en admettant que le mécanisme de la réaction est dominé par l'échange d'un photon (comme dans la diffusion élastique), on introduit les composantes du quadrimoment de transfert $q = (\nu, \mathbf{q})$.

Au vertex leptonique, la relation (6.2.9) s'applique :

$$Q^2 = -q^2 \simeq 4 |\mathbf{k}| |\mathbf{k}'| \sin^2(\theta/2), \quad \text{avec} \quad |\mathbf{k}| - |\mathbf{k}'| = \nu$$

$$m_e \ll |\mathbf{k}|$$

Au vertex hadronique (le proton cible est supposé à l'arrêt) on a :

$$\begin{aligned} Q^2 &= -q^2 = -(p' - p)^2 \\ &= -(p')^2 - p^2 + 2p'p \\ &= -W^2 - M^2 + 2E'M, \quad \text{avec} \quad E' - M = \nu \end{aligned}$$

d'où :

$$Q^2 = M^2 - W^2 + 2M\nu \quad (6.3.1)$$

La grandeur W peut prendre différentes valeurs (spectre continu) selon la configuration de l'ensemble hadronique produit, à énergie du lepton incident et angle de diffusion donnés. En toute généralité dans la diffusion inélastique $e - p$ les quantités Q^2 et ν sont des variables non strictement corrélées ; cette paire de variables est appelée communément "de Mandelstam". On peut utiliser la paire alternative θ et W .

Q. : établir l'expression de W en fonction de $|\mathbf{k}|$, $|\mathbf{k}'|$ et θ .

Observons que dans le cas de la diffusion élastique $e - p$, $W = M$, et de 6.3.1 :

$$Q^2 = 2M\nu \quad (6.3.2)$$

les quantités Q^2 et ν sont donc proportionnelles.

S'il y a production d'une résonance hadronique, la masse de l'état produit est fonction des valeurs de Q^2 et ν :

$$M_{\text{res}} = W_{\text{res}} = (M^2 + 2M\nu - Q^2)^{1/2} \quad (6.3.3)$$

Ces différentes situations sont illustrées par les diagrammes de la figure 6.3.1. Si l'on reporte la quantité Q^2 en fonction de $2M\nu$ (fig 6.3.1a), la diffusion élastique est décrite par une droite à 45° passant par l'origine. La production de résonances est décrite par des droites parallèles décalées, dont l'abscisse à l'origine permet de déduire la valeur centrale de la masse (les résonances ont une certaine largeur, symbolisée par un trait épais dans le graphique).

On définit la région de diffusion inélastique profonde (**Deep Inelastic Scattering**, abrégé par la suite **DIS**) comme celle où W est grande par rapport aux masses des résonances hadroniques, et où Q^2 est grande également ($\approx \mathcal{O}(> 1\text{GeV}^2)$) ce qui confère un pouvoir de pénétration élevé au photon sonde. Il s'est avéré possible, dans de telles conditions, de mettre en évidence une structure interne du nucléon (en partons ponctuels).

On peut en comprendre les raisons profondes en comparant les résultats d'expériences **DIS** sur une cible d'hydrogène (LH2) à ceux d'expériences antérieures de physique nucléaire relatives à la diffusion d'électrons sur des noyaux atomiques.

La figure 6.3.2 concerne spécifiquement la diffusion d'électrons de 0.4 GeV sur une cible d'Hélium liquide⁶⁹. Elle montre (courbe en trait continu) l'allure de la section efficace de diffusion en fonction de l'énergie ($|\mathbf{k}'|$) de l'électron diffusé, sous un angle de 45° . On observe sur la droite du graphique un pic prononcé, qu'on interprète comme résultant de la diffusion élastique cohérente sur les noyaux d'He.

⁶⁹R.Hofstadter et al. Rev. Mod. Phys. 28 (1956) 214

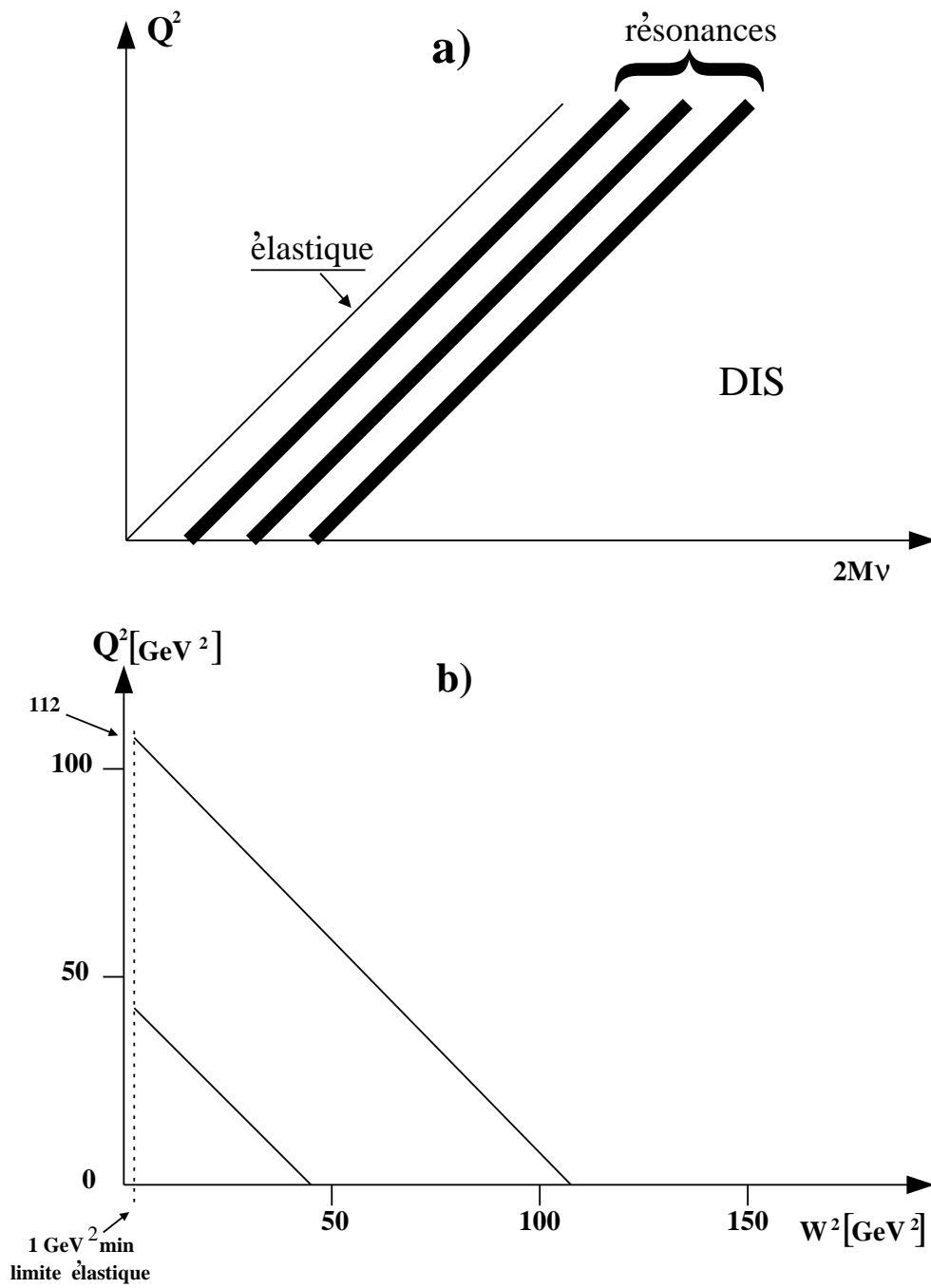


FIG. 6.3.1 – a) : les régions de la diffusion *ep*. b) les domaines que l'on peut explorer avec des faisceaux de 20 et 56 GeV.

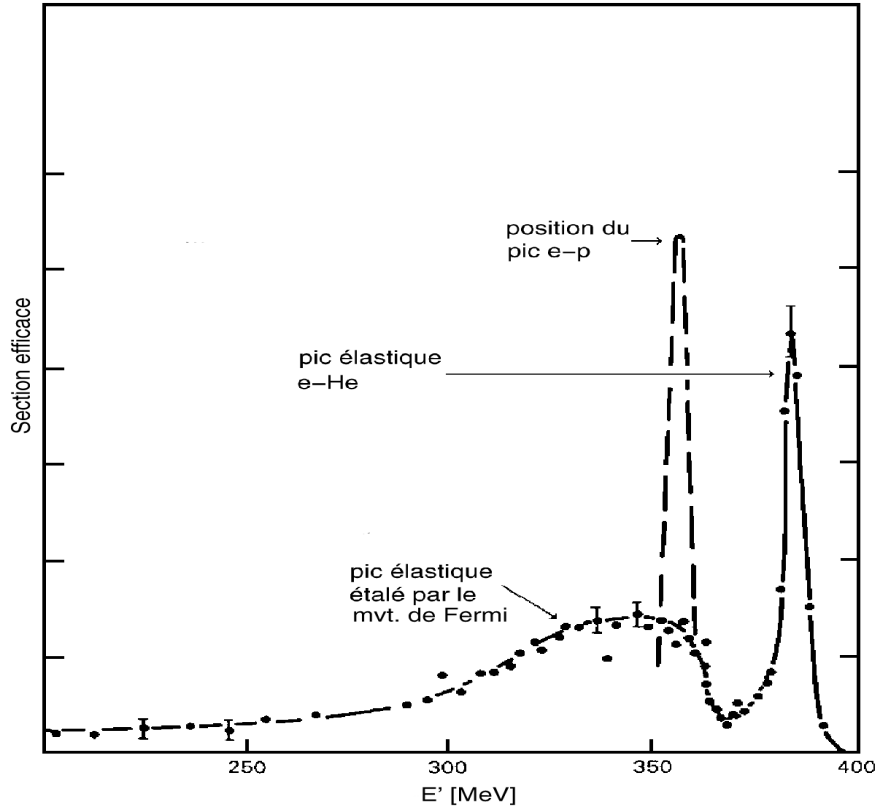


FIG. 6.3.2 – Diffusion d’électrons de 400 MeV sur des noyaux d’He, à 45°.

Pour $|\mathbf{k}| = 0.4 \text{ GeV}$, $\theta = 45^\circ$ et une masse du centre diffuseur $M \simeq 4 \text{ GeV}$, la relation 6.2.8 donne en effet $|\mathbf{k}'| \simeq 0.39 \text{ GeV}$. Avec une valeur de $\nu \simeq 0.012 \text{ GeV}$, le $Q^2 = 2M_{He}\nu$ correspondant est d’environ 0.091 GeV^2 . La surface sous le pic est relativement importante ; pour les diffusions en cause, le photon virtuel n’est pas parvenu à résoudre la structure interne du noyau cible. Rappelons que le noyau d’He a une taille d’environ $1.4 \cdot \text{A}^{1/3} \simeq 2.2 \text{ fm}$, la taille du nucléon étant d’environ 1 fm (0.2 GeV en unité naturelle). On observe également au centre du graphique une large bosse s’étendant de 0.3 à 0.36 GeV . Le pic reporté sur la figure en traitillé représente la diffusion élastique du même faisceau d’électrons sur une cible de protons (LH2). La valeur de ν correspondante est de 0.045 GeV pour un $Q^2 = 2M_p\nu$ de 0.083 GeV^2 . La coïncidence des emplacements suggère l’interprétation suivante : la bosse résulte des diffusions quasi-élastiques d’électrons sur les nucléons individuels du noyau d’He. L’effet d’étalement s’explique comme la conséquence du mouvement de Fermi des nucléons dans le noyau et de l’implication des forces nucléaires.

Les résultats de séries d’expériences de ce type, effectuées pour des valeurs croissantes de Q^2 , montrent que l’importance relative de la bosse croît aux dé-

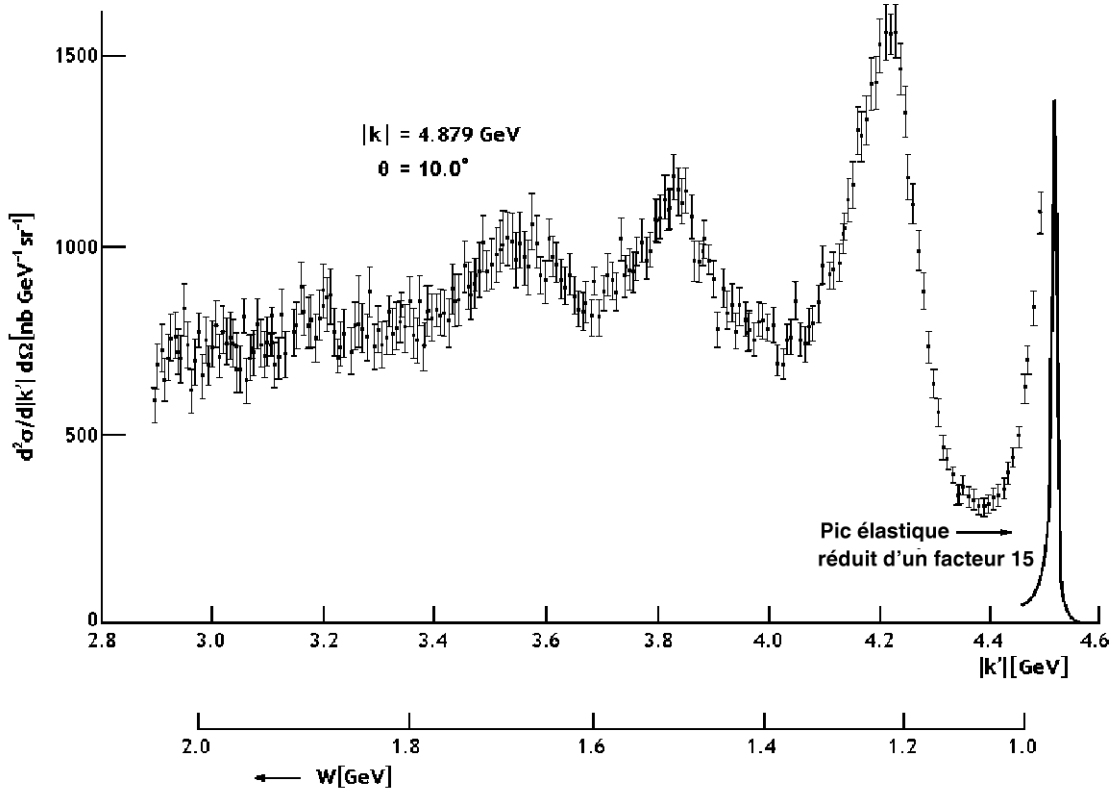


FIG. 6.3.3 – Diffusion d'électrons de 4.879 GeV sur des noyaux d'H.

pens de celle du pic de diffusion cohérente (et donc du facteur de forme élastique $F_{He}(Q^2)$). La structure nucléonique du noyau est de mieux en mieux révélée au fur et à mesure que s'accroît l'efficacité du photon (virtuel) en tant que sonde.

On s'attend à observer le même genre d'effet dans la diffusion électron-nucléon à haute énergie. La figure 6.3.3 montre des résultats de mesure de diffusion sur une cible d'hydrogène (LH2), sous l'angle $\theta = 10^\circ$ ⁷⁰.

Le faisceau d'électrons a une énergie de $|\mathbf{k}| = 4.879$ GeV ; $|\mathbf{k}'|$ (élastique) = 4.52 GeV, ce qui correspond à un Q^2 (élastique) = 0.67 GeV². Le pic élastique étroit est représenté à l'extrémité droite du graphique ; on voit également d'autres pics plus larges à des valeurs inférieures de $|\mathbf{k}'|$. Cette structure est interprétée comme résultant de l'excitation de résonances baryoniques, mécanisme absent dans la diffusion à 400 MeV sur des noyaux d'He. Par exemple, le pic à $|\mathbf{k}'| = 4.26$ GeV correspond à une masse $M_{\text{res}} = W \simeq 1.2$ GeV (d'après 6.3.1) ; il s'agit de l'état excité $\Delta(1238)$ référencé dans la table PDG.

La prééminence de l'excitation de résonances a d'importantes répercussions

⁷⁰W.Bartel et al. Phys.Lett. 28B (1968) 148

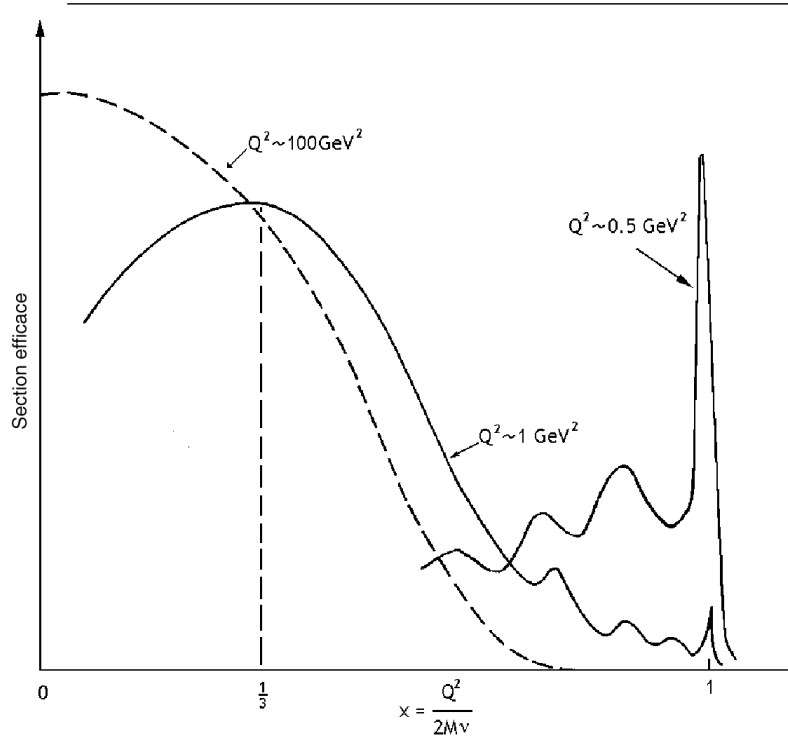


FIG. 6.3.4 – Diffusion d'électrons sur des noyaux d'H, pour trois ordres de grandeurs de Q^2 .

sur le choix d'un domaine de (Q^2, ν) adéquat pour faire de la diffusion inélastique profonde. Par exemple, si l'on se rapporte à la situation de la figure 6.3.3, avec un Q^2 de 0.67 GeV^2 et pour des centres diffuseurs (partons) ayant une masse de l'ordre de $M_p/3 \simeq 0.31 \text{ GeV}$ on trouve un pic élastique à $|\mathbf{k}'| \simeq 3.9 \text{ GeV}$, $\nu(\text{élastique}) \simeq 1 \text{ GeV}$, soit en plein dans la région des résonances. Si l'on veut avoir une chance de résoudre la structure en partons du nucléon, il faut impérativement se placer à des valeurs de Q^2 et ν bien supérieures à celles ci-dessus.

Puisqu'on fait souvent référence à la situation dans la diffusion élastique, il est commode pour la discussion d'introduire la variable :

$$x = Q^2/2M\nu \quad \text{où} \quad 0 \leq x \leq 1. \quad (6.3.4)$$

Q. : dessiner les courbes à $x=\text{cte}$ sur le graphique de la figure 6.3.1 a.

Il est instructif d'examiner l'allure de la section efficace de diffusion sur le nucléon vu comme un système formé de 3 quarks, en fonction de cette variable x et à Q^2 fixé. C'est ce qu'on a représenté qualitativement dans la figure 6.3.4 pour

des valeurs de Q^2 différant de 3 ordres de grandeur. Aux petites valeurs de Q^2 ($\simeq 0.5 \text{ GeV}^2$), la diffusion cohérente sur le nucléon ($x \simeq 1$) et l'excitation de résonances dominant. Aux valeurs intermédiaires de Q^2 ($\simeq 1 \text{ GeV}^2$), c'est la diffusion quasi-élastique incohérente sur les partons qui domine (bosse centrée autour de $x \simeq 1/3$); la structure résonnante, bien qu'encore apparente, est rejetée en direction du (modeste) pic élastique. Aux très grandes valeurs de Q^2 ($\simeq 100 \text{ GeV}^2$), le maximum de la section efficace se déplace vers $x = 0$, la structure résonnante et le pic élastique ont quasiment disparu. Ce déplacement caractéristique peut être interprété à l'aide de la théorie QCD (voir figure 6.3.5). L'émission de gluons (figure 6.3.5 b) peut entraîner une dégradation de l'énergie du parton (donc de x). Des paires virtuelles $\bar{q}q$ peuvent être créées (figure 6.3.5 c) et venir enrichir la "mer de quarks", affectant le photon sonde au même titre que les quarks "de valence".

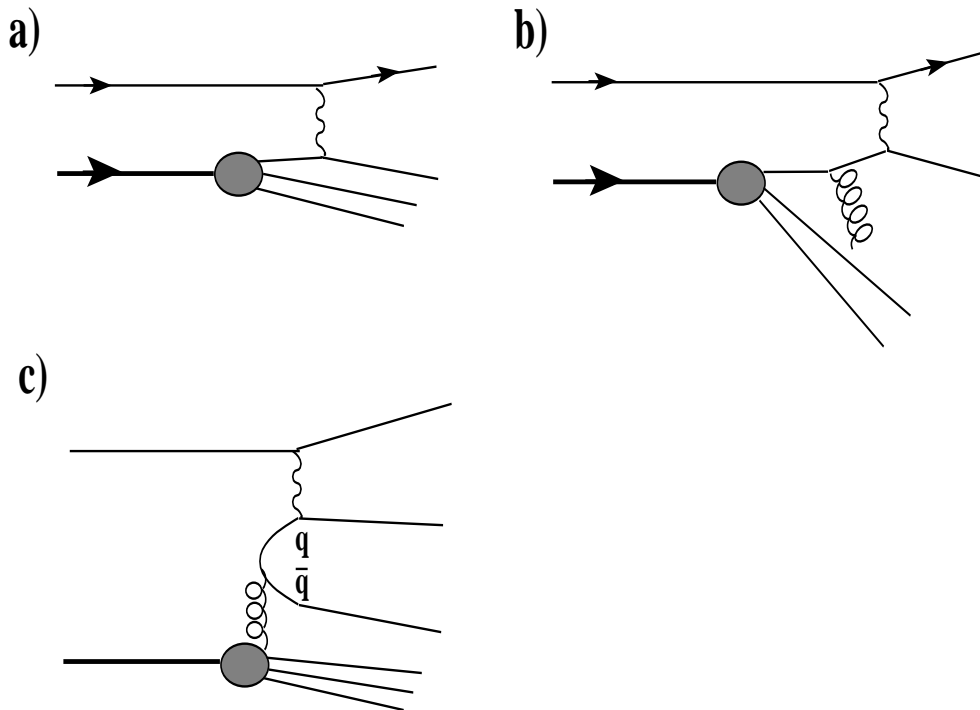


FIG. 6.3.5 – Diffusion inélastique e-proton **a)** diagramme de base ; **b)** le photon touche le quark après émission d'un gluon ; **c)** le photon touche un quark de la mer (voir aussi 6.41 b).

Les résultats des expériences de diffusion inélastique profonde (**DIS**) sont

communément représentées sous la forme d'une section efficace différentielle à deux dimensions (une dimension dans le cas de la diffusion élastique), où la paire de variables est choisie dans la liste : θ , $|\mathbf{k}'|$, Q^2 , ν et W . Par exemple, dans la figure 6.3.3 on a utilisé l'expression $d^2\sigma(\theta, |\mathbf{k}'|)/d\Omega d|\mathbf{k}'|$. On rencontre plus souvent la forme équivalente $d\sigma^2/dQ^2 d\nu$, qui peut être déduite de la relation 6.1.2 :

$$\begin{aligned} \frac{d^2\sigma}{dQ^2 d\nu} &= \frac{4\pi\alpha^2}{Q^4} \frac{|\mathbf{k}'|}{|\mathbf{k}|} [W_2(Q^2, \nu) \cos^2(\theta/2) + 2W_1(Q^2, \nu) \sin^2(\theta/2)] \\ &= \frac{\pi\alpha^2}{4|\mathbf{k}|^2 \sin^4(\theta/2)} \frac{1}{|\mathbf{k}||\mathbf{k}'|} [W_2(Q^2, \nu) \cos^2(\theta/2) + 2W_1(Q^2, \nu) \sin^2(\theta/2)] \end{aligned} \quad (6.3.5)$$

Les $W_i(Q^2, \nu)$ sont appelés les **fonctions de structure**. La dépendance de ces fonctions envers les variables Q^2 et ν est explicitée car en diffusion inélastique ces deux variables ne sont pas (rigidement) liées. Expérimentalement, la détermination des fonctions de structure W_1 et W_2 demande que l'on fasse varier k' et θ en maintenant Q^2 et ν fixes. Cela permet de séparer les deux contributions.

Revenons à l'interprétation du phénomène comme l'addition incohérente de diffusions par l'ensemble des partons d'un nucléon. Si le processus élémentaire est la diffusion élastique sur un parton de masse m égale à une fraction f de la masse du proton, $m = fM$ on peut poser en première approximation :

$$Q^2 = 2m\nu = 2fM\nu$$

On s'attend donc à observer une **corrélacion entre Q^2 et ν dans la région du DIS** et voir la dépendance des W_i réduite (du moins asymptotiquement) à une seule de ces variables. Par conséquent, on peut admettre qu'à Q^2 et ν fixes la probabilité de diffusion élastique élémentaire est liée à la probabilité de trouver le parton de masse fM dans le nucléon. L'effet de structure peut être exprimé en fonction du rapport :

$$f = x_{\text{Bjorken}} = x = Q^2/2M\nu$$

C'est l'hypothèse dite du "**scaling de Bjorken**". Les fonctions de structure présentent un ajustement de taille ("scaling") :

$$\begin{aligned} \text{quand } Q^2 \rightarrow \infty \quad \text{et} \quad \nu \rightarrow \infty \quad \text{à} \quad x = \frac{Q^2}{2M\nu} = \text{fixé} \\ MW_1(Q^2, \nu) \rightarrow F_1(x) \\ \nu W_2(Q^2, \nu) \rightarrow F_2(x) \end{aligned} \quad (6.3.6)$$

Les résultats d'expériences effectuées au SLAC ⁷¹ confirment qu'il existe une dépendance simple des fonctions de structure envers la variable x ($1/\omega$ dans l'ar-

⁷¹M. Breidenbach et al. Phys. Rev. Lett. 23 (1969) 935

tion) et que les fonctions $F_1(x)$ et $F_2(x)$ restent finies⁷², même aux très grandes valeurs de Q^2 et de ν (figures 6.3.6 et 6.3.7)

Le terme "scaling" signifie précisément que si l'on multiplie tout 4-vecteur (E, \mathbf{p}) par une constante, ces fonctions $F_i(x)$ restent inchangées.

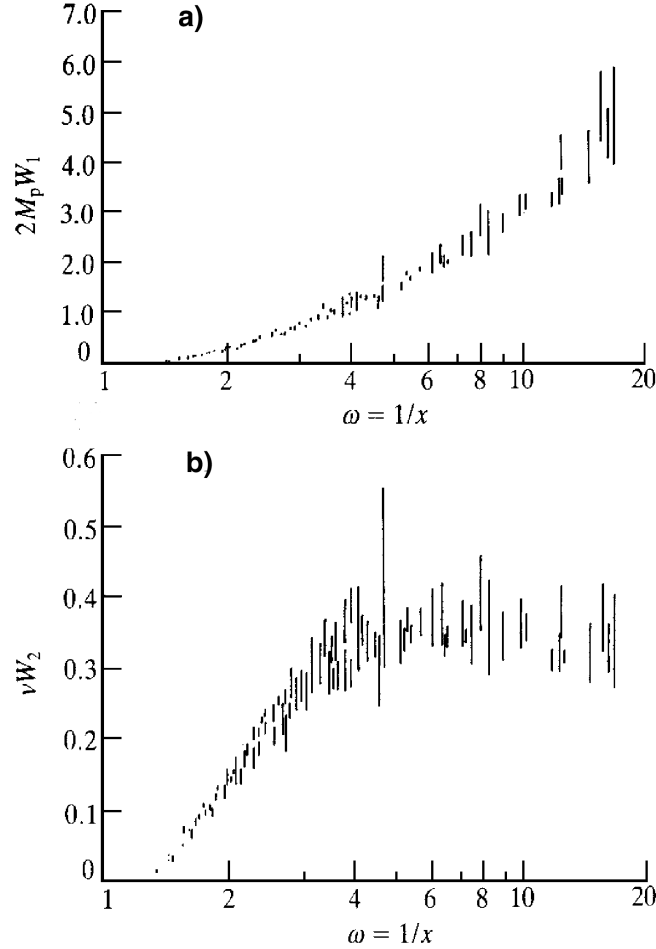


FIG. 6.3.6 – Ajustement de taille ("scaling"). Dépendance en x des fonctions F_1 et F_2 pour une série de mesures à $Q^2 > 1 \text{ GeV}^2$.

R. Feynman⁷³ a donné une interprétation physique de cet effet de "scaling". On se place comme observateur attaché à l'électron ; dans ce référentiel le proton a une impulsion grande et on peut en négliger sa masse. Le photon sonde voit donc passer un projectile extrêmement rapide et dispose d'un temps très court $O(1/\nu)$ pour interagir. Grâce à une sorte d'effet stroboscopique, il voit les partons (qui

⁷²Notons que ces deux fonctions ne sont pas à confondre avec les fonctions définies au § 6.2.

⁷³R.P. Feynman Phys. Rev. Lett. 23 (1969) 1415

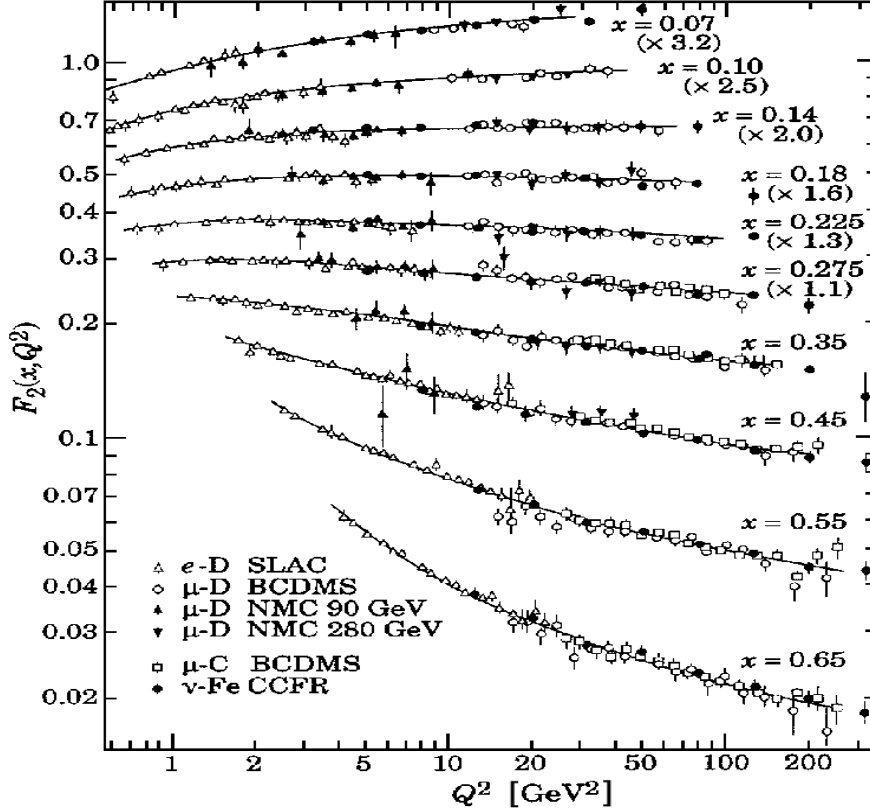


FIG. 6.3.7 – Facteur de forme $F_2(x, Q^2)$ du nucléon déterminé par diffusion inélastique. Un facteur multiplicatif (entre parenthèse) a été appliqué à F_2 afin d'étendre la plage des valeurs d' x représentée sur la figure.

fluctuent dans le proton) comme gelés en des positions données et il heurte un de ces partons. On admet que ce parton transporte la fraction f de la quantité de mouvement du proton et que sa masse effective $m = fM$ est négligeable par rapport à Q^2 : $m \simeq 0$ (on parle de masse effective du fait que ce parton est lié aux autres partons dans le proton). On admet enfin qu'après l'interaction le parton est (presque) libre. Soit $P = (|\mathbf{p}|, 0, 0, |\mathbf{p}|)$ la 4-impulsion du proton avant la collision et fP celle du parton. Après la collision, la 4-impulsion du parton est $fP + q$ telle que $(fP + q)^2 = m^2 \simeq 0$. On considère que la masse effective du parton ne s'accroît pas au cours de la collision ou qu'elle reste négligeable (ce qui est raisonnable, si l'on considère le parton libre et s'il n'y a pas d'états partoniques excités...!). Puisque $f^2P^2 = f^2M^2 = m^2 \simeq 0$, on obtient :

$$f = -q^2/2Pq = Q^2/2M\nu \equiv x \quad (6.3.7)$$

Notons que cette relation est applicable aussi dans le référentiel du laboratoire, car q^2 et Pq sont des invariants de Lorentz.

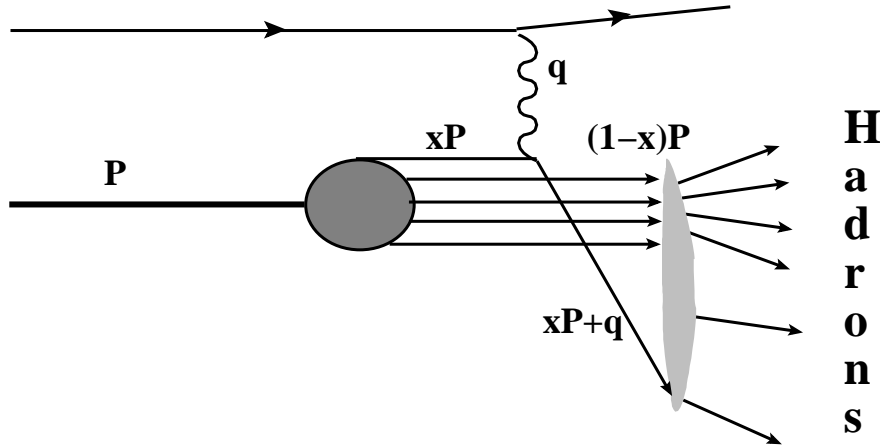


FIG. 6.3.8 – Diagramme de la diffusion d'un lepton sur un parton qui transporte une fraction xP de l'impulsion du proton.

Le diagramme de la figure 6.3.8 représente l'interaction du photon sonde avec un des partons du nucléon, les autres partons étant des spectateurs. Après l'interaction les partons reforment des hadrons par un processus compliqué appelé hadronisation (voir § 6.6). Le processus se déroule sur une échelle de temps très étendue en regard de la durée du processus élémentaire de diffusion.

6.4 La structure du proton.

Les prédictions théoriques concernant les fonctions de structure sont faites en admettant que le parton est une particule de Dirac de spin 1/2. Ce parton est symbolisé par q , où q peut être l'un des quarks u,d ou s,... ; sa charge électrique en unité de la charge du positron est indiquée par z_q . Il a une probabilité $q(x)dx$ de se trouver dans le proton avec une quantité de mouvement comprise entre xP et $(x + dx)P$. Cette probabilité est une propriété intrinsèque au nucléon, indépendante des processus dont il peut être le siège. On utilise l'expression de la section efficace différentielle de diffusion de deux fermions de spin 1/2 (voir 5.12.9), en effectuant la substitution $\alpha \rightarrow z_q\alpha$:

$$\frac{d\hat{\sigma}}{d\hat{t}} = z_q^2 \frac{2\pi\alpha^2}{\hat{t}^2} \left(1 + \frac{\hat{u}^2}{\hat{s}^2} \right) \quad (6.4.1)$$

Dans la relation 6.4.1 et celles qui suivent dans ce paragraphe, il est convenu que les variables cinématiques \hat{s} , \hat{t} , \hat{u} (avec chapeau) sont relatives au parton, tandis

que les variables cinématiques s , t , u (sans chapeau) sont relatives au proton. Si l'on néglige les masses des partons, on peut montrer que (exercice) :

$$\hat{s} \simeq xs \quad \hat{u} \simeq xu \quad \hat{t} = t = -Q^2 \quad (6.4.2)$$

Donc
$$\frac{d\hat{\sigma}}{d\hat{t}} = \frac{d\hat{\sigma}}{dt} \quad \text{et} \quad \frac{\hat{u}^2}{\hat{s}^2} = \frac{u^2}{s^2}$$

Dans la diffusion inélastique, on a besoin de deux variables cinématiques et on est amené à définir la section efficace doublement différentielle :

$$\frac{d^2\hat{\sigma}}{dt(xdu)} = z_q^2 \frac{2\pi\alpha^2}{t^2} \left(1 + \frac{u^2}{s^2}\right) \delta(xs + xu + t) \quad (6.4.3)$$

La fonction δ assure l'élasticité de l'interaction élémentaire : $\hat{s} + \hat{t} + \hat{u} \simeq 0$ (la contribution des masses est supposée négligeable). La structure en partons est prise en compte en insérant dans 6.4.3 la probabilité $q(x)dx$ définie ci-dessus, en intégrant sur x et en sommant sur les partons présents. Cette sommation est effectuée en identifiant les partons aux quarks. On obtient :

$$\frac{d^2\sigma}{dtdu} = \frac{2\pi\alpha^2}{t^2} \left(1 + \frac{u^2}{s^2}\right) \int_0^1 dx \delta(xs + xu + t) \sum_q z_q^2 x q(x) \quad (6.4.4)$$

Remarquons que le facteur $1/t^2 = 1/Q^4$ est extérieur à l'intégrale ; toute l'information sur la structure est contenue dans la somme et celle-ci est indépendante de Q , d'où le "scaling" de Bjorken. A partir de cela, on peut montrer que (voir par ex. ref.12 § 12.5 :

$$2xF_1(x) = F_2(x) = \sum_q z_q^2 x q(x) \quad (6.4.5)$$

La relation 6.4.5 (dite de Callan et Gross (1969)) est une conséquence du fait que l'on considère les quarks comme des particules ponctuelles. On obtient, par exemple : $F_2 = x[\frac{4}{9}u(x) + \frac{1}{9}d(x) + \frac{4}{9}\bar{u}(x) + \frac{1}{9}\bar{d}(x) + \dots]$.

On s'intéresse à extraire les distributions partoniques $q(x)$ des données recueillies en diffusion inélastique profonde. Dans ce but, il est nécessaire d'introduire certaines contraintes pour garantir que le nucléon (p ou n) ait les bons nombres quantiques. Le proton a 2 quarks u et un quark d :

$$\int_0^1 dx (u(x) - \bar{u}(x)) = 2 \quad \text{et} \quad \int_0^1 dx (d(x) - \bar{d}(x)) = 1 \quad (6.4.6)$$

Sa charge baryonique est 1 et son isospin $I_3 = 1/2$, d'où :

$$B = \int_0^1 dx \frac{1}{3} (u(x) - \bar{u}(x) + d(x) - \bar{d}(x) + s(x) - \bar{s}(x) + \dots) = 1 \quad (6.4.7)$$

$$I_3 = \int_0^1 dx \left[\frac{1}{2} (u(x) - \bar{u}(x)) - \frac{1}{2} (d(x) - \bar{d}(x)) \right] = \frac{1}{2} \quad (6.4.8)$$

Des expressions similaires peuvent être décrites pour les charges d'étrangeté, de charme, ... (Str = Cha = ... = 0).

Ensuite il faut exprimer la section efficace différentielle de diffusion en terme des $q(x)$ et effectuer un ajustement de la forme obtenue aux valeurs mesurées de cette section efficace. Par exemple pour la diffusion inélastique $ep \rightarrow eX$ on peut établir l'expression :

$$\frac{d\sigma}{dx}(e-p) = \frac{8\pi\alpha^2 s}{Q^4} x \left\{ \frac{4}{9} [u(x) + \bar{u}(x)] + \frac{1}{9} [d(x) + \bar{d}(x) + s(x) + \bar{s}(x)] \right\} \quad (6.4.9)$$

La symétrie d'isospin $p-n$ au niveau des quarks amène à postuler que :

$$u_p(x) = d_n(x), \quad d_p(x) = u_n(x), \quad s_p(x) = s_n(x) \quad (6.4.10)$$

Si on tient compte de ces relations et si on convient que $u = u_p$, $d = d_p$, $s = s_p$, la section efficace de diffusion sur le neutron peut s'écrire :

$$\frac{d\sigma}{dx}(e-n) = \frac{8\pi\alpha^2 s}{Q^4} x \left\{ \frac{4}{9} [d(x) + \bar{d}(x)] + \frac{1}{9} [u(x) + \bar{u}(x) + s(x) + \bar{s}(x)] \right\} \quad (6.4.11)$$

Mentionnons que la structure du nucléon peut être sondée également par la diffusion inélastique profonde de neutrino : $\nu_\ell N \rightarrow \nu_\ell X$ et $\bar{\nu}_\ell N \rightarrow \bar{\nu}_\ell X$, où $\ell = e, \mu$. Le mécanisme d'interaction consiste dans ce cas dans l'échange d'un boson faible (Z,W). La section efficace différentielle prend une forme voisine de celle de la relation 6.3.5. Toutefois on est amené à introduire trois fonctions de structure par type de nucléon (et d'antinuécléon), en raison de la nature particulière du courant faible (voir chapitre 7).

La grande quantité de données collectées a permis de tirer des renseignements sur la structure interne du nucléon. La figure 6.4.1 montre une paramétrisation des distributions partoniques en fonction de la variable x . La théorie QCD a confirmé que cette vision partonique du nucléon est correcte, en première approximation. En introduisant la composante gluonique du nucléon, QCD est aussi capable d'expliquer la violation du scaling visible sur la figure 6.3.7 (les courbes sur cette figure

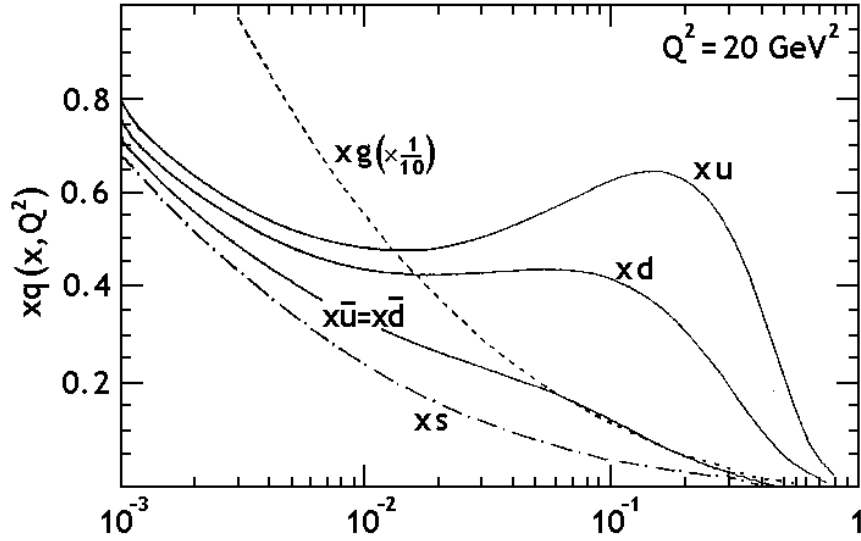


FIG. 6.4.1 – Exemple de paramétrisation des fonctions $q(x)$ (la courbe $g(x)$ donne la contribution des gluons).

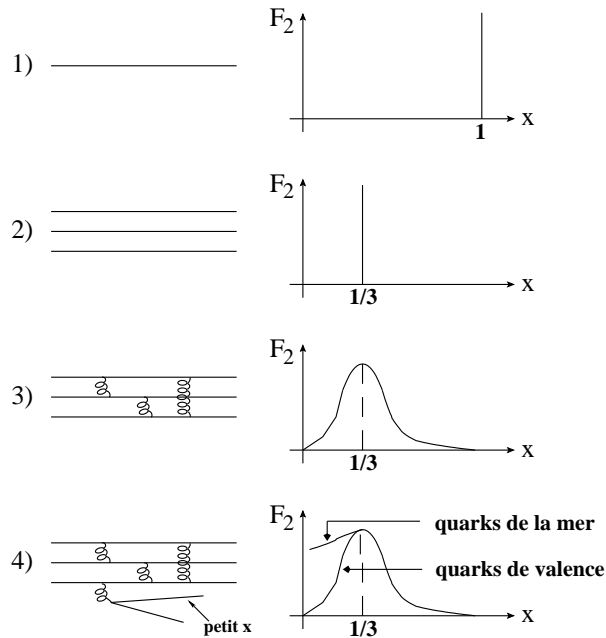


FIG. 6.4.2 – Interprétation de la fonction de structure d'un proton dans les situations suivantes : 1) un seul quark par proton, 2) 3 quarks libres, 3) 3 quarks liés, 4) 3 quarks liés, avec la possibilité de créer des quarks de la mer.

représentent la prédiction théorique). La figure 6.4.2 donne une interprétation de la forme des distributions partoniques, dans le cas d'un seul quark par hadron, 3 quarks libres, 3 quarks liés (quarks de valence) et 3 quarks liés avec la possibilité de créer des paires de quarks virtuelles (quarks de la mer).

6.5 L'annihilation $e^+e^- \rightarrow \gamma^* \rightarrow \bar{q}q$.

Au chapitre 5 on a présenté l'annihilation e^+e^- avec production d'une paire lepton-antilepton :

$$e^+e^- \rightarrow \gamma^* \rightarrow \bar{\ell}\ell, \quad \text{où } \ell = e, \mu \text{ ou } \tau$$

Rappelons que la section efficace différentielle dans le c.m. e^+e^- , au premier ordre et loin de la région de formation d'un boson intermédiaire Z, peut être écrite sous la forme (voir 5.12.11) :

$$\frac{d\sigma_{\text{NP}}}{d\Omega}(e^+e^- \rightarrow \bar{\ell}\ell) = \frac{\alpha^2}{4q^2}(1 + \cos^2 \theta) \quad (6.5.1)$$

et la section efficace intégrée sous la forme (5.12.12) :

$$\sigma_{\text{NP}}(e^+e^- \rightarrow \bar{\ell}\ell) = \frac{4\pi\alpha^2}{3} \cdot \frac{1}{s} \quad (6.5.2)$$

avec : $q^2 = 4E_{\text{faisceau}}^2$ et $2E_{\text{faisceau}} = \sqrt{s}$

L'indice NP indique que les faisceaux sont supposés non polarisés et que l'appareillage de détection est insensible à la polarisation des leptons produits.

Rappelons encore que les relations 6.5.1 et 6.5.2 ne sont pas applicables à la diffusion Bhabha : $e^+e^- \rightarrow e^+e^-$.

Ces prédictions théoriques ont été testées expérimentalement sur la voie $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$, dans une large plage en énergie ; la dépendance générale en $1/s$ est vérifiée.

On peut considérer l'extension de ces prédictions à la réaction d'annihilation :

$$e^+e^- \rightarrow \gamma^* \rightarrow \bar{q}q$$

où $q(\bar{q})$ symbolise un quark (antiquark) de charge électrique z_q , avec $z_q = 2/3$ ou $1/3$.

On tient compte de la charge fractionnaire du quark en effectuant à nouveau la substitution suivante $\alpha^2 \rightarrow z_q^2\alpha^2$ dans les relations 6.5.1 et 6.5.2 :

Rappelons que les quarks ne sont pas observables comme particules libres. Ils peuvent être mis en évidence via la formation de hadrons à laquelle ils donnent lieu par le mécanisme de la "fragmentation" (le processus est étudié en détail au § 6.6). Expérimentalement, la séparation des voies d'annihilation en leptons et en hadrons implique la mise en oeuvre d'un appareillage de détection complexe et

requiert l'application de critères de sélection adéquats. Les paires de muons sont aisément reconnaissables vu la relative longue durée de vie de ce lepton et son grand pouvoir de pénétration dans la matière. Les paires de tau sont plus difficiles à séparer car ce lepton se désintègre dans 66% des cas en hadrons (essentiellement 3 pions). La voie d'annihilation en hadrons donne naissance principalement à des événements à haute multiplicité ; dans les expériences au LEP, on a demandé typiquement la présence d'au moins 8 hadrons pour qu'un événement soit classé comme annihilation hadronique. Une autre source importante de bruit de fond

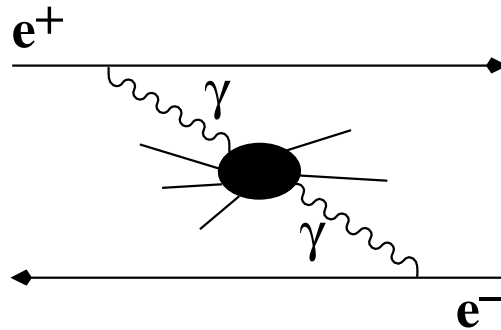


FIG. 6.5.1 – Diagramme du processus “à deux gamma”.

est constituée par le processus communément appelé ”à deux gamma”, qui est représenté par le diagramme de la figure 6.5.1. Un photon de rayonnement (virtuel) est engendré par chacune des particules incidentes ; les deux photons interagissent en se matérialisant en hadrons. En général, la fraction d'énergie soustraite aux faisceaux est petite ; l' e^- et l' e^+ poursuivent leur course faiblement déviés et restent confinés dans le canal du faisceau, échappant de ce fait à la détection par l'appareillage. Par conséquent, on peut admettre que les événements purement hadroniques, à haute multiplicité et avec une large fraction de l'énergie disponible emportée par les hadrons, sont essentiellement dus à l'annihilation hadronique.

Les résultats d'analyse sont généralement présentés sous la forme d'un rapport :

$$\begin{aligned}
 R &= \frac{\sigma(e^+e^- \rightarrow \text{hadrons})}{\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)} \\
 &= \frac{N_{\text{hadrons}}}{N_{\text{dimuons}}} \cdot \frac{\varepsilon_{\text{dimuons}}}{\varepsilon_{\text{hadrons}}}
 \end{aligned}
 \tag{6.5.3}$$

où :

N_{hadrons} et N_{dimuons} sont les nombres d'événements sélectionnés et se rapportant à la même période d'acquisition de données ;

$\varepsilon_{\text{hadrons}}$ et $\varepsilon_{\text{dimuons}}$ sont les efficacités de mesure ; ces facteurs ont été déterminés au préalable à l'aide de programmes de simulation par méthode de Monte Carlo.

Notons que le rapport R ainsi défini est indépendant de la luminosité intégrée, paramètre qu'il faudrait connaître si l'on voulait passer directement de N_{hadrons} à la section efficace $\sigma(e^+e^- \rightarrow \text{hadrons})$, (voir § 1.5). Par ailleurs, on considère que les caractéristiques physiques de cette section efficace sont correctement reflétées dans R , étant donné la connaissance approfondie qu'on a des caractéristiques de $\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)$, (voir chapitre 5).

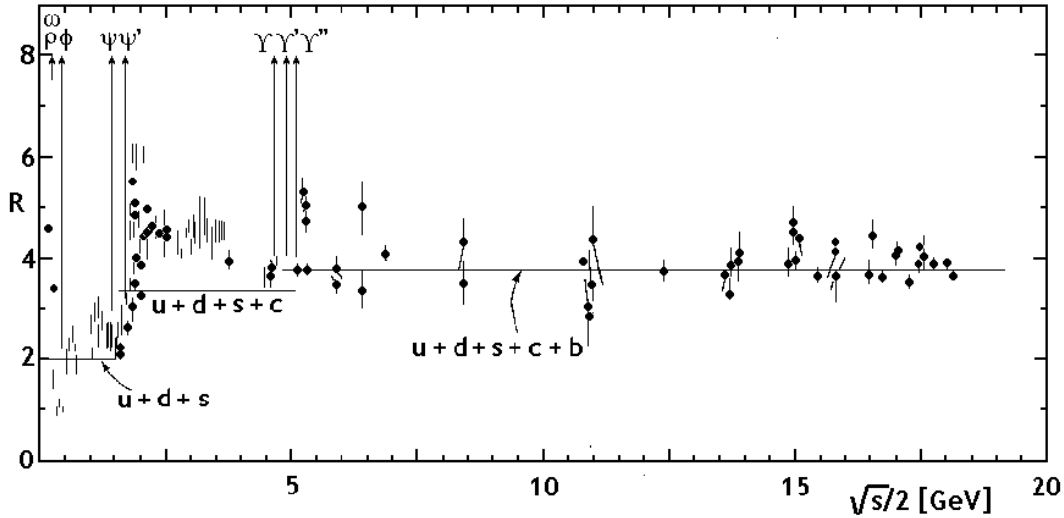


FIG. 6.5.2 – $R = \sigma(e^+e^- \rightarrow \text{hadrons})/\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)$ en fonction de $E_{\text{faisceau}} = \sqrt{s}/2$.

La figure 6.5.2 montre comment le rapport R varie en fonction de l'énergie du faisceau $\sqrt{s}/2$. Sur la gauche du graphique, on observe des pics suggérant l'existence d'un mécanisme résonnant comme celui représenté dans le graphique de la figure 6.5.3 et qui peut être représenté par la réaction en chaîne :

$$e^+e^- \rightarrow \gamma^* \rightarrow \text{résonance}(J^{PC} = 1^{--}) \rightarrow \begin{cases} \bar{l}l(+\gamma) \\ \text{hadrons}(+\gamma) \end{cases}$$

La masse de l'état résonnant est liée à la position du pic, ses nombres quantiques J, P sont ceux du photon ; ses modes de désintégration et rapports d'embranchement se reflètent dans la nature des particules finales observées et dans leurs proportions.

Un autre fait à remarquer dans le graphique de la figure 6.5.2 est la présence de paliers approximatifs dans les valeurs du rapport R , chaque palier s'amorçant au niveau d'une (de) résonance spécifique, par exemple le ϕ , le J/ψ et l' Υ . Cette

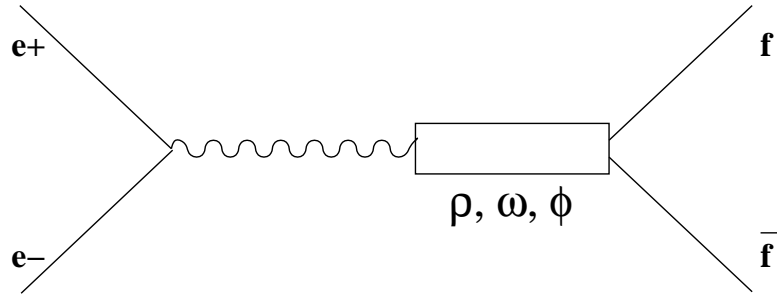


FIG. 6.5.3 – Diagramme du mécanisme de résonance dans l’annihilation $e^+e^- \rightarrow \bar{q}q$.

structure en escalier est mise en relation avec les seuils de production des paires de quarks des différentes familles connues, p. ex. : $\phi \rightarrow \bar{s}s$, $J/\psi \rightarrow \bar{c}c$, $\Upsilon \rightarrow \bar{b}b$. On s’attend à trouver encore un escalier au seuil $X \rightarrow \bar{t}t$, c’est à dire $\sqrt{s} \simeq 360$ GeV. On peut également chercher à rendre compte du niveau de ces paliers en partant du modèle des quarks et en utilisant les prédictions de 6.5.2 . Le tableau 6.6.1 donne les voies ouvertes à partir de différents seuils en énergie ($\sqrt{s}/2$) et les valeurs attendues du rapport R . Ces prédictions s’écartent des valeurs mesurées de R par un facteur d’environ 3. Toutefois la concordance peut être rétablie si l’on tient compte du fait que le quark porte une charge de couleur susceptible de prendre trois valeurs différentes. Une paire $\bar{q}q$ peut donc être produite dans trois sous-états de couleur, ce qui multiplie par trois le nombre de voies effectivement ouvertes. D’autres implications du concept de la couleur ⁷⁴ seront étudiées au chapitre 8.

6.6 Production de jets hadroniques dans l’annihilation e^+e^- .

Comme on l’a mentionné au § 6.5, la paire quark-antiquark produite donne lieu au phénomène d’**hadronisation** ou **fragmentation** : l’énergie du système $\bar{q}q$ se convertit en énergie de masse et en énergie cinétique d’un certain nombre de hadrons. A partir d’un \sqrt{s} de l’ordre de 5 à 10 GeV, on observe que ces **hadrons** forment des gerbes collimatées, qu’on appelle des jets. Ce processus est illustré dans les figures 6.6.1 a) et b).

⁷⁴Notons que d’autres modèles de quarks ont été proposés. Dans le modèle de Nambu, par ex., les quarks ont des charges électriques entières (ou nulles). Ces charges ne sont différentes de zéro que pour certaines couleurs, de telle sorte que si l’on en fait la moyenne sur les différentes couleurs impliquées, on retrouve les valeurs prédites par le modèle de Gell-Mann, ainsi que les valeurs de R du tableau 6.6.1.

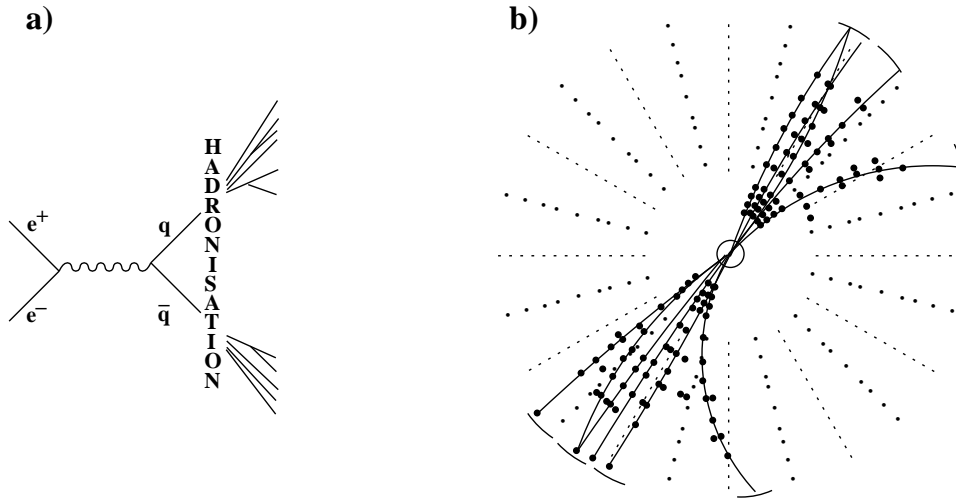


FIG. 6.6.1 – a) $e^+e^- \rightarrow$ deux jets de hadrons. b) événement observé par le détecteur TASSO au collisionneur PETRA (Hambourg).

On fait l'hypothèse que les jets de hadrons sont produits en moyenne dans la direction de propagation des constituants de la paire $\bar{q}q$ originale⁷⁵. La distribution angulaire des jets devrait donc vérifier la dépendance en $(1 + \cos^2 \theta)$ typique de l'annihilation en fermions de spin 1/2 (voir 6.5.1). Le graphique de la figure 6.6.2 montre que cette prédiction est vérifiée par l'expérience. Remarquons que dans l'annihilation en bosons de spin 0 on aurait une dépendance en $\sin^2 \theta$.

On observe aussi des événements à 3 jets, comme celui de la figure 6.6.3 b). On suppose qu'un de ces jets est associé à l'émission d'un gluon, suivant le diagramme de la figure 6.6.3 a). Il n'est pas possible de reconnaître avec certitude le jet associé au gluon ; les modèles suggèrent que dans environ 70% des cas c'est le jet le moins énergétique.

Les résultats de mesures de corrélation angulaire sont compatibles avec l'hypothèse que le gluon est sans spin. Remarquons que la production de jets est observée aussi dans les collisions à haute énergie proton-antiproton et lepton-nucléon.

Toute interprétation microscopique du mécanisme de la production de jets hadroniques doit prendre en compte le fait que l'énergie convertie en hadrons dans le c.m. du système reste concentrée autour de la direction des quarks primaires.

Un premier modèle d'interprétation phénoménologique a été proposé par **Field et Feynman**⁷⁶ qui se base sur l'analyse de jets produits par collision hadron-hadron. Dans ce modèle les partons (quarks) du projectile et de la cible diffusent

⁷⁵Expérimentalement, l'identification de jets parmi l'ensemble des particules d'un événement implique la mise en oeuvre d'algorithmes complexes.

⁷⁶R.D. Field and R.P. Feynman, Phys. Rev. D15 (1977) 2590.

$\sqrt{s}/2$ seuil [GeV]	Rés.	Voies Ouvertes	R sans la charge couleur	R avec...
$\simeq 0.4$	ρ, ω	$\bar{d}d, \bar{u}u$	$(\frac{1}{3})^2 + (\frac{2}{3})^2 = \frac{5}{9}$	1.66
$\simeq 0.5$	ϕ	$\bar{d}d, \bar{u}u, \bar{s}s$	$(\frac{1}{3})^2 + (\frac{2}{3})^2 + (\frac{1}{3})^2 = \frac{2}{3}$	2.
$\simeq 1.6$	J/ψ	$\bar{d}d, \bar{u}u, \bar{s}s, \bar{c}c$	$(\frac{1}{3})^2 + (\frac{2}{3})^2 + (\frac{1}{3})^2 + (\frac{2}{3})^2 = \frac{10}{9}$	3.33
$\simeq 4.8$	Υ	$\bar{d}d, \bar{u}u, \bar{s}s, \bar{c}c, \bar{b}b$	$(\frac{1}{3})^2 + (\frac{2}{3})^2 + (\frac{1}{3})^2 + (\frac{2}{3})^2 + (\frac{2}{3})^2 = \frac{11}{9}$	3.66
$\simeq 180.$	X	$\bar{d}d, \bar{u}u, \bar{s}s, \bar{c}c, \bar{b}b, \bar{t}t$	$(\frac{1}{3})^2 + (\frac{2}{3})^2 + (\frac{1}{3})^2 + (\frac{2}{3})^2 + (\frac{1}{3})^2 + (\frac{2}{3})^2 = \frac{15}{9}$	5.

TAB. 6.6.1 – Rapport $R = \sigma(e^+e^- \rightarrow \bar{q}q)/\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)$ prédit par le modèle des quarks standard de Gell-Mann, sans et avec la charge de couleur.

puis fragmentent en hadrons de façon indépendante, sous réserve que les lois de conservation de (E, \mathbf{p}) restent satisfaites. Les données expérimentales sont bien reproduites, entre autre la distribution transversale des hadrons de fragmentation, sauf dans la région entre les jets (voir plus loin).

Le modèle phénoménologique actuel le plus populaire est celui de la corde (“string”)⁷⁷. Il est utilisé par exemple dans les Monte Carlo de l’Université de Lund, nommée “JETSET” et “PYTHIA”.

L’idée est que le champ d’interaction forte entre le quark et l’antiquark qui s’éloignent évolue différemment du champ e.m.. A distance $\ll 1$ fm, le potentiel décroît en $1/r$ (comme le potentiel Coulombien) ; à partir de \mathcal{O} 1 fm, au contraire il croît linéairement. Dans une approche non relativiste, on peut décrire cette évolution par (figure 6.6.4) :

$$V(r) \approx -\frac{4}{3} \frac{\alpha_s(r)}{r} + kr \quad (6.6.1)$$

Le premier terme de droite de 6.6.1 correspond à une phase “perturbative” de

⁷⁷Voir par ex. ref. 7, vol2, chap. 25.

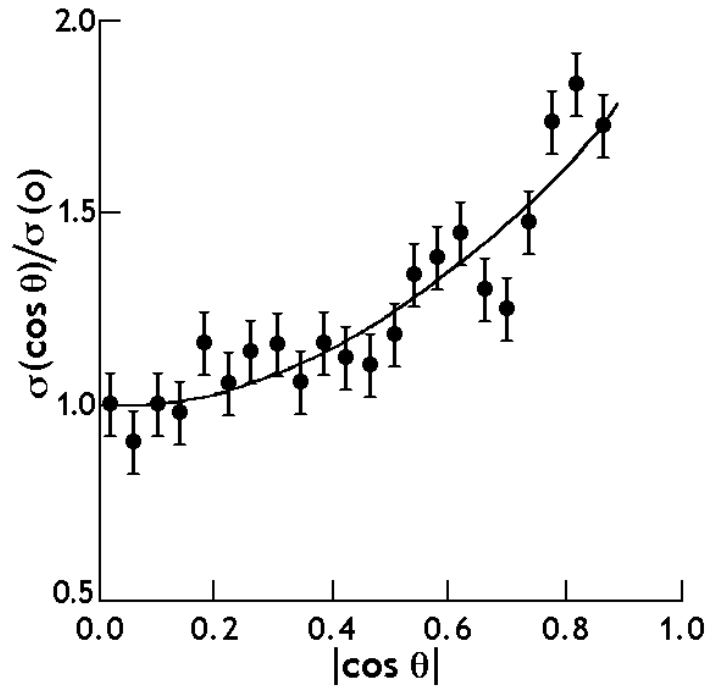


FIG. 6.6.2 – Dépendance angulaire de la production de jets dans l’annihilation $e + e^- \rightarrow$ hadrons. La courbe représente la fonction $((1 + \cos^2 \theta))$.

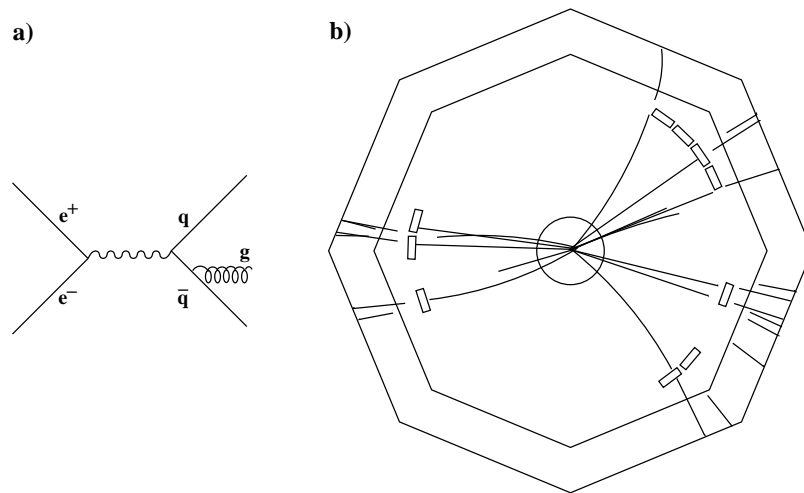


FIG. 6.6.3 – Production d’événements à trois jets dans l’annihilation $e^+ + e^- \rightarrow$ hadrons.

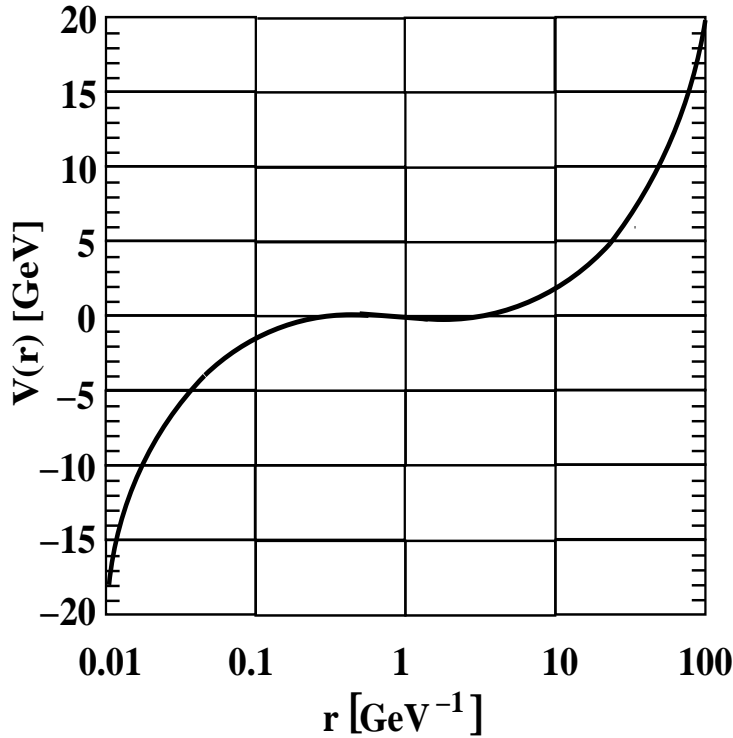


FIG. 6.6.4 – Variation du potentiel d’interaction forte entre le quark et l’antiquark. Note : la variable reportée en abscisse est effectivement $\hbar cr$, où on a posé $\hbar c = 1$.

l’interaction forte à courte distance, avec $\alpha_s(r)$ valant typiquement 0.1 à 0.5 (dans la figure 6.6.4 on a posé 0.2). Au delà du fm, la partie linéaire du potentiel prend le dessus. On imagine qu’entre les deux quarks (figure 6.6.5), il y a formation d’un tube de lignes de forces appelé usuellement une corde (“string”) de paramètre (tension) k , où :

$$k = 0.2 \text{ GeV}^2 \quad k/\hbar c \simeq 1 \text{ GeV/fm}$$

La corde décélère les deux quarks ; il y a conversion de l’énergie cinétique des quarks en énergie potentielle dans la corde.

Si l’énergie cinétique initiale est faible, les deux quarks se comportent comme un Yo-Yo et ils oscillent perpétuellement. La figure 6.6.6 montre une paire $\bar{q}q$, sans masse qui oscille sous la contrainte d’une force de rappel : $dp/dt = \pm kt$. La trajectoire dans l’espace-temps est inclinée si le c.m. est en mouvement par rapport au repère utilisé (figure 6.6.6 b)

Par contre, si l’énergie est suffisante pour créer une deuxième paire quark-antiquark, les deux quarks s’éloignent jusqu’à ce que la corde se casse et se sépare

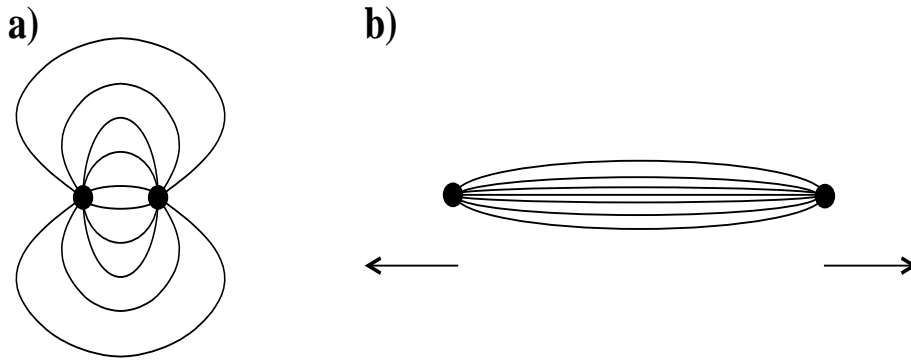


FIG. 6.6.5 – Lignes de flux du champ de couleur **a)** : à une distance $\ll 1$ fm, elles ont une configuration voisine de celle des lignes du champ e.m. entre deux charges opposées ; **b)** si l'on éloigne les deux quarks au delà de $\simeq 1$ fm, ces lignes se concentrent en un tube de flux appelé corde ("string").

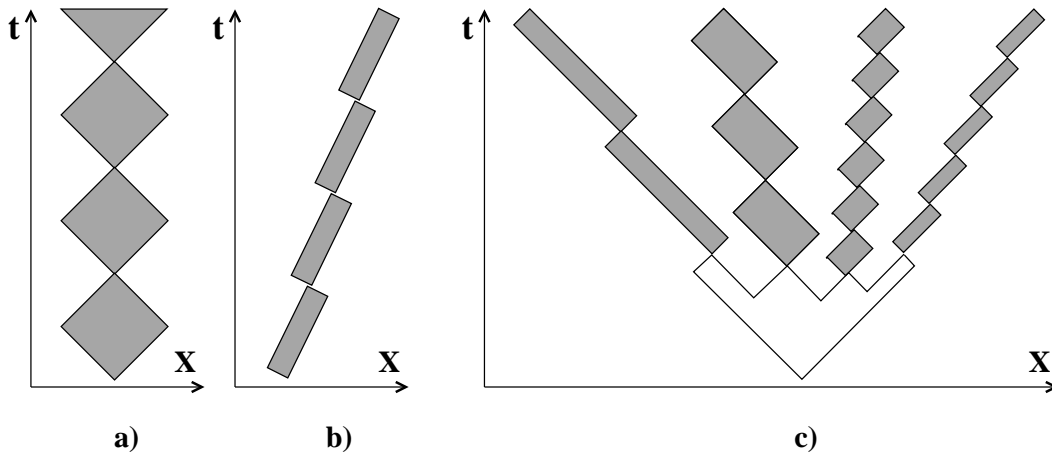


FIG. 6.6.6 – **a)** une paire quark-antiquark de masse nulle oscille autour de son centre de masse supposé immobile par rapport au repère (si la masse était non nulle les trajectoires seraient des hyperboles) ; **b)** la même paire si le c.m. est en mouvement ; **c)** une corde, dont le c.m. est au repos dans le repère, se coupe en quatre morceaux.

en deux parties. Et ainsi de suite (figure 6.6.6 c). La production de mésons et de baryons par fragmentation peut se représenter par un diagramme où chaque type de hadron est reconnaissable à sa structure en quarks (voir figure 6.6.7).

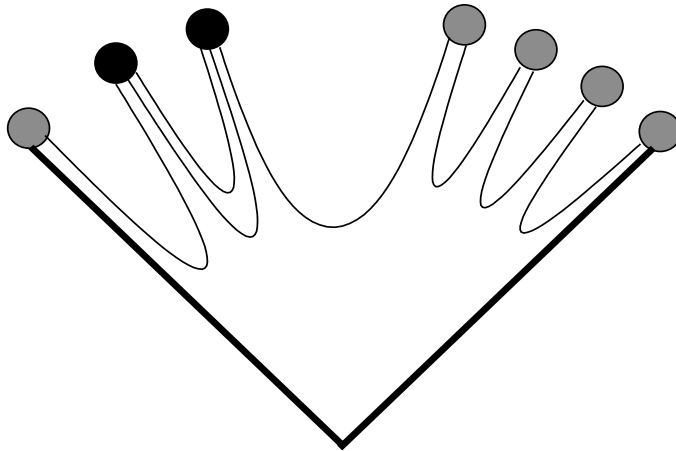


FIG. 6.6.7 – Représentation intuitive du contenu en quarks des hadrons. En gris les mésons ($\bar{q}q$) et en noir des baryons (3 quarks). Les deux quarks primaires (leading quarks) se retrouvent dans les hadrons au bout de la corde.

Le modèle de la corde, essentiellement monodimensionnel, explique de façon naturelle la concentration des trajectoires de particules dans les jets. Expérimentalement on constate une certaine dispersion de ces trajectoires, même dans les jets les plus énergétiques que l'on sait produire. La dispersion est plus ou moins gaussienne autour de la direction moyenne du jet :

$$\frac{d\sigma}{dp_t^2} \sim \exp(-\sigma_t p_t^2) \quad (6.6.2)$$

où : p_t est la composante de la quantité de mouvement dans le plan perpendiculaire à l'axe du jet. Le paramètre σ_t a été déterminé empiriquement et vaut environ 1.5 GeV^{-2} .

On peut interpréter phénoménologiquement cette dispersion en imaginant que la corde a des modes d'oscillation transversaux ou qu'elle est le siège d'une sorte d'agitation thermique.

Par delà cette description phénoménologique un certain nombre de problèmes doivent être résolus :

- lorsque un hadron est produit, quelle fraction z d'énergie et d'impulsion longitudinales emporte-t-il ?

Pour une paire quark-antiquark les Monte Carlo de Lund utilisent une expression de la forme (fonction de fragmentation) :

$$f(z) = \frac{(1-z)^a}{z} \exp\left(-\frac{bm_t^2}{z}\right) \quad (6.6.3)$$

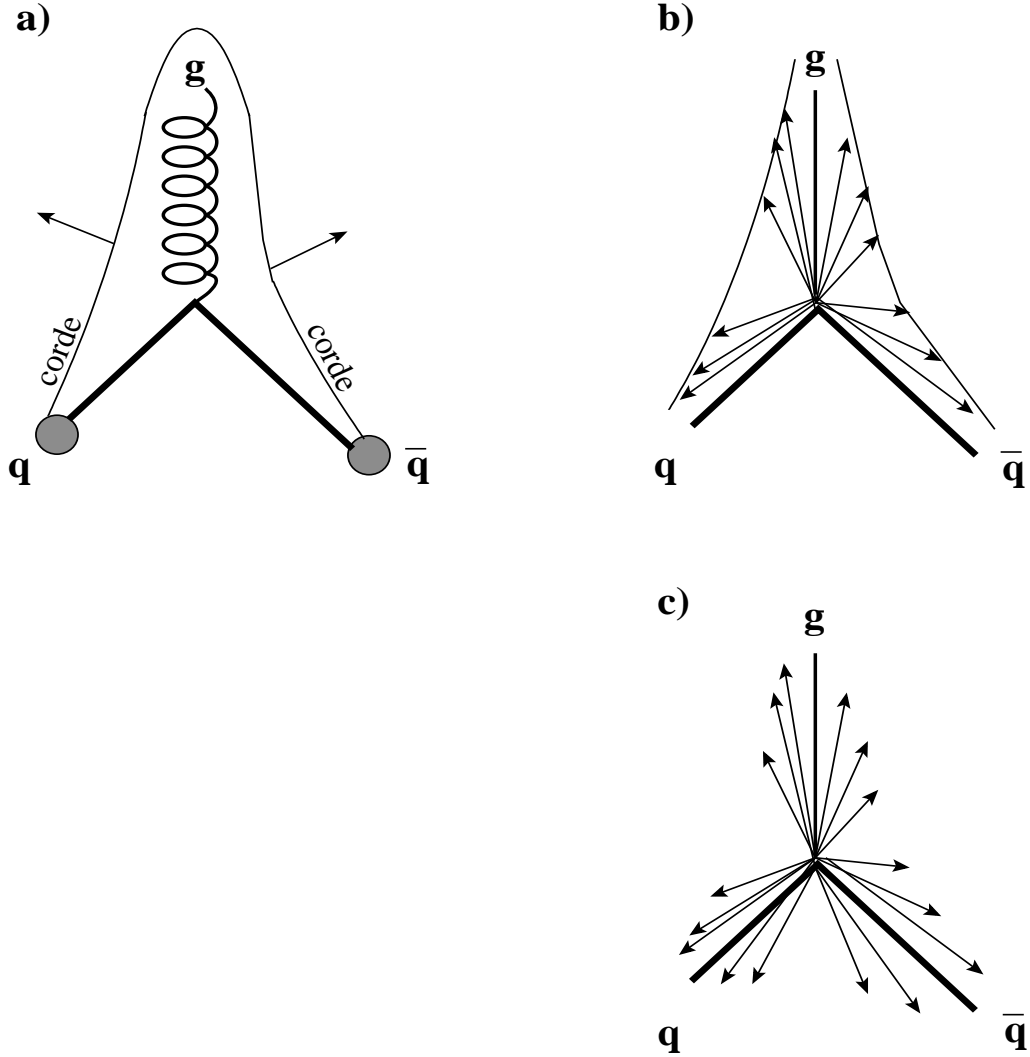


FIG. 6.6.8 – Événement à trois jets; **a)** la corde s’étire entre le quark, le gluon et l’antiquark. Les flèches indiquent la direction du mouvement de la corde à mi-chemin entre les jets; **b)** structure de l’événement à trois jets dans l’espace des impulsions dans le modèle de fragmentation à corde (idéalisée, sans agitation latérale) et **c)** dans le modèle à fragmentation indépendante.

où m_t est la “masse transversale” du hadron : $m_t = (m^2 + p_t^2)^{\frac{1}{2}}$ et a et b sont des paramètres à fixer expérimentalement.

- dans quelles proportions les quarks de différents saveurs sont-ils produits ? Avec quelle probabilité va-t-on produire une paire $\bar{q}q$ avec une saveur spécifique ? Pour

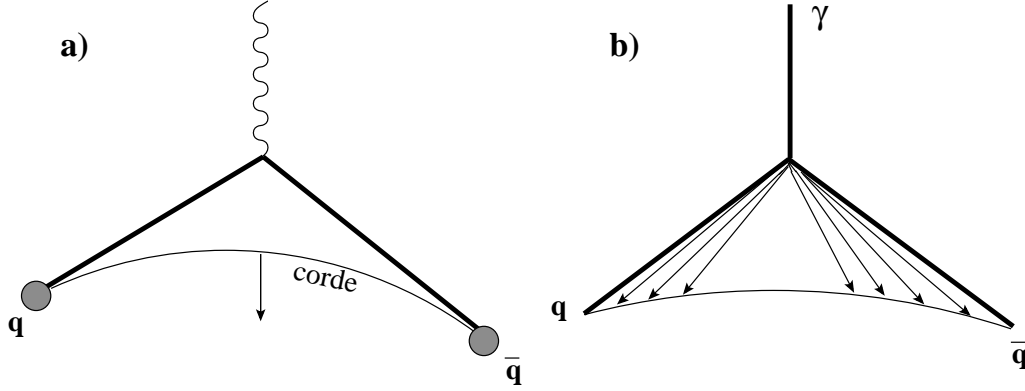


FIG. 6.6.9 – Événement à deux jets et un photon dur ; **a)** la corde s'étire entre le quark et l'antiquark ; **b)** structure dans l'espace des impulsions pour le modèle de fragmentation à corde (idéalisée, sans agitation latérale).

une paire $\bar{q}q$ de saveur donnée on postule une probabilité de création de la forme :

$$Prob(\bar{q}q) \propto \exp\left(-\frac{\pi m_q^2}{K}\right) \quad (6.6.4)$$

où K est un paramètre empirique.

Tenant compte des masses estimées, on trouve des probabilités relatives :

$$P(\bar{u}u)/P(\bar{d}d)/P(\bar{s}s)/P(\bar{c}c) \simeq 1/1/0.3/10^{-11} \quad (6.6.5)$$

La production de quarks lourds (c, b, \dots) est donc fortement inhibée lors de l'hadronisation. On observe néanmoins que des quarks lourds peuvent être créés dans les processus d'hadronisation à grand transfert d'énergie tels que ceux engendrés par la paire $\bar{q}q$ primaire. Dans ces circonstances, le facteur masse du quark joue un rôle moins important et la relation 6.6.4 doit être modifiée dans ce sens. D'autres paramètres doivent être déterminés, par exemple définir quand (et comment) produire des mésons pseudoscalaires ou vectoriels. Au total les programmes JETSET et PYTHIA comportent plusieurs dizaines des paramètres et options à ajuster.

Dans un événement à trois jets, la corde subit une déformation dans la direction du gluon (figure 6.6.8 a). La topologie des hadrons produits en sera affectée. Le modèle de la corde prédit un dépeuplement de la région entre les deux quarks, ce qui est en désaccord avec la prédiction du modèle à fragmentation indépendante, (figure 6.6.8 b et c).

Ces prédictions du modèle de la corde sont confirmées, qualitativement, par les résultats de différentes expériences (à PEP, à PETRA et au LEP). En particulier on a comparé les topologies d'événements à 3 jets associés à l'émission d'un gluon ($\bar{q}qg$) et à 2 jets avec émission d'un gamma radiatif ($\bar{q}q\gamma$). Ces topologies sont

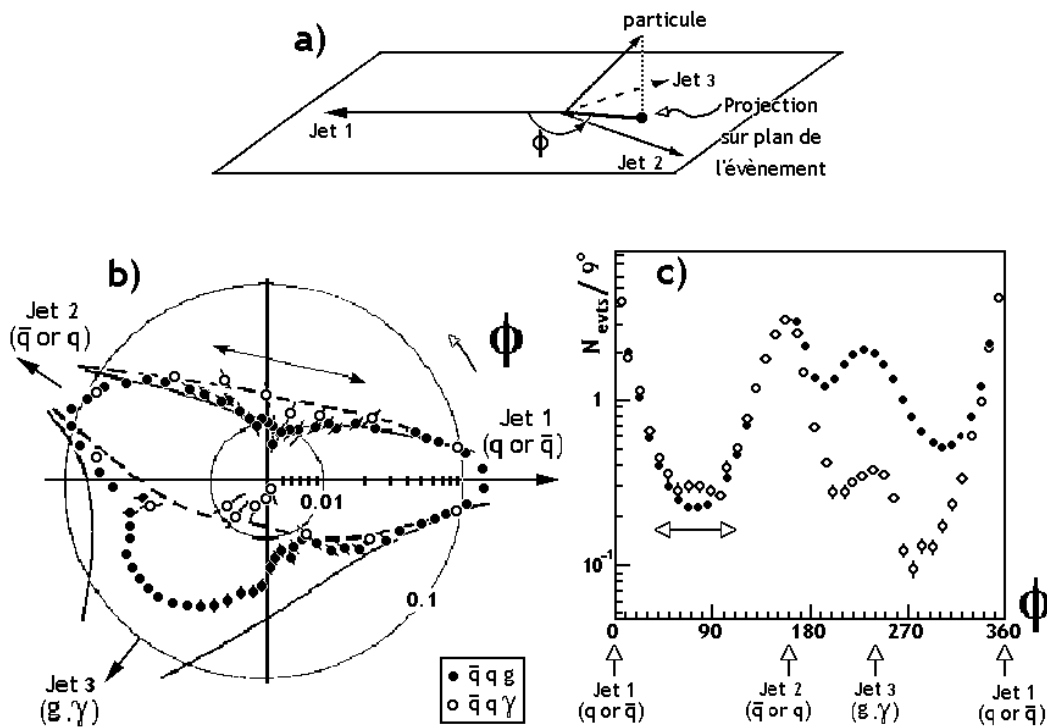


FIG. 6.6.10 – Comparaison des événements $\bar{q}q\gamma$ et des événements $\bar{q}qg$; **a)** définition de l'angle ϕ ; **b)** résultats expérimentaux à PEP et **c)** au LEP; distributions polaires du nombre moyen de particules calculé sur une centaine d'événements par classe; on a admis que le jet associé au gluon est le moins énergétique des trois jets; dans la région située entre les jets de quarks (région fléchée), on observe une différence entre les nombres d'événements/classe dans le sens attendu par le modèle de la corde.

illustrées à la figure 6.6.9. Le photon, contrairement au gluon, ne participe pas à l'interaction forte; la corde entre le quark et l'antiquark conserve une grande énergie potentielle (corde tendue). Il doit en résulter un excès de particules entre les deux jets de quarks dans les événements de type $\bar{q}q\gamma$ par rapport aux événements du type $\bar{q}qg$. C'est effectivement ce qu'on observe sur la figure 6.6.10 **b** et **c**.

7 L'interaction faible.

7.1 Introduction.

Dans le Modèle Standard, les vecteurs de l'interaction faible (WI) sont les “bosons intermédiaires” W^\pm et Z . Ces bosons sont massifs (contrairement au photon), ce qui a comme conséquence que la portée de l'interaction faible est très courte. Leur masse est de l'ordre de 100 GeV, leur largeur de l'ordre de 2 GeV et ils ont une grande variété de voies de désintégration (voir la table PDG).

Si on décrit l'élément de matrice WI en terme de courant de probabilité (voir chapitre 5 pour l'interaction e.m.), on peut classer ces courants faibles en deux catégories :

1) les **courants chargés**⁷⁸ (CC), ayant pour médiateurs les bosons W^\pm .

Les processus qu'ils engendrent sont connus depuis longtemps et ont été étudiés bien avant que la théorie électrofaible ait été élaborée (1967-68)⁷⁹. On distingue :

- les processus **purement leptoniques**, tels que la désintégration du muon (figure 7.1.1).

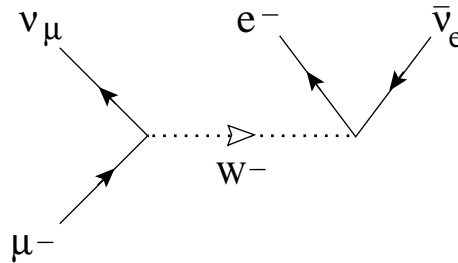


FIG. 7.1.1 – Diagramme de la désintégration purement leptonique $\mu^- \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu$

- les processus **purement hadroniques**, tels que la désintégration du Λ (figure 7.1.2).

Q. : dessiner le diagramme de la désintégration $\Lambda \rightarrow \pi^0 + n$.

- les processus **semileptoniques**, tels que la désintégration β du neutron (figure 7.1.3).

⁷⁸On trouve parfois la formulation “avec ou sans changement de charge”.

⁷⁹Ce qu'on désigne aujourd'hui sous le nom de Modèle de Glashow, Weinberg, Salam (voir ref 5).

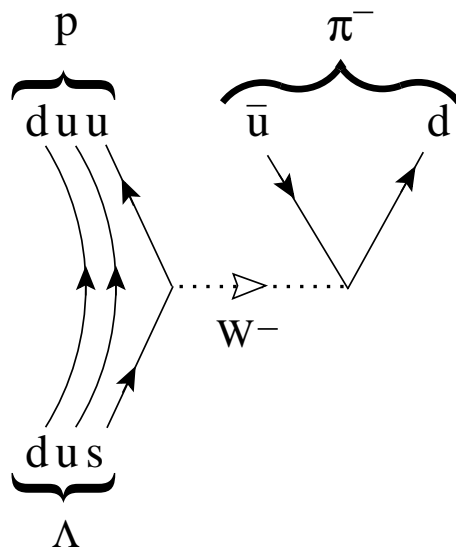


FIG. 7.1.2 – Diagramme de la désintégration purement hadronique $\Lambda \rightarrow \pi^- + p$

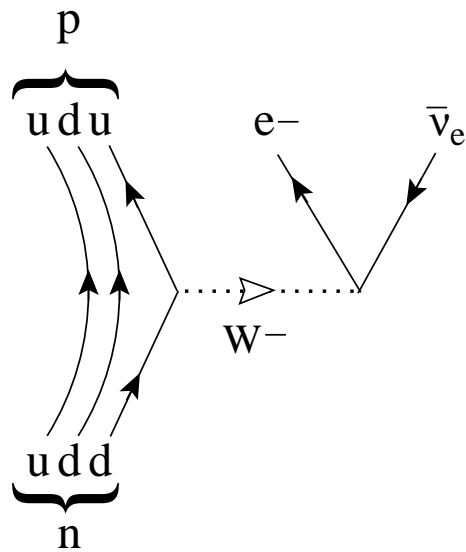


FIG. 7.1.3 – Diagramme de la désintégration semileptonique $n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$

2) les **courants neutres** (CN), ayant pour médiateur le boson Z .

Expérimentalement, ce n'est qu'en 1973 que des processus régis par l'échange

d'un boson Z (virtuel) ont été identifiés, c'est à dire plusieurs années après la publication du modèle de Glashow, Weinberg, Salam. La première observation a été faite dans une expérience réalisée au PS du CERN avec la chambre à bulles Gargamelle remplie de fréon liquide et exposée dans un faisceau de $\nu_\mu(\bar{\nu}_\mu)$ ⁸⁰. Deux types d'événements ont été identifiés à cette occasion, répondant à la signature attendue :

a)
$$\bar{\nu}_\mu + e^- \rightarrow \bar{\nu}_\mu + e^-$$

où l'électron initial est un électron d'une couche atomique ;

b)
$$\nu_\mu(\bar{\nu}_\mu) + \mathcal{N} \rightarrow \nu_\mu(\bar{\nu}_\mu) + X$$

où le \mathcal{N} initial est le nucléon d'un noyau et X représente un ou plusieurs hadrons.

Le mécanisme de ces processus est représenté par les diagrammes de la figure 7.1.4. L'interprétation en terme de courant faible neutre (échange de Z) ap-

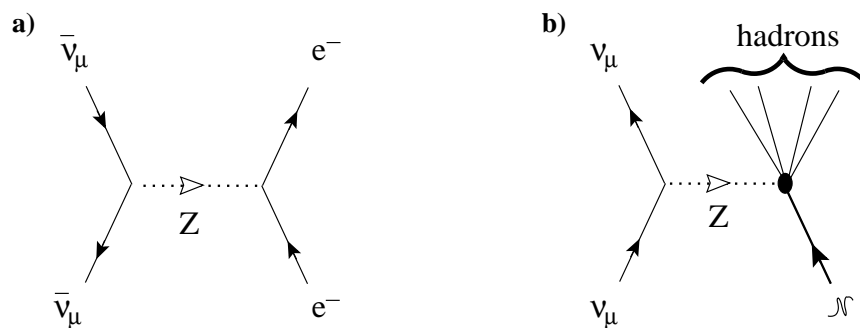


FIG. 7.1.4 – Diagrammes de a) $\bar{\nu}_\mu + e^- \rightarrow \bar{\nu}_\mu + e^-$; b) $\nu_\mu + \mathcal{N} \rightarrow \nu_\mu + X$

paraît non ambiguë. L'échange d'un W^\pm impliquerait nécessairement la présence d'un muon dans l'état final. Les événements observés se caractérisent justement par l'absence de muon.

Q. : dessiner les diagrammes de processus auxquels donnerait lieu l'échange de W^\pm .

Ces premiers résultats ont été confirmés par la suite en recourant à différentes techniques de mesure. De plus, les expériences ont été étendues à d'autres processus impliquant un courant (faible) neutre (voir § 7.4).

⁸⁰F.J. Hasert et al. Phys. Letters 46B (1973) 121 et 46B (1973) 138.

7.2 Premières observations des bosons W^\pm et Z .

L'observation de bosons W^\pm et Z réels a constitué une deuxième étape importante dans le test des prédictions du modèle de Glashow, Weinberg, Salam. Cette étape a été franchie dans la décennie 1980, grâce aux progrès réalisés dans le domaine des accélérateurs et dans celui des détecteurs de particules. Avec la mise en exploitation au CERN en 1982 du collisionneur $\bar{p} - p$ ($E_{c.m.} = 540$ GeV) les expérimentateurs ont disposé des moyens nécessaires à la production de bosons W^\pm et Z . Deux des détecteurs installés sur l'anneau de collisions (ceux des expériences UA1 et UA2) ont été conçus spécialement pour permettre l'identification des leptons chargés et des hadrons issus des collisions et la mesure de leur direction de propagation et de leur énergie⁸¹. Ces détecteurs ont essentiellement les caractéristiques de ceux décrits au § 1.6.

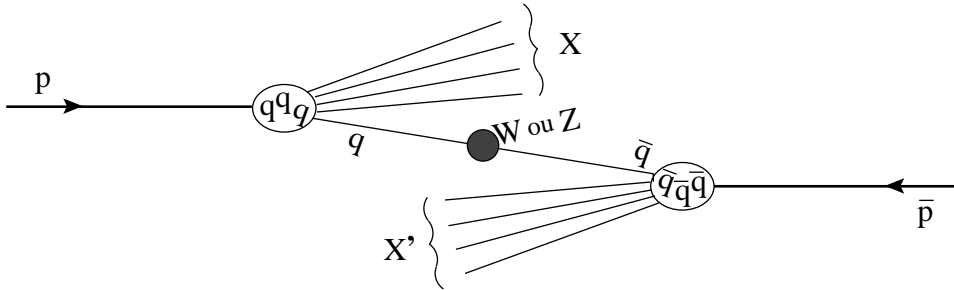


FIG. 7.2.1 – Mécanisme de production d'un boson W^\pm ou Z dans la collision proton-antiproton.

Le diagramme de la figure 7.2.1 montre comment on se représente le mécanisme de production d'un W^\pm ou d'un Z . On admet qu'un des (3) quarks du proton et un des (3) antiquarks de l'antiproton participent effectivement à la réaction. Les deux autres quarks (antiquarks) ne jouent qu'un rôle de spectateurs et donnent lieu par fragmentation à un jet de hadrons X et un jet d'antihadrons X' . Une fois créé, le boson W^\pm ou Z se désintègre par interaction faible en une paire de quarks ($\bar{q}q$) ou en une paire de lepton ($\bar{\ell}\ell$). Bien que dominantes, les voies de désintégration en quarks sont difficiles à séparer, les hadrons auxquels elles donnent lieu par fragmentation étant mêlés aux autres hadrons de l'événement. C'est pourquoi la recherche initiale s'est concentrée sur les modes de désintégration leptoniques, et plus spécialement sur les voies :

$$\begin{aligned} W^\pm &\rightarrow e^+(e^-) + \nu_e(\bar{\nu}_e) \\ Z &\rightarrow e^+ + e^- \quad \text{ou} \quad \mu^+ + \mu^- \end{aligned}$$

⁸¹G. Arnison et al. (UA1 collaboration) Phys. Letters 122B (1983) 103 et 126B (1983) 398. M. Banner et al. (UA2 collaboration) Phys. Letters 122B (1983) 476 et 129B (1983) 130.

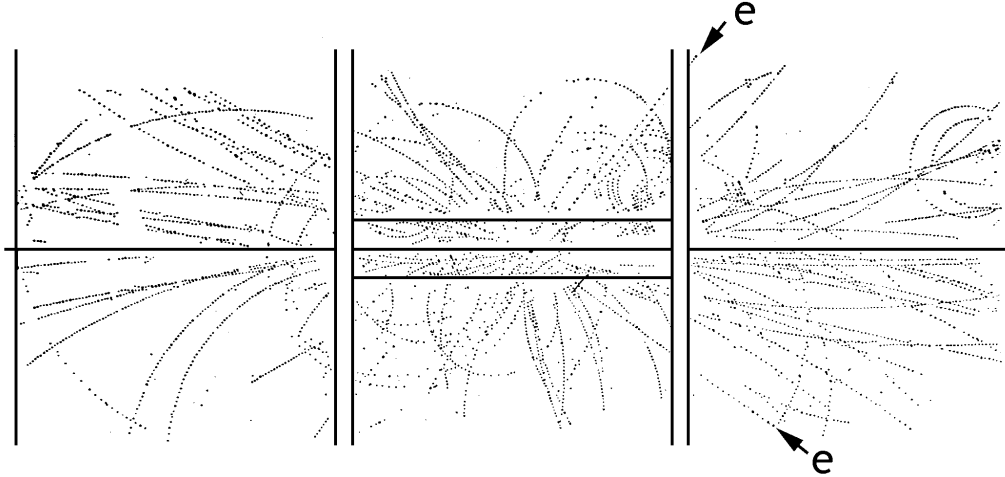


FIG. 7.2.2 – Événement présentant la signature de la désintégration leptonique du boson Z produit lors d'une collision $\bar{p} - p$.

La procédure d'analyse mise en oeuvre dans la cas du boson W a été exposée au § 3.2. Les premières valeurs de masse publiées ont été les suivantes :

$$\begin{aligned}
 M_W &= 80_{-6}^{+10} \text{ GeV}/c^2, \quad \text{pour la collaboration UA1} \\
 &= 80_{-5}^{+5} \text{ GeV}/c^2, \quad \text{pour la collaboration UA2}
 \end{aligned}$$

L'annonce de la découverte du boson Z est venue ultérieurement à celle du W . C'est que la section efficace de production du Z est dix fois plus faible que celle du W , il a donc fallu plus de temps pour recueillir un nombre significatif d'événements. Par ailleurs, l'identification du Z est plus aisée que celle du W car les deux leptons issus de la désintégration sont chargés et donc détectés par l'appareillage de mesure. La figure 7.2.2 montre un événement typique sélectionné dans l'appareillage d'UA1; on distingue les deux jets de hadrons issus des quarks spectateurs et les deux leptons issus du boson Z . L'énergie déposée par la paire $e^+ - e^-$ dans le calorimètre électromagnétique peut être représentée dans un graphique bidimensionnel (lego, voir la figure 7.2.3). On peut vérifier que les composantes transversales de cette énergie se compensent. Dans la figure 7.2.3 b on représente un événement où l'un des leptons est accompagné d'un photon de freinage. La masse du boson peut être déterminée à partir du calcul de la masse effective des paires e^+e^- :

$$m_{eff} = [(E_{e^+} + E_{e^-})^2 - (\mathbf{p}_{e^+} + \mathbf{p}_{e^-})^2]^{\frac{1}{2}} \quad (7.2.1)$$

La figure 7.2.4 a) montre le spectre de la masse effective obtenu.

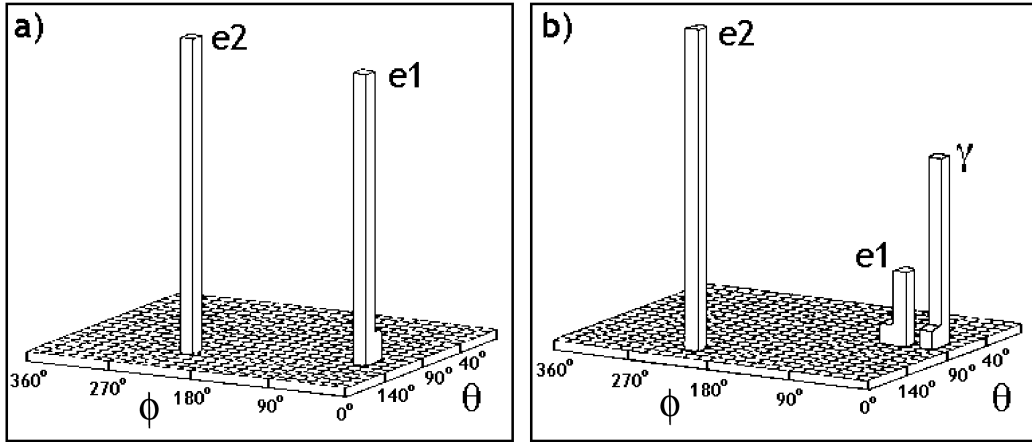


FIG. 7.2.3 – Événements candidats à $Z \rightarrow e^+ + e^-$. a) représentation de l'énergie déposée dans le calorimètre e.m. par l' e^+ et l' e^- ; la direction des trajectoires est définie par l'angle θ par rapport à l'axe des faisceaux et l'angle ϕ autour de cet axe. b) événement dans lequel un des leptons a subi une diffusion inélastique avant son entrée dans le calorimètre ; le photon de freinage donne également un signal dans ce calorimètre

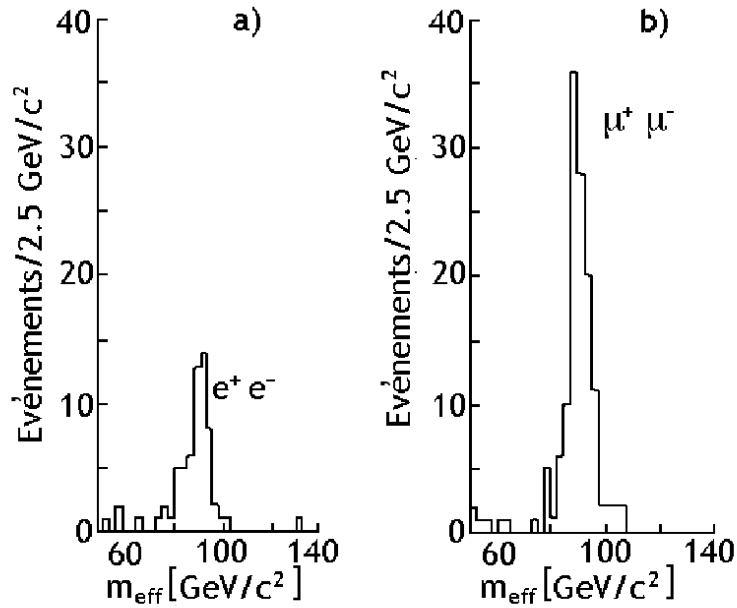


FIG. 7.2.4 – Spectres de masse effective m_{eff} pour des événements candidats à $Z \rightarrow l^+l^-$, où $l^\pm = e^\pm$ et μ^\pm .

L'appareillage d'UA1 permettait l'identification et la mesure de muons. La figure 7.2.4 b) montre le spectre de masse effective de paires $\mu^+\mu^-$, où les muons sont issus de la désintégration $Z \rightarrow \mu^+ + \mu^-$. La différence entre les nombres d'événements des histogrammes de la figure 7.2.4 est un reflet de la différence d'efficacité du déclenchement sur ces deux voies de désintégration. L'ajustement d'une fonction de résonance de Breit-Wigner tenant compte des incertitudes de mesure a permis de donner une première estimation de la masse et de la largeur du Z :

$$M_Z = 95.2 \pm 2.5 \text{ GeV}/c^2 ; \quad \Gamma_Z < 5.1 \text{ GeV}/c^2 \quad (\text{UA1})$$

$$= 91.9 \pm 1.9 \text{ GeV}/c^2 ; \quad \Gamma_Z < 11 \text{ GeV}/c^2 \quad (\text{UA2})$$

7.3 Les processus à courants chargés.

7.3.1 La Théorie de Fermi.

E. Fermi en 1934 a donné une interprétation de la désintégration β radioactive. Il s'est basé sur le modèle d'interaction e.m. (figure 7.3.1 a) pour lequel l'amplitude de Lorentz a la forme :

$$j_\mu A^\mu \equiv j_\mu \frac{1}{q^2} j'^\mu \quad (7.3.1)$$

A l'époque on ne savait rien des bosons intermédiaires. A défaut d'information sur l'agent de l'interaction faible, Fermi a supprimé le propagateur, ce qui revient à admettre que cette interaction est ponctuelle (figure 7.3.1 b) :

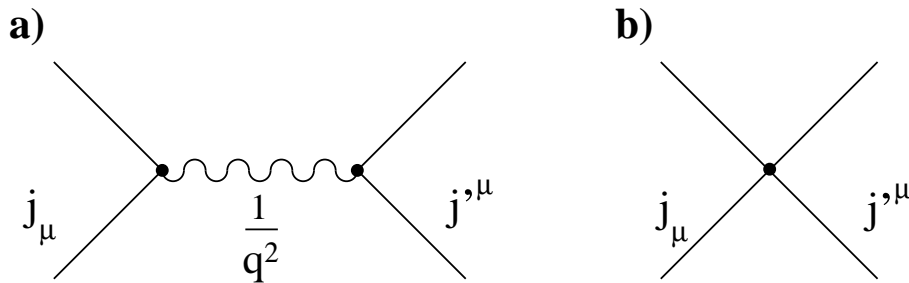


FIG. 7.3.1 -

Pour le processus $n \rightarrow p + e + \bar{\nu}_e$, Fermi a construit une amplitude de la forme :

$$\mathcal{M} \approx j^W(np)_\mu \cdot j^W(e\bar{\nu}_e)^\mu \quad (7.3.2)$$

où \mathbf{j}^W désigne un courant faible vectoriel par analogie avec le courant e.m. (voir § 5.2). D'autre part il a introduit un paramètre de couplage G_F analogue à α_{em} . $\sqrt{G_F}$ est en quelque sorte associé à une "charge faible" des particules.

L'énergie en jeu lors d'une désintégration β est petite, ce qui amène Fermi à considérer que $|\mathcal{M}|$ est constante dans le calcul de la probabilité de transition (voir § 3.2) :

$$W = \frac{2\pi}{\hbar} G_F^2 |\mathcal{M}|^2 \frac{dN}{dE} \quad (7.3.3)$$

Le spectre d'énergie de l' e^- est donc uniquement déterminé par le terme "d'espace de phase" $\frac{dN}{dE}$. Ce spectre avec $m_\nu = 0$ a la forme :

$$N(|p\rangle) \propto |p|^2 (E_0 - E)^2 \quad (7.3.4)$$

Cette forme est bien reproduite par les résultats d'expérience, ce qui valide *a posteriori* l'approximation $|\mathcal{M}| \simeq cte$. A cause de la grande masse du nucléon, l'énergie disponible E_0 est partagée presque exclusivement entre l' e^- et l' $\bar{\nu}_e$.

La constante G_F est une mesure de l'intensité de l'interaction. Elle peut être déterminée en comparant la prédiction de 7.3.3, intégrée sur tout l'espace de phase, à la probabilité de transition mesurée. On trouve :

$$G_F = 1.166 \cdot 10^{-5} \text{ GeV}^{-2} \quad (7.3.5)$$

Remarquez que G_F a la dimension $[1/E^2]$ alors que α_{em} est sans unité⁸². Cela est dû à l'absence du propagateur en $1/q^2$.

Cette version de la théorie de Fermi ne s'applique qu'aux transitions dites "de Fermi" dans lesquelles les noyaux (ou les hadrons) initial et final sont dans le même état de spin. Cette limitation est inhérente au choix du courant faible vectoriel (voir § 7.4). Dans le cas d'un changement d'état de spin entre les noyaux initial et final et émission d'une paire de leptons avec un moment angulaire orbital non nul (par ex. dans ${}^6He(J^P = 1^+) \rightarrow {}^6Li(J^P = 0^+) + e^- + \bar{\nu}_e$), on parle de transition de Gamow-Teller⁸³.

Différents perfectionnements de la théorie devront encore être apportés pour parvenir à rendre compte des données expérimentales. Par exemple la structure du courant faible devra être adaptée pour inclure la violation de la parité, comme on l'a exposé au chapitre 4. La description d'un processus faible tel que : $\nu_\mu + e^- \rightarrow \mu^- + \nu_e$ en est un autre exemple. Si l'on suppose l'interaction ponctuelle à la

⁸²On a posé $\hbar c = 1$; si on veut rétablir la dimension correcte de G_F , il faut écrire $G_F/(\hbar c)^3 = 1.166 \cdot 10^{-5} \text{ GeV}^{-2}$.

⁸³Auteurs d'une nouvelle version de la théorie. Par ailleurs George Gamow est le concepteur du Big-Bang. Edward Teller est le concepteur de la bombe H et de la guerre des étoiles ; il proposait de construire un accélérateur pour envoyer un faisceau de particules sur l'URSS. Ce projet a été considéré irréalisable à cause du champ magnétique terrestre. Un vrai bienfaiteur de l'humanité, surnommé "E-T", d'après Spielberg !

Fermi, le calcul donne une dépendance en énergie de la section efficace différentielle angulaire de la forme⁸⁴ :

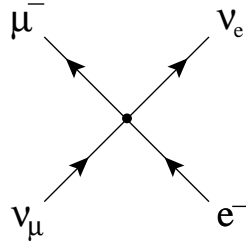


FIG. 7.3.2 – Interprétation du processus $\nu_\mu + e^- \rightarrow \mu^- + \nu_e$ par une interaction ponctuelle.

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \approx \frac{G_F^2}{\pi^2} E^2 \quad (7.3.6)$$

Or le **principe de l’ “unitarité”** (voir plus loin) prescrit que la section efficace décroît comme $1/E^2$. Ce type d’évolution est bien ce qu’on trouve dans des processus de QED, par ex. dans la section de $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ (voir 5.12.12) :

$$\sigma = \frac{4\pi\alpha_{em}^2}{3} \frac{1}{E^2} \quad (7.3.7)$$

Rappelons que dans cette expression la constante α_{em} est sans dimension. Ce qui amène à introduire une nouvelle constante de couplage faible g , grandeur sans dimension analogue à α_{em} . Le modèle de Glashow, Weinberg, Salam montre qu’on obtient la bonne dépendance en énergie si l’on fait entrer en jeu la masse du boson W en posant :

$$G_F \sim g^2/M_W^2 \quad (7.3.8)$$

Note sur le principe d’ “unitarité”⁸⁵.

On peut écrire la section efficace comme une somme des contributions d’un nombre infini d’ “ondes partielles” :

$$\sigma = \frac{4\pi}{E^2} \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell + 1) \sin^2 \delta_\ell$$

⁸⁴Cette prédiction peut être rendue plausible par un raisonnement d’analyse dimensionnelle.

⁸⁵voir par ex. ref. 12, chapitre 9

La condition d'unarité s'exprime par le fait que chaque élément $\sin^2 \delta_\ell$ est plus petit que 1. Dans la Théorie de Fermi, seule l'onde partielle $\ell = 0$ contribue, car l'interaction est ponctuelle (paramètre d'impact nul) :

$$\sigma = \frac{4\pi}{E^2} \sin^2 \delta_0 < \frac{4\pi}{E^2}$$

Donc, la limite "unitaire" :

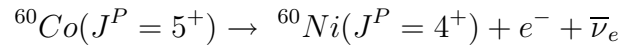
$$\frac{\Delta\sigma}{\Delta\Omega} \lesssim \frac{1}{4\pi} \frac{4\pi}{E^2} = \frac{1}{E^2} \quad \text{est violée par 7.3.6 quand :} \quad \frac{G_F^2 E^2}{\pi^2} > \frac{1}{E^2}$$

c'est à dire pour :

$$E \approx \frac{1}{\sqrt{G_F}} \sim \mathcal{O}(100 \text{ GeV})$$

7.3.2 Retour à la violation de la parité.

Ce paragraphe est un complément au § 4.3 dans lequel on a présenté l'expérience du Wu et al. (1957). Rappelons que cette expérience portait sur la mesure de la distribution angulaire des électrons émis lors de la désintégration β de noyaux de cobalt polarisés :



Les auteurs ont trouvé que cette distribution angulaire (voir figure 7.3.3) est asymétrique et qu'elle est de la forme :

$$I(\theta) \approx \frac{1}{\pi} + \alpha \frac{\hat{\mathbf{J}} \cdot \mathbf{p}_e}{E_e} \quad (7.3.9)$$

où :

$\hat{\mathbf{J}}$ est le vecteur unité selon \mathbf{J}_{Co}

\mathbf{p}_e , E_e sont la quantité de mouvement et l'énergie de l' e^-

α est le paramètre d'asymétrie, à déterminer.

Q. : montrer que la conservation de la parité implique : $\alpha = 0$.

L'ajustement de la forme 7.3.9 à la distribution angulaire observée a donné : $\alpha = -1$ (violation de P à 100%). Ce résultat a conduit à d'intéressantes conséquences concernant l'hélicité de l'électron.

Dans une transition de Gamow-Teller, telle que celle ci-dessus, la différence d'états de spin entre les noyaux initial et final se retrouve entièrement dans l'addition des spins des deux leptons (état triplet de spin); il n'y a pas de moment

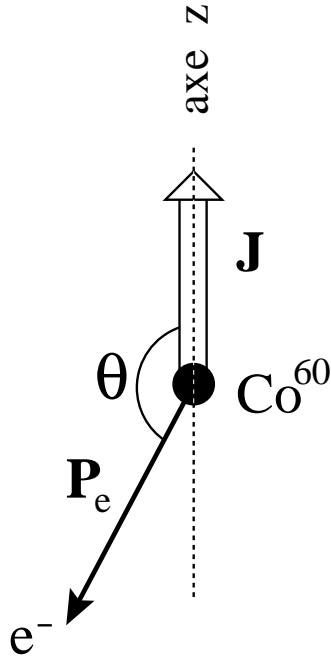


FIG. 7.3.3 – Test de violation de la Parité dans la désintégration β du ^{60}Co .

orbital emporté par la paire $e^- - \bar{\nu}_e$. Il s'en suit que les spins sont alignés sur le spin du ^{60}Co et que 7.3.9 peut aussi s'écrire :

$$I(\theta) \approx 1 + \alpha \frac{\hat{\mathbf{S}}_e \cdot \mathbf{p}_e}{E_0} \quad (7.3.10)$$

où $\hat{\mathbf{S}}_e$ est le vecteur unité selon \mathbf{S}_e , le spin de l'électron.

On peut en extraire l'hélicité moyenne de l'électron :

$$\langle \lambda_{e^-} \rangle = \frac{\int_0^{\pi/2} I(\theta) d\theta - \int_{\pi/2}^{\pi} I(\theta) d\theta}{\int_0^{\pi/2} I(\theta) d\theta + \int_{\pi/2}^{\pi} I(\theta) d\theta} = \alpha \frac{|\mathbf{p}_e^-|}{E_{e^-}} = \alpha |\boldsymbol{\beta}_e^-| = -|\boldsymbol{\beta}_e^-| \quad (7.3.11)$$

avec $\alpha = -1$.

Des études similaires faites sur des transitions $G - T$ avec émission β positive ont montré que :

$$\langle \lambda_{e^+} \rangle = +|\boldsymbol{\beta}_{e^+}| \quad (7.3.12)$$

avec $\alpha = +1$.

Par ailleurs, les mesures directes et indépendantes de la polarisation des leptons chargés à l'aide de différentes techniques d'analyse ont confirmé ces résultats. De telles expériences ont porté non seulement sur les désintégrations β radioactives mais aussi sur les désintégrations de muons :

$$\mu^\pm \rightarrow e^\pm + \nu_e(\bar{\nu}_e) + \bar{\nu}_\mu(\nu_\mu) \quad (7.3.13)$$

La masse du muon étant de 105 MeV, l'électron sélectionné près du maximum du spectre a un $|\beta_e| \simeq 1$. Cela montre qu'à la limite ultrarelativiste, l'hélicité des leptons chargés tend vers l'hélicité de leurs neutrinos (voir § 3.5).

Le tableau 7.3.1 résume l'ensemble de ces résultats.

<i>leptons</i> :	ℓ^+	ℓ^-	$\bar{\nu}_\ell$	ν_ℓ
λ :	v/c	$-v/c$	+1	-1

TAB. 7.3.1 – Hélicité des leptons ($\ell = e, \mu, \tau$)

7.3.3 L'interaction $V - A$.

Il s'avère nécessaire de modifier la théorie phénoménologique de Fermi pour rendre compte des transitions de Gamow-Teller (G-T) et de la violation de la parité. Considérons d'abord un processus semileptonique, tel que la désintégration du neutron. On peut dans un premier temps, modifier comme suit la forme du courant faible :

$$F : \quad \underbrace{n \rightarrow p}_{\Delta J=0} + \underbrace{e^- + \bar{\nu}_e}_{S=0} \quad \mathcal{M} \sim G_F(\psi_p^* \psi_n)(\psi_e^* \psi_{\nu_e}) \quad (7.3.14)$$

$$GT : \quad \underbrace{n \rightarrow p}_{\Delta J=1} + \underbrace{e^- + \bar{\nu}_e}_{S=1} \quad \mathcal{M} \sim G_{GT}(\psi_p^* \sigma \psi_n)(\psi_e^* \sigma \psi_{\nu_e}) \quad (7.3.15)$$

L'opérateur σ agit sur les spineurs ψ_i de façon à permettre la nouvelle configuration de spin. Expérimentalement on trouve :

$$\frac{G_{GT}}{G_F} = 1.18 \pm 0.03 \quad (7.3.16)$$

On peut montrer que 7.3.14 et 7.3.15 sont les limites non relativistes des produits :

$$F : \sim (\bar{\psi}_p \gamma^\mu \psi_n) (\bar{\psi}_e \gamma_\mu \psi_{\nu_e}) \quad (7.3.17)$$

$$GT : \sim (\bar{\psi}_p \gamma^\mu \gamma^5 \psi_n) (\bar{\psi}_e \gamma_\mu \gamma^5 \psi_{\nu_e}) \quad (7.3.18)$$

formés à l'aide des courants vectoriels et axiaux :

$$\mathbf{V} : \quad (J^V)^\mu = \bar{\psi} \gamma^\mu \psi \equiv V^\mu \quad (7.3.19)$$

$$\mathbf{A} : \quad (J^A)^\mu = \bar{\psi} \gamma^\mu \gamma^5 \psi \equiv A^\mu \quad (7.3.20)$$

Ces courants sont représentés par les diagrammes de la figure 7.3.4, l'effet du propagateur (pointillé) étant négligé. Les produits de courants tels que 7.3.17 et

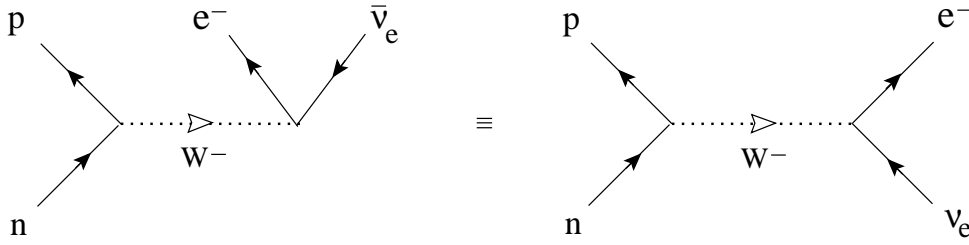


FIG. 7.3.4 – Equivalence des diagrammes de la désintégration β du neutron.

7.3.18 donnent des quantités scalaires de parité positive. Si l'on veut introduire la violation de la parité il faut concevoir un mélange de courants de parité positive et négative. C'est ce qu'on obtient avec le mélange $\mathbf{V} - \mathbf{A}$.

$$\mathcal{M} \sim G(aV^{pn} + bA^{pn})^\mu (cV^{e\nu} + dA^{e\nu})_\mu \quad (7.3.21)$$

où a, b, c, d et G sont des paramètres à définir.

En explicitant on fait apparaître les produits VV et AA de parité positive et VA de parité négative. La comparaison avec les résultats expérimentaux conduit à la paramétrisation suivante :

$$\mathcal{M} \approx G_F (\bar{\psi}_p \gamma^\mu (1 - \frac{G_{GT}}{G_F} \gamma_5) \psi_n) \times \underbrace{(\bar{\psi}_e \gamma_\mu (1 - \gamma_5) \psi_{\nu_e})}_{L_\mu} \quad (7.3.22)$$

Le courant leptonique L^μ contient le projecteur $\frac{1}{2}(1 - \gamma_5)$ qui, agissant sur le spineur du neutrino, en sélectionne la composante gauche (droite pour le $\bar{\nu}$)⁸⁶.

L'écart entre les valeurs de G_F et G_{GT} mesurées peut être expliqué comme résultant de l'implication de l'interaction forte entre les quarks participant au processus.

⁸⁶Notez qu'en fonction de la métrique adoptée vous pouvez trouver dans la littérature ce projecteur écrit $\frac{1}{2}(1 + \gamma_5)$.

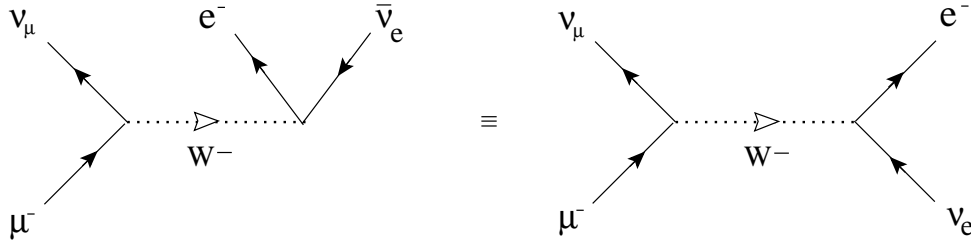


FIG. 7.3.5 – Equivalence des diagrammes de la désintégration $\mu^- \rightarrow e + \bar{\nu}_e + \nu_\mu$

Considérons ensuite un processus purement leptonique, telle que la désintégration du muon (figure 7.3.5). Son amplitude est proportionnelle au produit de deux courants leptoniques :

$$\mathcal{M} \approx G_\mu [\bar{u}_{\nu_\mu} \gamma^\mu (1 - \gamma_5) u_{\mu^-}] [\bar{u}_{e^-} \gamma^\mu (1 - \gamma_5) u_{\nu_e}] \quad (7.3.23)$$

Le calcul détaillé⁸⁷ conduit au taux de la désintégration⁸⁸.

$$\frac{1}{\tau} = G_\mu^2 m_\mu^5 / 192 \pi^3 \quad (7.3.24)$$

En introduisant les valeurs mesurées $m_\mu = 105.65$ MeV et $\tau = 2.197 \cdot 10^{-6}$ s, on peut déterminer la constante de couplage G_μ . La valeur obtenue est très proche de celle de G_F :

$$\frac{G_\mu - G_F}{G_F} = 0.028 \pm 0.013 \quad (7.3.25)$$

Ce petit écart peut également être expliqué en tenant compte du caractère ambivalent des quarks, constituants sensibles aux interactions forte et faible (Cabibbo, voir § 7.3.6).

Une fois pris en compte les écarts entre les constantes de couplage, il ressort une propriété remarquable du couplage dans les courants faibles chargés, son **universalité** :

$$\text{couplage } [(e\nu_e) \text{ avec } (pn)] \cong \text{couplage } [(e\nu_e) \text{ avec } (\mu\nu_\mu)] \quad (7.3.26)$$

Cette propriété peut être mise en parallèle avec celle des couplages e.m. proton-proton, proton - e^+ , $\mu^+ - \mu^+$; on sait que ces couplages sont identiques, bien que le proton soit une particule non pontuelle⁸⁹. Cette égalité est due au fait que c'est la charge totale (conservée) de l'objet qui est en jeu (figure 7.3.6).

⁸⁷ Voir D. Bailin, Weak interactions, Ed. Adan Hilger LTD, Bristol § 3.1.

⁸⁸ On a laissé de côté ici de petites corrections dépendant de $(m_e/m_\mu)^2$ ainsi que les corrections radiatives.

⁸⁹ Vrai à basse énergie, quand le photon intermédiaire ne peut pas discerner les constituants du nucléon.

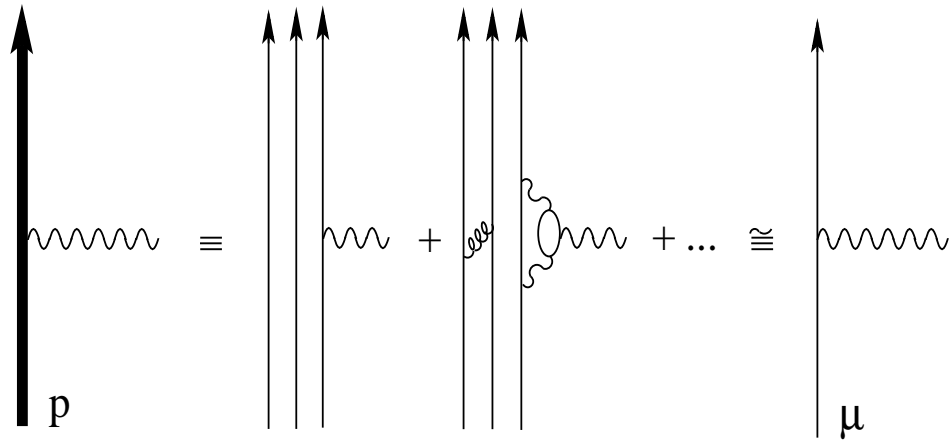


FIG. 7.3.6 – A faible énergie, un proton (particule composée) est “vu” par le médiateur de l’interaction e.m. comme une particule ponctuelle.

De même il semble exister une charge faible conservée et un couplage unique pour toute particule sensible à l’interaction faible (voir figure 7.3.7) ; sa valeur est de l’ordre de $\sqrt{G_F}$.

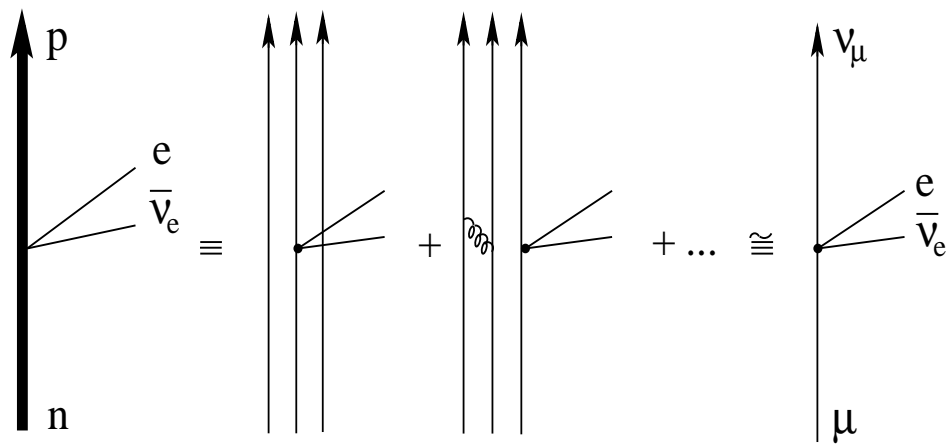


FIG. 7.3.7 – Un nucléon “vu” par l’interaction faible est globalement similaire à un lepton.

Le concept d’universalité de l’interaction faible est vérifié avec grande précision pour les familles de leptons. L’application aux familles de quarks fait l’objet du §

7.3.6.

7.3.4 Amplitude avec propagateur de boson W ; comportement à basse énergie.

Imaginons un faisceau de neutrino muons intercepté par une cible de matériel lourd, et considérons la réaction : $\nu_\mu + e^- \rightarrow \mu^- + \nu_e$, où e^- est un électron d'une couche atomique.

Notons qu'il s'agit d'un processus purement leptonique comme dans la désintégration du muon (§ 7.3.3) ; par contre l'énergie totale en jeu peut être plus élevée (seuil à $\simeq m_\mu c^2$) en fonction de l'énergie du faisceau.

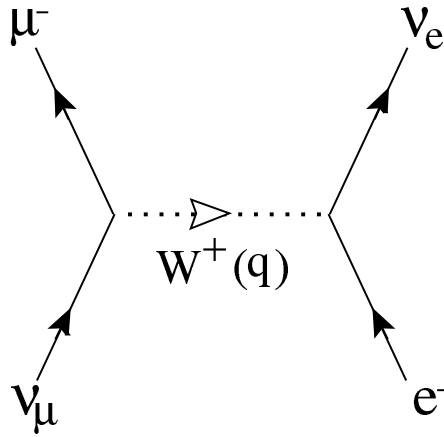


FIG. 7.3.8 – Diagramme de $\nu_\mu e^- \rightarrow \mu^- \nu_e$ avec un boson intermédiaire W transportant la quantité de mouvement q .

Nous postulons que le mécanisme de la réaction est régi par l'échange d'un boson W virtuel (interaction à distance, suivant le diagramme de la figure 7.3.8). L'application des règles de Feynman (voir § 5.3.2) amène à une amplitude de la forme :

$$\mathcal{M} = \frac{g^2}{2} \left[\bar{u}_{\mu^-} \gamma_\mu \frac{(1 - \gamma_5)}{2} u_{\nu_\mu} \right] \frac{-g^{\mu\nu} + q^\mu q^\nu / M_W^2}{q^2 - M_W^2} \left[\bar{u}_{\nu_e} \gamma_\nu \frac{(1 - \gamma_5)}{2} u_{e^-} \right] \quad (7.3.27)$$

où :

- u_i est le spineur du lepton i
- g est une "charge faible", qui permet de définir le couplage faible, par analogie à la charge électrique qui définit le couplage e.m.
- q est le quadri-moment du boson échangé
- M_W est sa masse ($\simeq 80 \text{ GeV}/c^2$)

L'expression du propagateur semble difficile à comprendre de prime abord ; toutefois, si l'on se place dans la situation où $q^2 \ll M_W^2$, cette expression se réduit à la forme simple $g^{\mu\nu}/M_W^2$. Dans ces conditions on peut faire plus aisément la comparaison avec l'amplitude correspondante pour l'interaction ponctuelle :

$$\mathcal{M}_{\text{ponct.}} = \frac{G_F}{\sqrt{2}} [\bar{u}_{\mu^-} \gamma_\mu (1 - \gamma_5) u_{\nu_\mu}] g^{\mu\nu} [\bar{u}_{\nu_e} \gamma_\nu (1 - \gamma_5) u_{e^-}] \quad (7.3.28)$$

On voit qu'à basse énergie l'amplitude $\mathcal{M} \Rightarrow \mathcal{M}_{\text{ponct.}}$ si l'on pose :

$$\frac{g^2}{8M_W^2} = \frac{G_F}{\sqrt{2}} \quad (7.3.29)$$

L'interaction ponctuelle, postulée dans la théorie de Fermi, s'avère justifiée à posteriori puisque dans un processus de désintégration β $q^2 \simeq \mathcal{O}(1\text{Mev}^2) \ll M_W^2$.

On se rend compte d'autre part que la différence entre l'interaction faible et l'interaction électromagnétique est due plus à la différence entre les masses de leurs médiateurs qu'à la différence entre leurs constantes de couplage. Il s'en suit qu'à très haute énergie ($\gg 100$ GeV) les deux interactions sont de force comparable.

7.3.5 Désintégration du pion chargé en modes purement leptoniques.

Le pion chargé a deux modes de désintégration purement leptoniques (voir table PDG), avec des rapports d'embranchement mesurés de :

$$\begin{aligned} \pi^\pm &\rightarrow \mu^\pm \nu_\mu (\bar{\nu}_\mu) &: & 0.999877 \\ &\rightarrow e^\pm \nu_e (\bar{\nu}_e) &: & 1.230 \cdot 10^{-4} \end{aligned}$$

Ces résultats constituent une application intéressante des contraintes résultant des propriétés d'hélicité des leptons (§ 7.3.2).

De prime abord, sur la base de pures considérations énergétiques (espace de phase disponible), on prédirait une dominance de la voie électronique sur la voie muonique. C'est la situation inverse que l'on observe, et la théorie des courants $\mathbf{V} - \mathbf{A}$ permet d'en rendre compte. Elle prédit des taux de désintégration dans le rapport :

$$\frac{\Gamma(\pi \rightarrow e\nu)}{\Gamma(\pi \rightarrow \mu\nu)} \simeq \left(\frac{m_e}{m_\mu}\right)^2 \cdot \left(\frac{m_\pi^2 - m_e^2}{m_\pi^2 - m_\mu^2}\right)^2 = 1.2 \cdot 10^{-4} \quad (7.3.30)$$

On peut le comprendre si l'on se réfère à la structure du courant faible impliqué dans un tel processus.

Considérons par exemple la désintégration purement leptonique d'un π^+ . Elle est régie par un courant chargé de la forme :

$$\begin{aligned} j^\mu &= \bar{u}_\ell \gamma^\mu \left(\frac{1 - \gamma_5}{2}\right) u_{\nu_\ell} \equiv \bar{u}_\ell \gamma^\mu \left(\frac{1 - \gamma_5}{2}\right) \left(\frac{1 - \gamma_5}{2}\right) u_{\nu_\ell} \quad (7.3.31) \\ &\equiv \underbrace{\bar{u}_\ell \left(\frac{1 + \gamma_5}{2}\right)}_{h_{\bar{\ell}}=+1} \gamma^\mu \underbrace{\left(\frac{1 - \gamma_5}{2}\right) u_{\nu_\ell}}_{h_{\nu_\ell}=-1} \quad \text{où } \ell = \text{muon ou électron} \end{aligned}$$

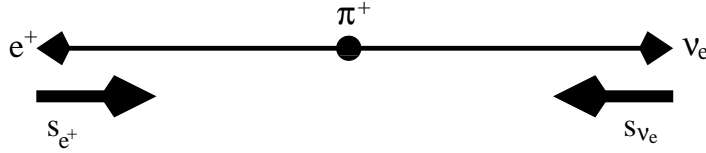


FIG. 7.3.9 – Désintégration du pion positif; états de spin imposés par la conservation du moment angulaire.

Ce courant implique un ν_ℓ d'hélicité -1 et un $\bar{\ell}$ d'hélicité $+1$ ⁹⁰. Or, le pion n'ayant pas de spin, la conservation à la fois de la quantité de mouvement et du moment angulaire impose à l' $\bar{\ell}$ et au ν_ℓ d'être dans le même état d'hélicité (figure 7.3.9). Une telle configuration a 10^4 fois plus de chance d'être réalisée dans la voie muonique que dans la voie électronique, parce que le muon est relativement lent par rapport à l'électron à cause de la différence des masses (tableau 7.3.1).

7.3.6 La théorie de Cabibbo⁹¹.

Pour bien comprendre le mécanisme de l'interaction faible dans les hadrons et le mettre en relation avec celui imaginé pour les leptons, il est nécessaire de remonter au niveau du processus élémentaire impliquant les quarks. Des illustrations en ont été données au § 7.1. Le diagramme de la figure 7.1.3 représente la désintégration semileptonique du neutron; l'échange de boson W se fait entre un vertex impliquant des quarks (antiquarks) et un vertex impliquant des leptons (antileptons). Le diagramme de la figure 7.1.2 représente la désintégration purement hadronique du lambda; l'échange de boson W se fait ici entre deux vertex impliquant des quarks (antiquarks), ce qui complique l'interprétation à cause de l'interaction forte entre les hadrons de l'état final. C'est pourquoi nous avons fait le choix de décrire des processus semileptoniques. De plus, nous nous concentrons pour l'instant sur les processus impliquant les deux familles (générations) de quarks⁹² : $\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix}$ et les deux familles de leptons : $\begin{pmatrix} \nu_e \\ e^- \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu^- \end{pmatrix}$. L'application du principe d'universalité amène à postuler que les couplages du W aux quarks et aux leptons peuvent être caractérisés par la même constante g ⁹³. Toutefois, l'expérience montre que dans le cas des leptons ce couplage n'a lieu qu'avec les partenaires d'une même famille (conservation de la charge leptonique);

⁹⁰Remarquons que le couplage au W^\pm sélectionne un état d'hélicité déterminé du lepton chargé.

⁹¹N. Cabibbo Phys. Rev. Lett. 10 (1963) 531.

⁹²En fait, seuls les quarks u , d et s étaient connus en 1963; l'extension au doublet $\begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix}$ date de 1970 (voir §7.5).

⁹³Abstraction faite du léger écart entre les valeurs mesurées G_μ et G_F .

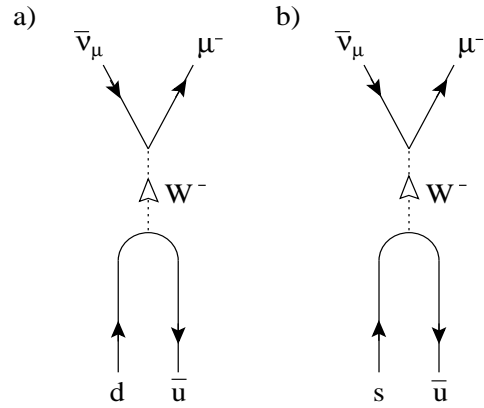


FIG. 7.3.10 – Diagrammes des désintégrations semileptoniques **a)** $\pi^- \rightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu$ ($\Delta S = 0$) et **b)** $K^- \rightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu$ ($\Delta S = 1$).

par exemple :

$$\begin{aligned}
 e^- &\rightarrow \nu_e + W^- & , & & \mu^- &\rightarrow \nu_\mu + W^- \\
 &\not\Rightarrow \nu_\mu + W^- & & & &\not\Rightarrow \nu_e + W^-
 \end{aligned}$$

Par contre, dans le cas des quarks, on observe que ce couplage a lieu non seulement avec les partenaires d'une même famille mais aussi, bien que moins fréquemment, avec des quarks appartenant à des familles différentes. Les diagrammes de la figure 7.3.10 **a)** et **b)** en donnent des exemples ; notez la différence de saveur (ici d'étrangeté $\Delta S = 1$) entre les deux quarks impliqués dans le couplage avec le W du diagramme **b)**. Le rapport entre les taux de désintégration observés dans les processus avec et sans changement d'étrangeté, après la prise en compte des facteurs cinématiques (espace de phase), est d'environ 1/20 ce qui donne⁹⁴ un rapport d'environ 1/2 au niveau de la constante de couplage.

N. Cabibbo a cherché à résoudre cette intrigante question et à restaurer la validité du principe d'universalité. Pour ce faire, il a suggéré l'existence d'une dualité dans les états d'un quark, selon qu'on étudie l'interaction forte ou l'interaction faible de celui-ci. Pour le doublet des quarks légers, il a imaginé le schéma de mélange suivant⁹⁵ :

état propre de l'interaction forte	\iff	état propre de l'interaction faible
$\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}$		$\begin{pmatrix} u \\ d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ d \cos \theta_C + s \sin \theta_C \end{pmatrix}$

⁹⁴Le taux de transition est proportionnel à g^4 .

⁹⁵Le choix de mélanger les membres inférieurs des doublets était arbitraire; cette convention est restée en vigueur.

Un état s' peut être construit en imposant qu'il soit orthogonal à d' :

$$s' = -d \sin \theta_C + s \cos \theta_C$$

θ_C est appelé communément l'angle de Cabibbo. Sa valeur a pu être déterminée expérimentalement à partir des taux de transition dans des processus avec et sans changement d'étrangeté, tels que ceux de la figure 7.3.10.

Le couplage au vertex des quarks est pondéré par un facteur $\cos \theta_C$ pour le type dWu et par un facteur $\sin \theta_C$ pour le type sWu . Le couplage au vertex des leptons reste inchangé. Avec ces modifications, la théorie prédit que :

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma(K^- \rightarrow \mu^- \bar{\nu}_\mu)}{\Gamma(\pi^- \rightarrow \mu^- \bar{\nu}_\mu)} &\approx \frac{\Gamma(\Lambda \rightarrow pe^- \bar{\nu}_e)}{\Gamma(n \rightarrow pe^- \bar{\nu}_e)} \\ &\approx \frac{g^4 \sin^2 \theta_C}{g^4 \cos^2 \theta_C} = \tan^2 \theta_C \end{aligned} \quad (7.3.32)$$

Le symbole \approx signifie qu'on a laissé de côté des facteurs cinématiques connus et dépendant du processus. Ces facteurs étant pris en compte, on a obtenu :

$$\theta_C = (12.8 \pm 0.2)^\circ \quad (7.3.33)$$

La même approche est valable pour la comparaison entre les taux de transition de processus hadroniques et leptoniques. Par exemple :

$$\frac{\Gamma(n \rightarrow pe^- \bar{\nu}_e)}{\Gamma(\mu^- \rightarrow e^- \nu_\mu \bar{\nu}_e)} \approx \frac{g^4 \cos^2 \theta_C}{g^4} = \cos^2 \theta_C \quad (7.3.34)$$

A partir des taux de transition mesurés et tenant des facteurs cinématiques, on a obtenu dans ce cas :

$$\theta_C = (12 \pm 1)^\circ \quad (7.3.35)$$

ce qui est compatible avec la valeur de θ_C ci-dessus.

Nous sommes maintenant en mesure de répondre à la question laissée en suspens au § 7.3.3 et relative aux constantes de couplage G_μ et G_F . En nous souvenant (relation 7.3.29) que $G_\mu \approx g^2$ alors que $G_F \approx g^2 \cos^2 \theta_C$ (transition avec $\Delta S = 0$), nous pouvons écrire que :

$$\begin{aligned} \frac{G_\mu - G_F}{G_F} &= \frac{g^2 - g^2 \cos^2 \theta_C}{g^2 \cos^2 \theta_C} = \frac{1}{\cos^2 \theta_C} - 1 \\ &\simeq 0.045 \quad (\text{à comparer à 7.3.25}) \end{aligned} \quad (7.3.36)$$

Ces résultats ont été considérés, à l'époque, comme un grand succès de la théorie de Cabibbo. Il restait néanmoins certaines questions dérangeantes (voir § 7.5); de plus, la découverte d'une troisième famille de quarks et de nouvelles voies de transition a conduit à la généralisation de cette théorie (voir § 7.6).

7.4 Les processus à courants neutres.

L'idée d'un médiateur neutre (lourd) de l'interaction faible a été suscitée par des problèmes de divergence rencontrés⁹⁶ lors de l'évaluation de certains diagrammes. On en donne un exemple à la figure 7.4.1 **a**, avec le diagramme du second ordre représentant la contribution du courant faible chargé⁹⁷ au processus $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$. L'amplitude calculée sur la base de ce diagramme diverge à haute énergie. Ce défaut est lié au fait que le courant faible chargé (échange de W^\pm) n'est pas un courant conservé⁹⁸ (comme l'est le courant e.m.). Une théorie avec courant faible conservé requiert l'existence d'un courant faible neutre et d'un boson vecteur neutre (Z) associé. Il s'est avéré que l'adjonction des diagrammes **b**) et **c**) au diagramme **a**) de la figure 7.4.1 permet de contrecarrer cette divergence, et même de la compenser exactement si les couplages aux vertex des bosons, g_γ , g_{W^\pm} et g_Z ⁹⁹, sont dans des rapports bien déterminés. La théorie électrofaible (Glashow, Weinberg, Salam) prescrit que :

$$\frac{g_\gamma}{g_{W^\pm}} = \sin \theta_W ; \quad \frac{g_\gamma}{g_Z} = \sin \theta_W \cos \theta_W \quad (7.4.1)$$

$$\cos \theta_W = \frac{M_{W^\pm}}{M_Z} \quad (7.4.2)$$

où :

M_{W^\pm}, M_Z sont les masses de bosons faibles
 $\theta_W (0 < \theta_W < \frac{\pi}{2})$ est appelé l'**angle de Weinberg** ; c'est un paramètre libre de la théorie.

La valeur de θ_W peut être déterminée expérimentalement à partir de différentes sources d'informations, entre autres les masses mesurées des bosons W^\pm et Z . La table PDG donne, pour une énergie égale à M_Z ¹⁰⁰ :

$$\sin^2 \theta_W = 0.231 , \quad \theta_W \simeq 28.7^\circ$$

Le courant faible neutre se trouve généralement exprimé sous la forme :

$$j_{\text{faible}}^{0\mu} = \bar{u}_f \gamma^\mu (g_V^f - g_A^f \gamma^5) u_f \quad (7.4.3)$$

⁹⁶Il ne s'agit pas ici d'une question de renormalisation comme en QED.

⁹⁷Cette contribution s'ajoute à celle du courant e.m. (voir 7.3.7).

⁹⁸Pour une démonstration, voir ex. K. Gottfried and V.F. Weisskopf. Concepts of Particle Physics, vol. II, chap. VI, Ed. Oxford Univ. Press

⁹⁹Dans les chapitres précédents, on a posé $g_\gamma = e$ et $g_{W^\pm} = g$; d'autres définitions peuvent se rencontrer dans la littérature, qui en diffèrent par des facteurs constants.

¹⁰⁰Les relations 7.4.1 et 7.4.2 sont valables au premier ordre du calcul ; diverses corrections radiatives interviennent, qui dépendent du schéma de renormalisation adopté ; c'est pourquoi la valeur de $\sin^2 \theta_W$ dépend de l'énergie.

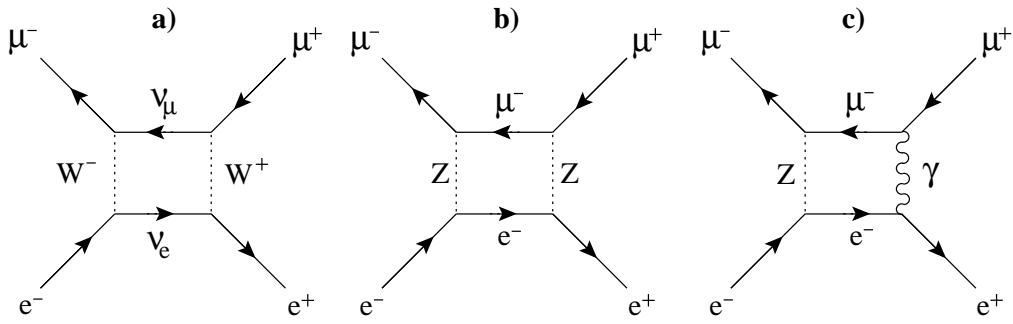


FIG. 7.4.1 – **a,b,c**) : Diagrammes du second ordre (box diagrams) contribuant à l'annihilation $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$.

où : g_V et g_A sont des coefficients dépendant du fermion concerné par le couplage (voir tableau 7.4.1). L'examen du tableau 7.4.1 et de la relation 7.4.3 suscite

	fermions	g_V	g_A
<i>leptons</i>	$\nu_e \quad \nu_\mu \quad \nu_\tau$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
	$e^- \quad \mu^- \quad \tau^-$	$-\frac{1}{2} + 2 \sin^2 \theta_W$	$-\frac{1}{2}$
<i>quarks</i>	U : $u \quad c \quad t$	$\frac{1}{2} - \frac{4}{3} \sin^2 \theta_W$	$\frac{1}{2}$
	D : $d \quad s \quad b$	$-\frac{1}{2} + \frac{2}{3} \sin^2 \theta_W$	$-\frac{1}{2}$

TAB. 7.4.1 – Coefficients des parties vectorielle (g_V) et axiale (g_A) du courant faible neutre, pour les différents leptons et quarks (U = quarks up, D = quarks down, les différences de masses étant ignorées).

quelques remarques :

- la partie axiale du courant neutre est identique à celle du courant chargé (universalité du couplage axial) ;
- la partie vectorielle du courant neutre change en fonction de la catégorie de leptons et quarks, contrairement à celle du courant chargé. Ceci vient de la connexion

entre courant faible neutre et courant e.m. ; et plus particulièrement du fait que le courant neutre (comme le courant e.m.) est susceptible de donner un couplage avec les deux états d'hélicité du fermion, alors que le courant chargé ne donne un couplage qu'avec l'état d'hélicité gaucher du fermion (droitier de l'antifermion) ;

- pour les neutrinos, fermions purement gauchers, $g_V \equiv g_A$ et le courant neutre prend la structure $\mathbf{V} - \mathbf{A}$ du courant chargé ; on retrouverait cette même structure si $\sin \theta_W \rightarrow 0$, le boson Z se comporterait comme une composante neutre de boson W .

L'application de la théorie de Cabibbo aux courants neutres conduit à une prédiction intéressante concernant les processus où il y a un changement d'étrangeté du quark impliqué par le couplage au Z . En effet, les courants aux vertex $d'Zd'$ et $s'Zs'$ sont de la forme¹⁰¹ :

$$\begin{aligned} j^0(\bar{d}'d') &\approx (\bar{d} \cos \theta_c + \bar{s} \sin \theta_c)(d \cos \theta_c + s \sin \theta_c) = & (7.4.4) \\ &= \bar{d}d \cos^2 \theta_c + \bar{s}s \sin^2 \theta_c + (\bar{d}s + \bar{s}d) \sin \theta_c \cos \theta_c \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} j^0(\bar{s}'s') &\approx (\bar{s} \cos \theta_c - \bar{d} \sin \theta_c)(s \cos \theta_c - d \sin \theta_c) = & (7.4.5) \\ &= \bar{s}s \cos^2 \theta_c + \bar{d}d \sin^2 \theta_c - (\bar{d}s + \bar{s}d) \sin \theta_c \cos \theta_c \end{aligned}$$

Ils sont tous deux susceptibles d'engendrer un changement d'étrangeté, et il est logique d'en faire la somme. On constate alors que dans la somme, les termes en $\bar{s}d$ et $\bar{d}s$ disparaissent. Les courants faibles neutres conservent l'étrangeté (et la saveur en général), contrairement aux courants faibles chargés. Cette prédiction est vérifiée expérimentalement ; on en donne des illustrations avec les diagrammes représentés à la figure 7.4.2. La voie de désintégration $K^\pm \rightarrow \pi^\pm \nu \bar{\nu}$ a un rapport d'embranchement mesuré $1.6 \cdot 10^{-10}$. Notons que ce processus ne peut pas être interprété par un diagramme du 2^{ème} ordre. Pour la voie de désintégration $K^0 \rightarrow \mu^+ \mu^-$, le rapport d'embranchement mesuré est $< 3.2 \cdot 10^{-7}$. On peut construire un diagramme du 2^{ème} ordre dans ce cas, et nous y reviendrons au § 7.5.

Q. : les voies de désintégration $K^\pm \rightarrow \pi^0 \ell^\pm \nu(\bar{\nu})$ où $\ell^\pm = e^\pm, \mu^\pm$ sont permises ; en dessiner les diagrammes représentatifs.

Les courants neutres sont impliqués dans une variété de processus ; on a déjà mentionné les diffusions élastique et inélastique de neutrinos sur les électrons des couches atomiques ou sur les noyaux. Nous revenons ici sur les processus d'annihilation e^+e^- :

$$\begin{aligned} e^+e^- &\rightarrow \bar{\ell}(\ell) & \text{où} & \quad \bar{\ell}(\ell) = \bar{\nu}_e(\nu_e), e^+(e^-), \bar{\nu}_\mu(\nu_\mu), \mu^+(\mu^-) \dots \\ &\rightarrow \bar{q}(q) & \text{où} & \quad \bar{q}(q) = \bar{u}(u), \bar{d}'(d'), \bar{c}(c), \bar{s}'(s'), \dots \end{aligned}$$

¹⁰¹On a laissé de côté les facteurs intermédiaires γ^μ, \dots pour la clarté de l'écriture.

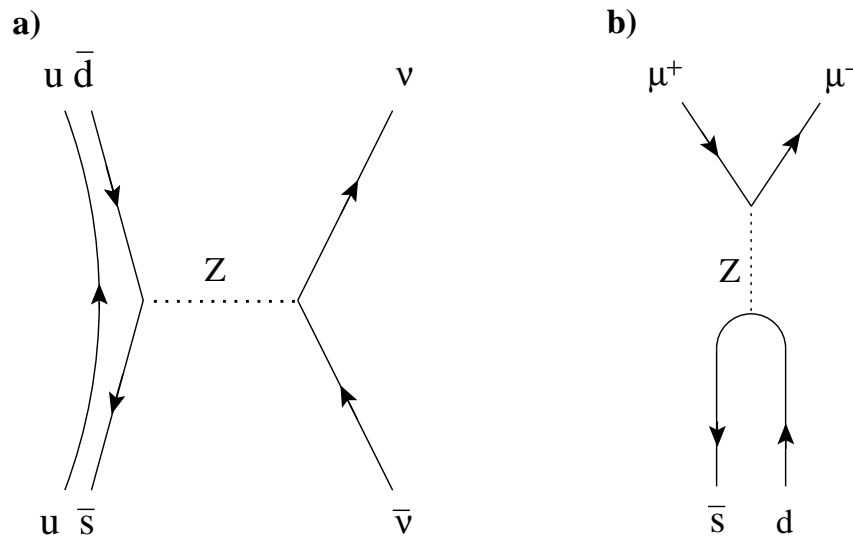


FIG. 7.4.2 – Diagrammes du 1^{er} ordre des processus de désintégration : **a)** $K^+ \rightarrow \pi^+ \nu \bar{\nu}$; **b)** $K^0 \rightarrow \mu^+ \mu^-$.

Ces processus sont représentés par le diagramme du premier ordre de la figure 7.4.3.

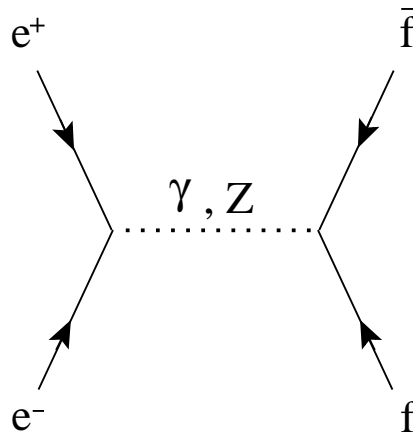


FIG. 7.4.3 – Diagramme dominant de l'annihilation $e^+ e^- \rightarrow \bar{f} f$, où $\bar{f}(f) = \bar{\ell}(\ell)$ ou $\bar{q}(q)$.

Aux basses énergies ($E_{\text{c.m.}} \ll M_Z$), le mécanisme est régi essentiellement par

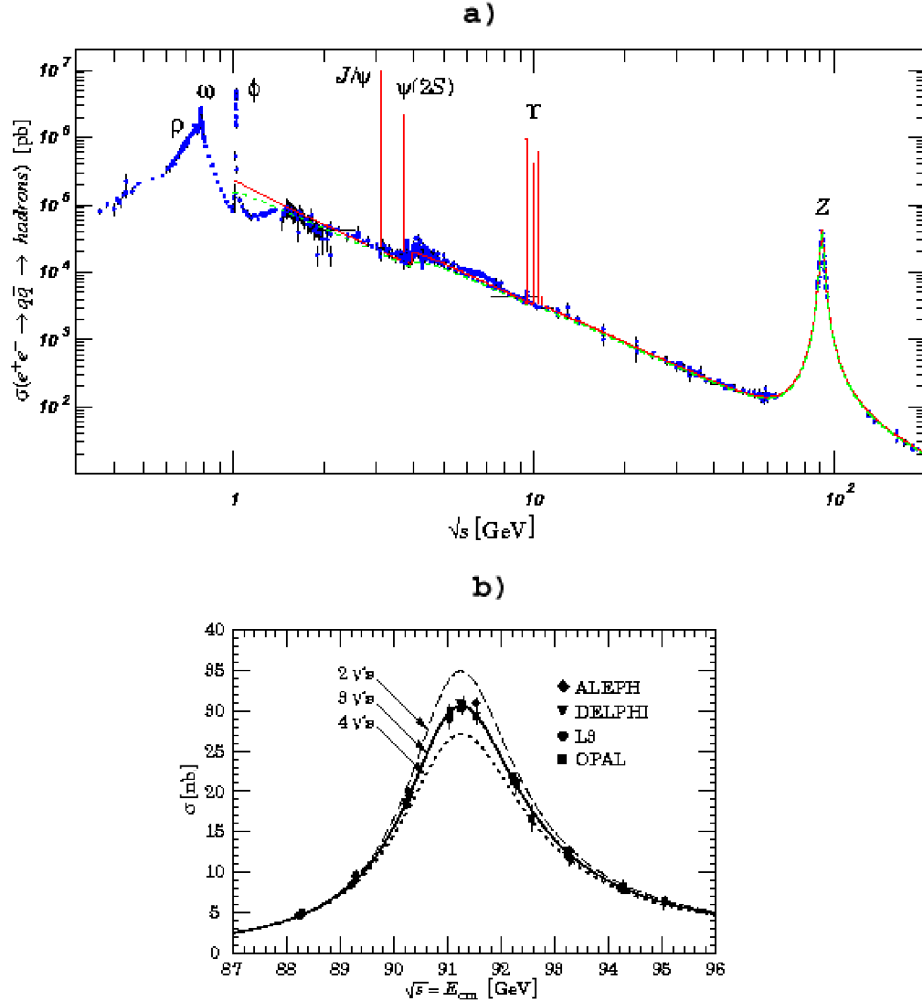


FIG. 7.4.4 – Section efficace d'annihilation $e^+e^- \rightarrow \bar{q}q \rightarrow \text{hadrons}$ en fonction de l'énergie totale dans le c.m. (\sqrt{s}); **a)** formation de résonances; **b)** valeurs expérimentales dans la région du Z ; les courbes représentent l'ajustement d'une Breit-Wigner pour différentes valeurs du paramètre N_ν .

l'échange du γ . Quand on s'élève dans l'échelle des énergies, la contribution du Z prend de l'importance. L'interférence entre les deux échanges devient visible, et c'est par ce moyen qu'on a pu faire une première évaluation de la masse du Z avant de disposer de l'énergie dans le c.m. correspondant au seuil de production. A l'approche de M_Z , la section efficace jusqu'alors décroissante augmente brusquement, puis lorsqu'on balaye la région du Z , elle évolue selon une courbe à la Breit-Wigner, typique de la manifestation d'un phénomène de résonance. Cette description qualitative est illustrée dans les graphiques de la figure 7.4.4. Ils re-

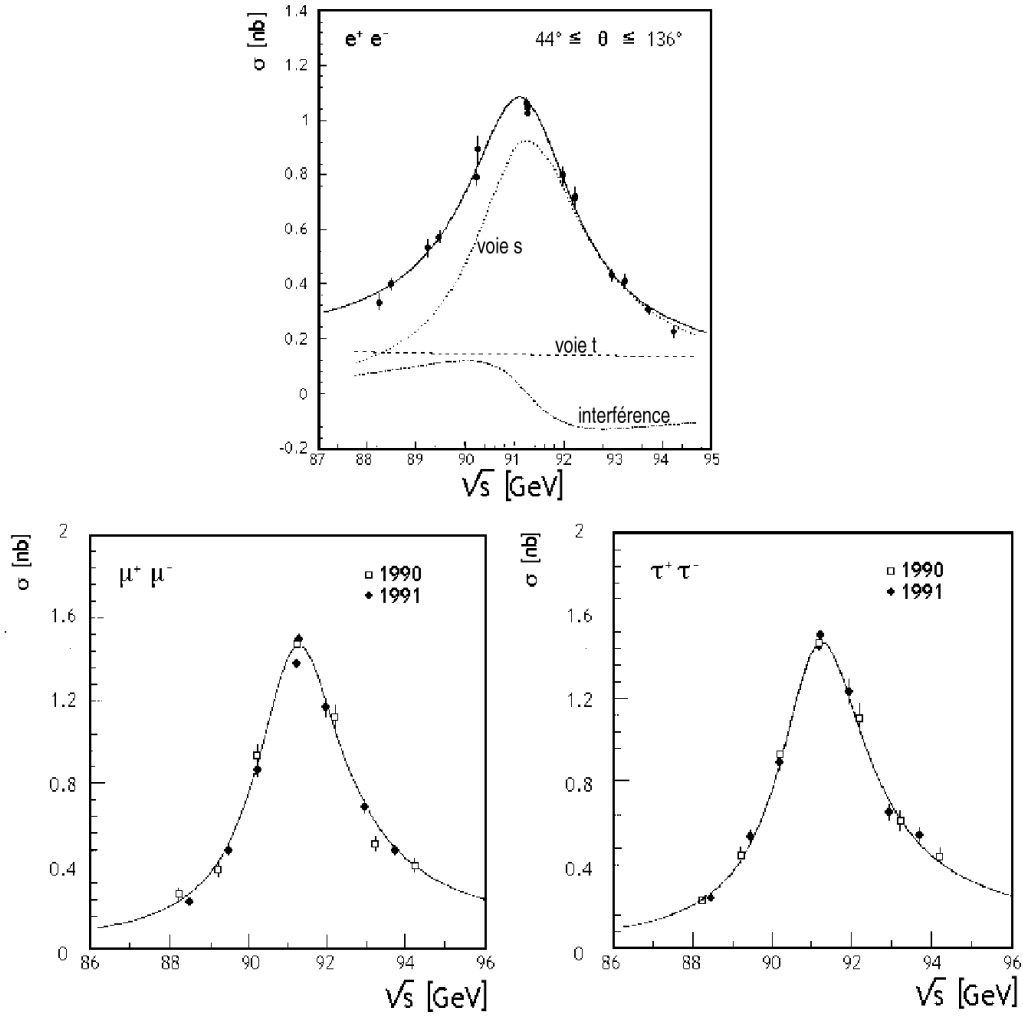


FIG. 7.4.5 – Sections efficaces d’annihilation $e^+e^- \rightarrow \ell^+\ell^-$, où $\ell^\pm = e^\pm, \mu^\pm, \tau^\pm$.

présentent des données recueillies auprès de différents collisionneurs e^+e^- , entre autres au LEP (phase 1) et au SLAC (Stanford)¹⁰². Le mécanisme résonnant a son siège au vertex de production du Z (vertex primaire); en conséquence, son effet se répercute sur toutes les voies de désintégration du Z .

Dans l’approximation de Born, la section efficace intégrée de la voie $e^+e^- \rightarrow$

¹⁰²Les faisceaux du LEP et du SLAC ont été conçus justement pour permettre, dans une première phase, le balayage extrêmement précis de la région du Z ($E_{e^+} + E_{e^-} \simeq 90$ GeV).

$\bar{f}f$, dans la région de la résonance, peut être représentée par¹⁰³) :

$$\sigma(e^+e^- \rightarrow Z \rightarrow \bar{f}f) = 12\pi \frac{\Gamma_{e^+e^-}\Gamma_{\bar{f}f}}{M_Z^2} \frac{s}{(s - M_Z^2)^2 + M_Z^2\Gamma_Z^2} \quad (7.4.6)$$

où :

- $s = (E_{e^+} + E_{e^-})^2$ est le carré de l'énergie totale dans le c.m. ;
- $\Gamma_{e^+e^-}$ est la largeur caractéristique de $e^+e^- \rightarrow Z$ (égale celle de $Z \rightarrow e^+e^-$) ;
- $\Gamma_{\bar{f}f}$ est la largeur partielle de la voie $Z \rightarrow \bar{f}f$;
- Γ_Z est la largeur totale du Z .

Dans le cadre du modèle standard, on peut exprimer la largeur partielle sous la forme :

$$\Gamma_{\bar{f}f} = \frac{N_C^f G_F M_Z^2}{6\pi\sqrt{2}} (g_V^2 + g_A^2)(1 + \delta) \quad (7.4.7)$$

où :

- G_F est la constante de couplage de Fermi ;
- N_C^f est un facteur de "couleur" ($N_C = 1$ pour les leptons et $N_C = 3$ pour les quarks, voir § 6.5) ;
- g_V, g_A sont les coefficients de couplage du courant faible neutre (tableau 7.4.1) ;
- δ est un facteur de correction tenant compte de différents effets secondaires calculables (interaction e.m. entre leptons chargés, interaction forte entre quarks).

La largeur totale Γ_Z peut être développée en terme des largeurs partielles des différentes voies $\bar{f}f$ à considérer :

$$\Gamma_Z = \Gamma_{e^+e^-} + \Gamma_{\mu^+\mu^-} + \Gamma_{\tau^+\tau^-} + N_\nu \Gamma_{\bar{\nu}\nu} + \Gamma_{\text{had}} \quad (7.4.8)$$

où :

N_ν est le nombre de familles de neutrinos ; ce paramètre a été explicité intentionnellement. On pose souvent $N_\nu \Gamma_{\bar{\nu}\nu} = \Gamma_{\text{inv}}$, les neutrinos n'ayant pas été observés directement.

$$\begin{aligned} \Gamma_{\text{had}} &= \Gamma_{\bar{u}u} + \Gamma_{\bar{c}c} + \Gamma_{\bar{d}d} + \Gamma_{\bar{s}s} + \Gamma_{\bar{b}b} \\ &\equiv 2\Gamma_{\bar{U}U} + 3\Gamma_{\bar{D}D} \end{aligned} \quad (7.4.9)$$

est la largeur partielle de l'ensemble des voies hadroniques accessibles (la notation U, D est définie dans le tableau 7.4.1).

¹⁰³La section efficace est exprimée en GeV^{-2} parce qu'on a posé $\hbar c = 1$; si on veut la valeur en nbarn par exemple, il faut introduire un facteur $(\hbar c)^2 = 0.389... \text{TeV}^2 \cdot \text{nbarn}$.

Les différentes sections efficaces mesurées ont été utilisées pour en extraire les propriétés du boson Z , en particulier sa masse, sa largeur totale et ses largeurs partielles leptonique et hadronique. La méthode d'analyse consiste à faire un ajustement de l'expression 7.4.6 aux données expérimentales recueillies sur les voies observables. Les résultats sont consignés dans la table PDG; nous nous bornons ici à mentionner quelques uns d'entre eux :

- $M_Z = 91.1876 \pm 0.0021$ GeV, la valeur centrale de la masse ;
- $\Gamma_Z = 2.4952 \pm 0.0023$ GeV, la largeur totale ; cette valeur est tirée de l'analyse des voies hadroniques, qui sont les plus abondantes (70%) ;
- $\Gamma_{\ell^+\ell^-} = 0.08398 \pm 0.00009$ GeV, la largeur partielle de la voie leptonique $\ell^+\ell^-$; en fait les trois voies leptoniques e^\pm , μ^\pm , τ^\pm (voir figure 7.4.5) ont fait l'objet de mesures séparées et les résultats trouvés concordants (test de l'universalité du couplage) ;
- $\Gamma_{\text{had}} = 1.744 \pm 0.002$ GeV, la largeur partielle de l'ensemble des voies hadroniques ;
- $\Gamma_{\text{inv}} = 0.499 \pm 0.0015$ GeV, la largeur de l'ensemble des voies neutrinos (non observées) ; on a pu tirer le nombre de familles de neutrinos, sachant que $\Gamma_{\bar{\nu}\nu}/\Gamma_{\ell^+\ell^-} = 1.99$ (prédiction du modèle standard) ; le résultat obtenu (voir fig. 7.4.4 **b**) est¹⁰⁴ $N_\nu = 2.984 \pm 0.008$.

7.5 Le mécanisme de GIM ; prédiction du quark charmé.

On a vu que les interactions à courants neutres ne contribuent pas au changement de l'étrangeté (et de la saveur en général) dans les processus faibles. Par ailleurs, il existe de tels processus avec changement d'étrangeté, dont le mécanisme peut s'interpréter à l'aide d'un diagramme du second ordre. La figure 7.5.1 on montre deux exemples, un processus semileptonique avec $\Delta S = 1$ et un processus purement hadronique avec $\Delta S = 2$. Ces deux processus ont été analysés en détail, et il s'avère que le taux de transition mesuré est dans les deux cas au moins 10^4 fois plus faible que le taux calculé à l'aide du diagramme, ce qui laisse supposer l'intervention d'un mécanisme de rétention tout particulièrement efficace. Un tel mécanisme a été imaginé par **G**lashow, **I**liopoulos et **M**aiani (GIM) en 1970¹⁰⁵. Ils ont postulé l'existence d'un partenaire (le quark c) au quark s , les deux familles de quarks ($\begin{smallmatrix} u \\ d \end{smallmatrix}$) et ($\begin{smallmatrix} c \\ s \end{smallmatrix}$) formant un ensemble parallèle aux deux familles de leptons ($\begin{smallmatrix} \nu_e \\ e \end{smallmatrix}$) et ($\begin{smallmatrix} \nu_\mu \\ \mu \end{smallmatrix}$) alors connues. Les auteurs ont admis de surcroît¹⁰⁶ que ce nouveau quark

¹⁰⁴Ce résultat a été confirmé par la mesure directe de la voie $e^+e^- \rightarrow \bar{\nu}\nu\gamma$, où γ est un photon de rayonnement émis par l'une des particules des faisceaux.

¹⁰⁵S.L. Glashow, J. Iliopoulos, L. Maiani Phys. Rev. D2 (1970) 1285

¹⁰⁶Ces hypothèses rendaient plausible le fait qu'aucune manifestation de ce quark n'avait encore été signalée.

est très lourd par rapport aux trois autres, et qu'il porte une saveur nouvelle (le "Charm") qui est conservée dans les interactions forte et électromagnétique et susceptible d'être violée dans l'interaction faible. Ils ont ensuite pris en compte la théorie de Cabibbo et les faits établis concernant les courants neutres. Ils ont introduits les couplages de courants chargés uWd' et cWs' , les couplages croisés entre familles étant proscrits, par analogie avec la situation chez les leptons.

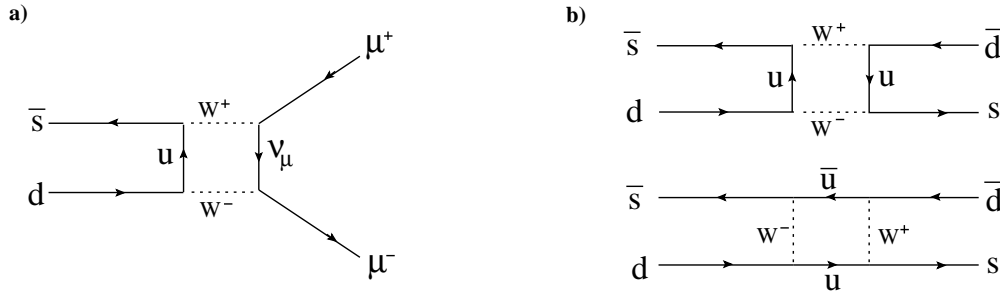


FIG. 7.5.1 – a) Diagramme de la désintégration $K^0 \rightarrow \mu^+\mu^-$; b) diagrammes de l'oscillation $K^0 \leftrightarrow \bar{K}^0$.

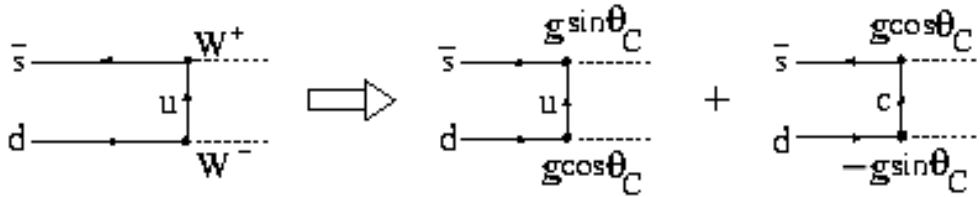


FIG. 7.5.2 – Echanges de quarks u et c ; couplages aux vertex uWd , $uW\bar{s}$, cWd et $cW\bar{s}$.

Si l'on revient aux diagrammes de la figure 7.5.1, on voit qu'il faut joindre à l'échange du quark u celui du quark c , comme représenté dans la figure 7.5.2. En tenant compte des couplages aux vertex, on est conduit à une amplitude de la forme :

$$\langle \mu^+\mu^- | \mathcal{M} | K^0 \rangle \approx g^4 \sin \theta_c \cos \theta_c [f(m_u, M_W, \dots) - f(m_c, M_W, \dots)] \quad (7.5.1)$$

où les $f(\dots)$ sont des facteurs cinématiques calculables contenant entre autres les propagateurs des quarks u et c et celui du boson W .

L'effet du mécanisme de GIM apparaît dans la différence des deux termes entre le crochet de 7.5.1 ; à la limite, si les quarks u et c avaient la même masse, l'amplitude prédite serait nulle.

Pour l'oscillation $K^0 \longleftrightarrow \overline{K}^0$ le calcul est plus compliqué que ci-dessus, parce qu'on a quatre vertex impliquant un quark ; le mécanisme de GIM est donc opérant à l'entrée et à la sortie du diagramme et l'amplitude prédite s'en trouve à fortiori extrêmement atténuée.

Les prédictions du modèle de GIM ont trouvé une brillante confirmation en 1974¹⁰⁷ avec la découverte du méson J/ψ (système $\bar{c}c$) et par la suite avec l'exploration de la physique des hadrons charmés.

7.6 Extension à la troisième famille de fermions. Le modèle standard.

En 1973 déjà, c'est à dire avant la découverte du méson J/ψ (1974) et celle du lepton τ (1975), Kobayashi et Maskawa¹⁰⁸ ont postulé l'existence d'une troisième famille de quarks. Leur motivation a été d'aménager le modèle de Cabibbo-GIM pour y inclure la violation de CP observée dans des processus à courant faible chargé (rappel § 4.6). Ils ont montré¹⁰⁹ que cet aménagement implique l'extension du modèle au minimum à trois familles de quarks. C'est l'arrangement qu'on trouve encore dans le modèle standard actuel, avec les trois doublets :

$$\begin{pmatrix} u \\ d' \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} c \\ s' \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} t \\ b' \end{pmatrix}$$

Le mélange des états inférieurs, réalisé auparavant par la matrice unitaire 2×2 à 1 paramètre (l'angle θ_C) de Cabibbo :

$$M_C = \begin{pmatrix} \cos \theta_C & \sin \theta_C \\ -\sin \theta_C & \cos \theta_C \end{pmatrix}$$

est obtenu dès lors au moyen d'une matrice unitaire 3×3 à 4 paramètres (3 angles + 1 phase) qu'on appelle matrice de Cabibbo, Kobayashi, Maskawa, et qu'on peut

¹⁰⁷J.J. Aubert et al. Phys. Rev. Lett. 33 (1974) 1404 et J.E. Augustin et al. Phys. Rev. Lett. 33 (1974) 1406.

¹⁰⁸M. Kobayashi, K. Maskawa Progr. Theor. Phys. 49 (1973) 652.

¹⁰⁹Il faut rendre complexe un des éléments de la matrice, via un terme de déphasage ; cette phase peut toujours être absorbée avec une matrice 2×2 , en exploitant les contraintes d'unitarité et en redéfinissant la phase d'un état de quark.

écrire sous la forme¹¹⁰ :

$$M_{CKM} = \begin{pmatrix} c_{12} c_{13} & s_{12} c_{13} & s_{13} e^{-i\delta_{13}} \\ -s_{12} c_{23} - c_{12} s_{23} s_{13} e^{i\delta_{13}} & c_{12} c_{23} - s_{12} s_{23} s_{13} e^{i\delta_{13}} & s_{23} c_{13} \\ s_{12} s_{23} - c_{12} c_{23} s_{13} e^{i\delta_{13}} & -c_{12} s_{23} - s_{12} c_{23} s_{13} e^{i\delta_{13}} & c_{23} c_{13} \end{pmatrix} \quad (7.6.1)$$

avec :

$$c_{ij} = \cos \theta_{ij}; \quad s_{ij} = \sin \theta_{ij}; \quad 0 \leq \theta_{ij} \leq \frac{\pi}{2}$$

$$i, j = 1, 2, 3 : \text{index des familles (génération)}$$

$$\delta_{13} = \text{déphasage}, \quad 0 \leq \delta_{13} \leq 2\pi$$

Notons qu'à la limite θ_{13} et $\theta_{23} \rightarrow 0$, on retrouve comme sous-ensemble les éléments de la matrice de Cabibbo, en identifiant θ_{12} à θ_C .

Dans le cadre de cette extension, le courant faible chargé qui s'écrivait :

$$j_W^{+\mu} = (\bar{u} \bar{c}) \gamma^\mu (1 - \gamma^5) M_C \begin{pmatrix} d \\ s \end{pmatrix}$$

devient :

$$j_W^{+\mu} = (\bar{u} \bar{c} \bar{t}) \gamma^\mu (1 - \gamma^5) M_{CKM} \begin{pmatrix} d \\ s \\ b \end{pmatrix} \quad (7.6.2)$$

Il donne lieu à un mécanisme de GIM généralisé aux trois quarks supérieurs et aux trois quarks inférieurs. On peut commodément se rappeler les couplages impliqués dans les éléments de M_{CKM} en écrivant :

$$\begin{pmatrix} d' \\ s' \\ b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_{ud} & V_{us} & V_{ub} \\ V_{cd} & V_{cs} & V_{cb} \\ V_{td} & V_{ts} & V_{tb} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ s \\ b \end{pmatrix} \quad (7.6.3)$$

Certains éléments V_{ij} peuvent être rendus complexes par le choix du terme de déphasage $e^{\pm i\delta_{13}}$. La détermination expérimentale de ces différents éléments de matrice est une tâche considérable, à laquelle on travaille encore d'arrache-pied. La table PDG expose en détail les sources d'informations utilisées. Les éléments de la première ligne et de la troisième colonne, qui ont été déterminés directement par l'analyse de processus de désintégration, ont une forme simple car $c_{13} \simeq 1$. Des contraintes d'unitarité permettent d'améliorer la connaissance d'éléments pour

¹¹⁰C'est la forme recommandée dans la table PDG actuelle ; on trouve d'autres formes équivalentes dans la littérature, entre autres dans l'article original de Kobayashi et Maskawa.

lesquels on manque encore de mesures directes précises. La meilleure estimation actuelle situe le déphasage dans les limites $\delta_{13} = 1.02 \pm 0.22$ radian.

La table PDG donne les intervalles de confiance à 90% sur les valeurs de $|V_{ij}|$. Les ordres de grandeur à retenir sont :

$$|V_{ij}| = \begin{pmatrix} 0.975 & 0.22 & 0.003 \\ 0.22 & 0.974 & 0.04 \\ 0.01 & 0.04 & 0.999 \end{pmatrix}$$

La relation entre le facteur de phase $e^{\pm i\delta_{13}}$ et la violation de CP peut se comprendre en faisant référence au théorème CPT (§ 4.7) et aux propriétés de l'opérateur T (§. 4.5). Rappelons que l'invariance de l'hamiltonien sous CPT implique que la violation de T entraîne la violation de CP, et réciproquement. Rappelons d'autre part que l'opération T consiste dans l'échange des états initial et final, combiné à l'opération de conjugaison complexe. Si le déphasage $\delta_{13} \neq 0$, les éléments $V_{i,j}$ complexes sont modifiés sous l'opération T (et CP), ce qui se répercute sur les courants correspondants et l'amplitude de transition.

Cette approche est essentiellement phénoménologique, elle ne fournit pas de renseignement sur l'origine de la violation de CP dans des processus à courant faible chargé, origine qui reste présentement mystérieuse.

8 L'interaction forte ; modèle des quarks et éléments de chromodynamique quantique (QCD).

8.1 Introduction.

Au chapitre 4, on a anticipé les idées de base qui permettent de construire un modèle “statique” des quarks. Le but était d'expliquer la variété des spectres de hadrons connus. Avant la mise en évidence des hadrons charmés, les hadrons avaient été classés sur la base de leur spin-parité J^P en octets, nonets, décuplets (figures 1.1.1 à 1.1.4, chap.1) dans le plan $(S-I_3)$ où I_3 est la troisième composante de l'isospin, S est l'étrangeté (alternativement dans le plan $(Y - I_3)$ où Y est l'hypercharge).

On a vu qu'on peut associer la conservation de l'isospin au fait que $m_u \simeq m_d$ et au fait que les interactions $u-u$, $u-d$ et $d-d$ sont les mêmes si l'on “désactive” la composante e.m.. Dans la limite d'une parfaite symétrie d'isospin, on aurait :

$$m_{proton} = m_{neutron} \quad \text{et} \quad m_{\pi^\pm} = m_{\pi^0}$$

La symétrie d'isospin est décrite par le groupe **spécial unitaire** $SU(2)$, dont le quark u et le quark d constituent les éléments de base. On va développer ce cas dans le prochain paragraphe. L'adjonction du quark s amène à $SU(3)$ (on parle du groupe $SU(3)$ “saveur”, pour le distinguer du groupe $SU(3)$ “couleur”). Dans la généralisation $SU(N)$, où $N > 2$, on utilise le terme de **symétrie de spin unitaire**.

Dans le cadre des représentations du groupe $SU(3)$ les états liés antiquark-quark, assimilables aux mésons, forment des singulets et des octets ; les états liés de trois quarks (trois antiquarks), assimilables aux baryons, sont organisés en singulets, octets et décuplets. Les propriétés de ce groupe permettent d'expliquer la classification mentionnée ci-dessus¹¹¹.

Dans cette approche on rencontre certains problèmes, p. ex. comment incorporer le spin et le moment angulaire orbital des quarks, comment respecter la statistique de Fermi, comment tenir compte de la brisure de la symétrie ($m_s > m_{u,d...}$).

8.2 $SU(2)_{\text{isospin}}$: la symétrie d'isospin.

La représentation fondamentale d' $SU(2)$ est celle du doublet de spin $1/2$. Dans le contexte du modèle des quarks, un état pur est représenté par l'un des vecteurs de base :

$$|u\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |d\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (8.2.1)$$

¹¹¹Notons qu'une représentation peut ne pas être réellement occupée pour des raisons extérieures à $SU(3)$. Par exemple, le singulet de $SU(3)$ n'est pas occupé par les baryons de $J^P = \frac{1}{2}^+$ et $\frac{3}{2}^+$, ce qui s'explique en raison de l'antisymétrie de leur fonction d'onde totale.

d'où la syntaxe :

$$\xi = \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} \quad (8.2.2)$$

$|\xi_u|^2 =$ la probabilité que le quark soit de type u .

La rotation d'un angle θ autour de la direction $\hat{\mathbf{n}}$ dans l'espace de l'isospin est effectuée au moyen d'un opérateur unitaire U :

$$U \implies U_I(\hat{\mathbf{n}}\theta) = \exp\{-i\mathbf{I} \cdot \hat{\mathbf{n}}\theta\} \quad (8.2.3)$$

Dans le cas de l'isodoublet ($I=1/2$) :

$$U_{\frac{1}{2}}(\hat{\mathbf{n}}\theta) = \exp\{-i\frac{1}{2}\boldsymbol{\tau} \cdot \hat{\mathbf{n}}\theta\} \quad (8.2.4)$$

Les τ_i sont les “**générateurs du groupe**” (ici les matrices de Pauli ¹¹²). Si l'on applique U sur l'état ξ , on obtient l'état transformé :

$$\xi' = U\xi \quad (8.2.5)$$

P. ex., dans le cas d'une rotation autour de l'(iso)axe y , on obtient (voir A.5.3.7) :

$$\xi' = \begin{pmatrix} u' \\ d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta/2 & -\sin \theta/2 \\ \sin \theta/2 & \cos \theta/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} \quad (8.2.6)$$

A cause de l'unitarité de U , la norme est conservée :

$$(\xi')^\dagger(\xi') = \xi^\dagger U^\dagger U \xi = \xi^\dagger \xi \quad (8.2.7)$$

L'étude du groupe se fait souvent en considérant la transformation infinitésimale :

$$\xi' = \xi + \delta\xi = (1 - i\delta\theta\mathbf{I} \cdot \hat{\mathbf{n}})\xi \xrightarrow{I=\frac{1}{2}} (1 - i\frac{1}{2}\boldsymbol{\tau} \cdot \hat{\mathbf{n}}\delta\theta)\xi \quad (8.2.8)$$

L'unitarité impose que les générateurs soient de trace nulle. C'est bien le cas des matrices de Pauli :

$$\text{Trace}(\tau_i) = 0$$

De plus les rotations et donc les générateurs ne commutent pas, ce qui s'exprime par :

$$[I_i, I_j] = i\varepsilon_{ijk}I_k \quad \text{où} \quad \varepsilon_{123,231,312} = 1 \quad \text{et} \quad \varepsilon_{213,132,321} = -1 \quad (8.2.9)$$

C'est ce qu'on appelle usuellement l'algèbre d'SU(2). Par exemple :

$$\left[\frac{1}{2}\tau_i, \frac{1}{2}\tau_j \right] = i\varepsilon_{ijk}\frac{1}{2}\tau_k \quad (8.2.10)$$

¹¹²Dans le cas de l'isospin, on les désigne généralement par les lettres $\boldsymbol{\tau}$, τ_i .

Les opérateurs I^2 et I_z permettent de classer un état à l'aide de leurs valeurs propres. Les I_{\pm} permettent de transiter entre les états de même I^2 .

Pour notre exemple avec :

$$\tau_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (8.2.11)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2}\tau_3\right)u &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}u \\ \left(\frac{1}{2}\tau_3\right)d &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}d \end{aligned}$$

$$\tau_{\pm} = \frac{1}{2}(\tau_1 \pm i\tau_2) \quad \text{d'où} \quad \tau_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (8.2.12)$$

Appliquons aux vecteurs de base :

$$\tau_+u = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0, \quad \tau_-u = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = d$$

$$\tau_+d = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = u, \quad \tau_-d = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

Un opérateur de Casimir est celui qui commute avec tout générateur du groupe. On peut vérifier que dans $SU(2)$ l'opérateur I^2 commute avec I_1 , I_2 et I_3 :

$$[I^2, I_j] = 0 \quad I_j = 1, 2, 3 \quad (8.2.13)$$

Donc on peut construire des états propres de I^2 et d'un I_j à choix (choix standard : I_3) :

$$I^2|I, I_3\rangle = I(I+1)|I, I_3\rangle \quad (8.2.14)$$

$$I_3|I, I_3\rangle = I_3|I, I_3\rangle$$

Dans $SU(2)$, l'opérateur de Casimir I^2 vaut :

$$C \equiv I^2 = \frac{1}{2}(I_+I_- + I_-I_+) + I_3^2 = \frac{1}{2}\{I_+, I_-\} + I_3^2 \quad (8.2.15)$$

Pour une représentation donnée I , les valeurs propres de I^2 sont $I(I+1)$. Par exemple, on a $I^2 = 0$ pour $I = 0$, $1/2(1/2+1)$ pour $I = 1/2$, etc.

8.3 Représentations $\mathbf{2}$ et $\bar{\mathbf{2}}$.

L'isodoublet $I = 1/2$, avec ses projections $I_3 = \pm 1/2$, permet de représenter les quarks u et d . On définit la **représentation $\mathbf{2}$** par :

$$\mathbf{2} \equiv \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} \quad (8.3.1)$$

Pour la paire d'antiquarks, il est intéressant de définir la **représentation conjuguée $\bar{\mathbf{2}}$** par¹¹³ :

$$\bar{\mathbf{2}} \equiv \begin{pmatrix} \bar{d} \\ -\bar{u} \end{pmatrix} \quad (8.3.2)$$

Effectivement, on peut montrer (à faire comme exercice) que le doublet :

$$\phi = \begin{pmatrix} \bar{d} \\ -\bar{u} \end{pmatrix} \quad (8.3.3)$$

se transforme, par rotation dans l'espace de l'isospin, comme le doublet des quarks $\xi = \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}$:

$$\phi' = U\phi \quad (8.3.4)$$

C'est une situation particulière au groupe $SU(2)$. Elle ne se retrouve pas avec les groupes $SU(N)$ où $N > 2$.

8.4 La brisure de $SU(2)_{\text{isospin}}$.

On a vu au chapitre 4 que si l'on fait subir à un système physique une transformation unitaire U (dans le cas présent une rotation dans l'espace d'isospin) et si le système transformé ne peut pas se distinguer du système initial, alors :

$$[H, U] = 0 \quad (8.4.1)$$

et réciproquement. Cela conduit à une loi de conservation associée à U . Pour l'isospin,

$$[H, \mathbf{I}] = 0 \quad (8.4.2)$$

implique la conservation de l'isospin. Inversement on peut imprimer une rotation au système dans l'espace de l'isospin sans que les propriétés énergétiques de ce système soient affectées.

¹¹³L'opération conjugaison de charge introduit un facteur de phase arbitraire. Nous avons adopté la convention de Condon-Shortley. Dans la littérature, on trouve aussi la convention opposée $\bar{\mathbf{2}} \equiv \begin{pmatrix} -\bar{d} \\ \bar{u} \end{pmatrix}$.

Par exemple imaginons un quark **isolé** (sic) et au repos :

$$\langle q|H_0|q\rangle = m_q = \text{masse du quark } q \quad (8.4.3)$$

Si l'on fait une rotation d'angle $\delta\theta$ dans l'espace d'isospin on obtient l'état transformé q' :

$$|q'\rangle = U|q\rangle \approx (1 - i\mathbf{I} \cdot \hat{\mathbf{n}}\delta\theta)|q\rangle \quad (8.4.4)$$

Mais :

$$\langle q'|H|q'\rangle \approx \langle q|(1 + i\mathbf{I} \cdot \hat{\mathbf{n}}\delta\theta)H(1 - i\mathbf{I} \cdot \hat{\mathbf{n}}\delta\theta)|q\rangle \quad \text{or :}$$

$$(1 + x)H(1 - x) = H + xH - Hx + O(x^2) \quad \text{ce qui donne :}$$

$$\langle q'|H|q'\rangle = \langle q|H|q\rangle + \langle q|[H, \mathbf{I}]|q\rangle + O(\delta\theta^2) \quad (8.4.5)$$

Donc, si $[H_0, \mathbf{I}] = 0$, on déduit que :

$$\langle q'|H_0|q'\rangle = m_{q'} = \langle q|H_0|q\rangle = m_q \quad (8.4.6)$$

Considérons de même un système de quark $\{q\}$ en interaction dans l'état d'isospin $|I, I_3\rangle$. Si l'Hamiltonien qui décrit ce système commute avec I , on obtient la même énergie pour tous les membres du multiplet d'isospin $|I, -I\rangle, |I, -I + 1\rangle, \dots, |I, +I\rangle$:

$$\langle I, -I|H|I, -I\rangle = \langle I, -I + 1|H|I, -I + 1\rangle = \dots = \langle I, +I|H|I, +I\rangle \quad (8.4.7)$$

Si le système est au repos dans le laboratoire, $H = H_0$ donne la "masse" du système $\{q\}$ et tous les membres du multiplet ont la même masse :

$$m_I(I_3 = -I) = m_I(I_3 = -I + 1) = \dots = m_I(I_3 = +I)$$

Par exemple pour les états de charge du pion on prédit que :

$$m(\pi^+) = m(\pi^0) = m(\pi^-), \quad \text{si la symétrie d'isospin est parfaite.}$$

Donnons un contre-exemple. Considérons l'opérateur de charge électrique Q tel que :

$$Q|\text{ensembles de particules}\rangle = \left(\sum_{\text{ensemble}} \text{charges} \right) |\text{ensemble de particules}\rangle \quad (8.4.8)$$

En général :

$$[Q, \mathbf{I}] \neq 0 \quad (8.4.9)$$

et les membres d'un même multiplet d'isospin ont des charges différentes¹¹⁴ :

$$Q|\pi^+\rangle = +1|\pi^+\rangle \quad Q|\pi^-\rangle = -1|\pi^-\rangle \quad Q|\pi^0\rangle = 0|\pi^0\rangle$$

D'une façon générale, si un terme de l'Hamiltonien contient la charge électrique, cet Hamiltonien a peu de chance d'être invariant sous les transformations dans l'espace d'isospin. C'est le cas du terme qui exprime l'interaction e.m. : $H_{em} \propto Q_1 Q_2$.

Donc, si :

$$H_{int} = H_{IF} + H_{em} \quad (8.4.10)$$

décrit le système $\{q\}$ en interaction, on a :

$$[H_{int}, \mathbf{I}] = \underbrace{[H_{IF}, \mathbf{I}]}_0 + \underbrace{[H_{em}, \mathbf{I}]}_{\neq 0} \quad (8.4.11)$$

et l'isospin est une symétrie "brisée" par l'interaction e.m. Par exemple la masse des deux pions chargés diffère de quelque % de la masse du pion neutre.

On peut chercher à quantifier cette brisure de symétrie. Pour donner une idée de ce qui peut se passer dans $\{q\}$, considérons les différences de masse dans les systèmes du pion et du kaon.

Pour le système du pion :

$$\delta_\pi = m_{\pi^+} - m_{\pi^0} = 4.6 \text{ MeV} \quad (8.4.12)$$

Cette différence peut être due à différentes contributions :

- a) $\delta_{ud} = m_d - m_u$;
- b) l'interaction électrostatique proportionnelle à $Q_1 Q_2 / \langle R \rangle$, où Q_1 et Q_2 sont les charges des deux quarks, à distance moyenne $\langle R \rangle$;
- c) l'interaction "magnétique" proportionnelle à $\mu_1, \mu_2 \propto \frac{Q_1 Q_2}{m_1 m_2}$ où les μ_i sont les moments magnétiques et m_i les masses des quarks.

Dans le cas de pions, la contribution a) est nulle, car on considère qu'en moyenne au cours du temps le contenu en quark u et d est identique pour π^\pm et π^0 . On peut englober la contribution c) dans b), qui devient un terme "effectif" pour les contributions $\propto Q_1 Q_2$.

Les fonctions d'onde des pions sont (voir plus loin) :

$$\pi^+ \equiv \bar{d}u \quad \text{et} \quad \pi^0 \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(\bar{u}u - \bar{d}d) \quad (8.4.13)$$

¹¹⁴Les valeurs propres de Q sont exprimées en unité de la charge du positron.

Calculons l'espérance mathématique de $Q_1 Q_2$:

$$\langle \pi^+ | Q_1 Q_2 | \pi^+ \rangle = \langle \bar{d}u | Q_1 Q_2 | \bar{d}u \rangle = +\frac{2}{3} \frac{1}{3} \langle \bar{d}u | \bar{d}u \rangle = \frac{2}{9} \quad (8.4.14)$$

$$\langle \pi^0 | Q_1 Q_2 | \pi^0 \rangle = \frac{1}{2} \langle \bar{u}u - \bar{d}d | Q_1 Q_2 | \bar{u}u - \bar{d}d \rangle = \quad (8.4.15)$$

$$\frac{1}{2} (\langle \bar{u}u | Q_1 Q_2 | \bar{u}u \rangle + \langle \bar{d}d | Q_1 Q_2 | \bar{d}d \rangle + 0 + 0) = \frac{1}{2} \left(-\frac{4}{9} - \frac{1}{9} \right) = -\frac{5}{18}$$

Rappelons que les états $|\bar{u}u\rangle$ et $|\bar{d}d\rangle$ sont orthogonaux.

La contribution b) est donnée par :

$$\begin{aligned} \pi^+ & : \quad \frac{2}{9} \langle R^{-1} \rangle_\pi, & \pi^0 & : \quad -\frac{5}{18} \langle R^{-1} \rangle_\pi \\ \delta_\pi & = \left(\frac{2}{9} + \frac{5}{18} \right) \langle R^{-1} \rangle_\pi = \frac{1}{2} \langle R^{-1} \rangle_\pi \end{aligned} \quad (8.4.16)$$

($\langle R^{-1} \rangle$ est un paramètre à déterminer expérimentalement). A l'aide de δ_π donnée par 8.4.12, on obtient : $\langle R^{-1} \rangle_\pi = 9.2 \text{ MeV}^{115}$.

Considérons maintenant le système du kaon :

$$\delta_K = m_{K^+} - m_{K^0} = -4 \text{ MeV} \quad (8.4.17)$$

Dans ce cas, on a une contribution de a), car on a un contenu différent en quarks légers :

	$K^+ : \bar{s}u$	$K^0 : \bar{s}d$
masses :	$m_u + m_s$	$m_d + m_s$
$Q_1 Q_2 =$	$\frac{2}{3} \frac{1}{3} = \frac{2}{9}$	$-\frac{1}{3} \frac{1}{3} = -\frac{1}{9}$

Donc :

$$\begin{aligned} \delta_K & = m_u + m_s - m_d - m_s + \frac{2}{9} \langle R^{-1} \rangle_K - \frac{1}{9} \langle R^{-1} \rangle_K \\ & = m_u - m_d + \frac{1}{3} \langle R^{-1} \rangle_K \end{aligned} \quad (8.4.18)$$

Si l'on admet que $\langle R^{-1} \rangle_K \approx \langle R^{-1} \rangle_\pi = 9.2 \text{ MeV}$, on obtient :

$$-4 = m_u - m_d + \frac{1}{3} 9.2 ; \quad \delta_{ud} = m_d - m_u \simeq 7 \text{ MeV} \quad (8.4.19)$$

Ce sont là des ordres de grandeurs. La même approche pour les baryons donne les estimations $\delta_{ud} = 4$ à 7 MeV et $\langle R^{-1} \rangle_{\text{effectif}} = 2$ à 3 MeV .

¹¹⁵Rappel : on a posé $\hbar c = 1$.

8.5 Représentation de dimension 3 de $SU(2)_{\text{isospin}}$.

Cette représentation concerne, par ex., l'isotriplet $I = 1$. Elle est utile pour décrire le système des pions π^+ , π^0 , π^- , représenté par la base :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (8.5.1)$$

Les générateurs sont (A5.1.21) :

$$I_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad I_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (8.5.2)$$

La représentation $I = 1$ peut se déduire de la représentation fondamentale $1/2$ en effectuant le produit direct :

$$\frac{1}{2} \otimes \frac{1}{2} = 0 \oplus 1 \quad (8.5.3)$$

Exprimé en termes de dimensions, ce produit s'écrit : $\mathbf{2} \otimes \mathbf{2} = \mathbf{1} \oplus \mathbf{3}$.

On peut montrer (exercice) que la forme des générateurs 8.5.2 est cohérente vis-à-vis de 8.5.3. En effet, si $\Psi_{0,1} = (\psi \otimes \phi)_{0,1}$ définissent les états singulet et triplet formés par le couplage des deux spineurs ψ et ϕ , alors la rotation R donne :

$$\Psi'_{0,1} = U \Psi_{0,1} \equiv (U \psi \otimes U \phi)_{0,1} = (\psi' \otimes \phi')_{0,1} \quad (8.5.4)$$

de 8.5.2 Rotations de spineurs
($\frac{1}{2} \times$ matrice de Pauli de 8.2.13)

Q. : montrer que si l'on utilise $\tilde{\psi} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -a+c \\ i(a+c) \\ b \end{pmatrix}$ à la place de $\psi = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$,

on obtient $R_\theta : \tilde{\psi} \mapsto \tilde{\psi}' = R(-\theta)\tilde{\psi}$, avec R la matrice de rotation dans \mathbb{R}^3 .

Comment construit-on les fonctions d'onde $\Psi_{0,1}$? En d'autres termes, comment arranger exactement u , d , \bar{u} et \bar{d} de façon à respecter l'algèbre de $SU(2)$? Considérons un système $\bar{q}q$ (méson), c. à d. $\bar{\mathbf{2}} \otimes \mathbf{2}$. En s'inspirant des systèmes de

spin 1/2, on a :

$$\begin{aligned}
 \text{état singulet} &\equiv \frac{1}{\sqrt{2}}|\bar{d}d + \bar{u}u\rangle = |0, 0\rangle \\
 \text{état triplet} &\equiv \begin{cases} |\bar{d}u\rangle = |1, 1\rangle \\ \frac{1}{\sqrt{2}}|\bar{d}d - \bar{u}u\rangle = |1, 0\rangle \\ |-\bar{u}d\rangle = |1, -1\rangle \end{cases}
 \end{aligned} \tag{8.5.5}$$

Q. : vérifier que les états du triplet ont la même symétrie vis à vis de l'échange $\bar{u} \leftrightarrow -\bar{d}$, $u \leftrightarrow d$.

La construction de ces états se fait en considérant un état "extrême" ($|I_3| = I$) et en appliquant les opérateurs I_{\pm} (sous l'annexe E, voir E.1.11) :

$$I_-|I, I_3\rangle = \sqrt{I(I+1) - I_3(I_3-1)} |I, I_3-1\rangle \tag{8.5.6}$$

$$I_+|I, I_3\rangle = \sqrt{I(I+1) - I_3(I_3+1)} |I, I_3+1\rangle$$

Avec les définitions du doublet ($\begin{smallmatrix} u \\ d \end{smallmatrix}$) (8.2.1) et de l'antidoublet ($\begin{smallmatrix} \bar{d} \\ -\bar{u} \end{smallmatrix}$) (8.3.3) on a

$$\left. \begin{aligned}
 I_+|d\rangle &= \left[\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\right]^{\frac{1}{2}}|u\rangle = |u\rangle \\
 I_+|\bar{u}\rangle &= -I_+|-\bar{u}\rangle = -1|\bar{d}\rangle = |-\bar{d}\rangle \\
 I_+|u\rangle &= I_+|\bar{d}\rangle = 0
 \end{aligned} \right\} \tag{8.5.7}$$

Des relations analogues peuvent s'écrire pour I_- .

A partir de $|-\bar{u}d\rangle$, on peut construire l'ensemble du triplet par application de I_+ , en tenant compte des relations :

$$\left. \begin{aligned}
 I_+|1, -1\rangle &= \sqrt{2}|1, 0\rangle \\
 I_+|1, 0\rangle &= \sqrt{2}|1, 1\rangle \\
 I_+|1, 1\rangle &= 0
 \end{aligned} \right\} \tag{8.5.8}$$

Idem, pour l'état singulet :

$$I_+|0, 0\rangle = 0 \tag{8.5.9}$$

I	I_3	Q		J^P	Candidat
1	1	1	$\bar{d}u$	0^-	π^+
1	0	0	$\frac{1}{\sqrt{2}}(\bar{d}d - \bar{u}u)$	0^-	π^0
1	-1	-1	$-\bar{u}d$	0^-	π^-
0	0	0	$\frac{1}{\sqrt{2}}(\bar{d}d + \bar{u}u)$	0^-	η

TAB. 8.5.1 – Représentations d' $SU(2)_{\text{isospin}}$ et associations possibles aux mésons pseudoscalaires non étranges connus.

Le tableau 8.5.1 donne les représentations d' $SU(2)_{\text{isospin}}$, leurs nombres quantiques et leurs associations possibles aux mésons pseudoscalaires non étranges connus.

Q. : discuter les associations proposées dans le tableau 8.5.1.

On peut construire également les fonctions d'onde de deux quarks (qq) en appliquant le schéma : $\mathbf{2} \otimes \mathbf{2} = \mathbf{3} \oplus \mathbf{1}$. On obtient un état antisymétrique et 3 états symétriques du point de vue de la saveur :

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (ud - du) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\sqrt{2}} (ud + du) \\ dd \end{array} \right. \quad (8.5.10)$$

Ils ne correspondent à aucun état lié connu ($Q = 4/3, 1/3, -2/3$!).

8.6 $SU(3)$: la symétrie unitaire.

L'extension de la symétrie d'isospin $SU(2)$ à la symétrie unitaire $SU(3)$ est liée à l'introduction dans le modèle des quarks d'un troisième quark s porteur

d'étrangeté S^{116} . En bref :

$$\begin{aligned} \text{doublet} \quad \xi &= \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} & \iff & \text{isospin } I \\ \\ \text{triplet} \quad \varphi &= \begin{pmatrix} u \\ d \\ s \end{pmatrix} & \iff & \text{isospin } I + \text{étrangeté } S \end{aligned}$$

Un état pur est dès lors représenté par l'un des vecteurs de base¹¹⁷ :

$$|u\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |d\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |s\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Lors d'une rotation dans l'espace combiné isospin-étrangeté (symétrie unitaire), l'état ϕ se transforme comme :

$$\phi' = U\phi \tag{8.6.1}$$

$U \in \text{SU}(3)$ est une matrice 3×3 unitaire de $\det=1$, que l'on peut écrire :

$$U = \exp\left(-\theta \hat{\mathbf{n}} \cdot \frac{\boldsymbol{\lambda}}{2}\right) \equiv \exp(-\theta \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{F}) \quad \text{avec} \quad \dim \hat{\mathbf{n}} = 8 \tag{8.6.2}$$

Dans $\text{SU}(2)$ on avait trois générateurs représentés par les matrices de Pauli. Dans $\text{SU}(3)$ on a huit générateurs représentés par (matrices de Gell-Mann) :

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & . \\ 1 & 0 & . \\ . & . & . \end{pmatrix}, \quad \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & . \\ i & 0 & . \\ . & . & . \end{pmatrix}, \quad \lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & . \\ 0 & -1 & . \\ . & . & . \end{pmatrix} \\ \\ \lambda_4 &= \begin{pmatrix} 0 & . & 1 \\ . & . & . \\ 1 & . & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & . & -i \\ . & . & . \\ i & . & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_6 = \begin{pmatrix} . & . & . \\ . & 0 & 1 \\ . & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \\ \lambda_7 &= \begin{pmatrix} . & . & . \\ . & 0 & -i \\ . & i & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{8.6.3}$$

$$\text{que l'on complète avec } \lambda_0 = \frac{2}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

¹¹⁶ nombre quantique additif noté Str. dans la relation (4.10.7)

¹¹⁷ à ne pas confondre avec les états de base de la représentation de dimension 3 d' $\text{SU}(2)$.

Les points représentent des zéros ; ils ont pour objet de souligner la présence des sous-groupes SU(2) dans SU(3). En particulier, si on laisse de côté la composante étrange s de l'état ϕ , λ_1 , λ_2 , λ_3 représentent la partie "isospin" du groupe :

$$F_1 = \frac{\lambda_1}{2} \equiv I_1 \quad , \quad F_2 = \frac{\lambda_2}{2} \equiv I_2 \quad , \quad F_3 = \frac{\lambda_3}{2} \equiv I_3 \quad (8.6.4)$$

Donc les opérateurs d'échelle :

$$I_{\pm} = F_1 \pm iF_2 \quad (8.6.5)$$

permettent d'engendrer le sous-espace isospin de la "symétrie unitaire".

De même, on parle de Uspin et Vspin (dont la signification intuitive viendra plus loin), avec les opérateurs d'échelle¹¹⁸ :

$$\begin{aligned} U_{\pm} &= F_6 \pm iF_7 \quad , \quad V_{\pm} = F_4 \mp iF_5 \\ U_3 &= -\frac{1}{2}F_3 + \sqrt{\frac{3}{4}}F_8 \quad , \quad V_3 = -\frac{1}{2}F_3 - \sqrt{\frac{3}{4}}F_8 \end{aligned} \quad (8.6.6)$$

et :

$$Y = \frac{2}{\sqrt{3}}F_8 \quad (8.6.7)$$

Ce dernier fait fonction d'opérateur "hypercharge", où $Y = B + S$ ¹¹⁹.

On peut aisément vérifier la relation 8.6.7 car $B=1/3$ pour chacun des 3 quarks, $S = -1$ pour le quark s et 0 pour les quarks u et d (tableau 1.1.2). On a :

$$Y = \frac{2}{\sqrt{3}}F_8 = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -2 \end{pmatrix} \quad (8.6.8)$$

Appliquons aux états u et s par exemple :

$$Y|u\rangle = Y \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}|u\rangle \quad , \quad Y|s\rangle = Y \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{2}{3}|s\rangle \quad (8.6.9)$$

ce qui donne bien les valeurs de $B + S$ attendues.

¹¹⁸certains auteurs définissent l'axe V_3 dans le sens opposé de celui adopté ici, ce qui se répercute sur la définition de V_{\pm}

¹¹⁹rappel : aussi $Y = Bar. + Str.$ dans la relation (4.10.7)

L'opérateur de charge Q est défini par (4.10.6) :

$$\begin{aligned}
 Q &= \frac{1}{2}Y + I_3 \rightarrow \frac{F_8}{\sqrt{3}} + F_3 = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & 0 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & & \\ & -\frac{1}{3} & \\ & & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{8.6.10}$$

comme on s'y attend.

i	j	k	f_{ij}^k $f_{ij}^k = -f_{ji}^k$	i	j	k	d_{ijk} $d_{ijk} = d_{jik}$	i	j	k	d_{ijk} $d_{ijk} = d_{jik}$
1	2	3	1	1	1	8	$1/\sqrt{3}$	3	5	5	$1/2$
1	4	7	$1/2$	1	4	6	$1/2$	3	6	6	$-1/2$
1	5	6	$-1/2$	1	5	7	$1/2$	3	7	7	$-1/2$
2	4	6	$1/2$	2	2	8	$1/\sqrt{3}$	4	4	8	$-1/(2\sqrt{3})$
2	5	7	$1/2$	2	4	7	$-1/2$	5	5	8	$-1/(2\sqrt{3})$
3	4	5	$1/2$	2	5	6	$1/2$	6	6	8	$-1/(2\sqrt{3})$
3	6	7	$-1/2$	3	3	8	$1/\sqrt{3}$	7	7	8	$-1/(2\sqrt{3})$
4	5	8	$\sqrt{3}/2$	3	4	4	$1/2$	8	8	8	$-1/\sqrt{3}$
6	7	8	$\sqrt{3}/2$								

TAB. 8.6.1 – Les constantes de structure d'SU(3) ; les f_{ij}^k sont antisymétriques, les d_{ijk} sont symétriques.

Dans le cas d'SU(2), $\phi' = (1 - i\theta\hat{n} \cdot \mathbf{I})\phi$ permet l'étude des représentations du groupe. On a des représentations I de dimensions 1,2,3,..., (spin 0, 1/2, 1,...) qui sont astreintes à l'algèbre d'SU(2) :

$$[I_i, I_j] = i\epsilon_{ijk}I_k \tag{8.6.11}$$

Dans le cas d'SU(3), c'est $\phi' = (1 - i\theta\hat{n} \cdot \mathbf{F})$ qui permet cette étude obéissant à l'algèbre d'SU(3) :

$$[F_i, F_j] = if_{ij}^k F_k \quad \{F_i, F_j\} = \frac{1}{3}\delta_{ij} + d_{ijk}F_k \quad (8.6.12)$$

Les f_{ij}^k et d_{ijk} sont appelés les constantes de structure du groupe ; leurs valeurs en sont données dans le tableau 8.6.1.

Dans SU(2) l'opérateur de Casimir a été défini par la relation 8.2.15. Dans SU(3) cet opérateur est défini par :

$$F^2 \equiv \sum_{i=1}^8 F_i F_i = \frac{1}{2}\{I_+, I_-\} + I_3^2 + \frac{1}{2}\{U_+, U_-\} + \frac{1}{2}\{V_+, V_-\} + F_8^2 \quad (8.6.13)$$

Avant de discuter du comportement de F^2 , cherchons à concrétiser les représentations de SU(3).

8.7 Les représentations d'SU(3).

On raisonne par analogie avec SU(2). Rappelons que dans SU(2) l'état d'isospin du système est défini par le $|I, I_3\rangle$:

$I \leftrightarrow$ indique la représentation en jeu

$I_3 \leftrightarrow$ indique l'élément $\in -I, -I+1, \dots, I-1, I$

Partant de la représentation fondamentale 1/2 (dim=2), on peut former les représentations $I = 0$ et 1 (dimensions 1 et 3) par le diagramme de composition (dit **diagramme des poids** figure 8.7.1) : Pour $I = 1$, le diagramme donne 3

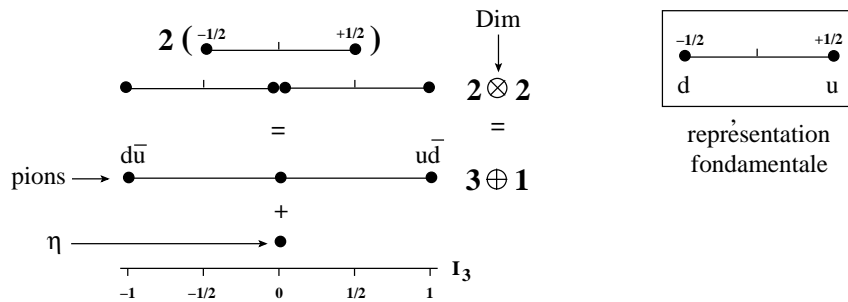


FIG. 8.7.1 – Diagramme des poids d'SU(2) lors de l'addition de deux isospins 1/2.

états représentés aux extrémités et au centre du segment correspondant. Les 3

états de charge du pion sont les candidats pour ces états physiques du système quark-antiquark. Pour $I = 0$, on a 1 état représenté à l'origine de I_3 . Le méson η est le candidat pour cet état physique.

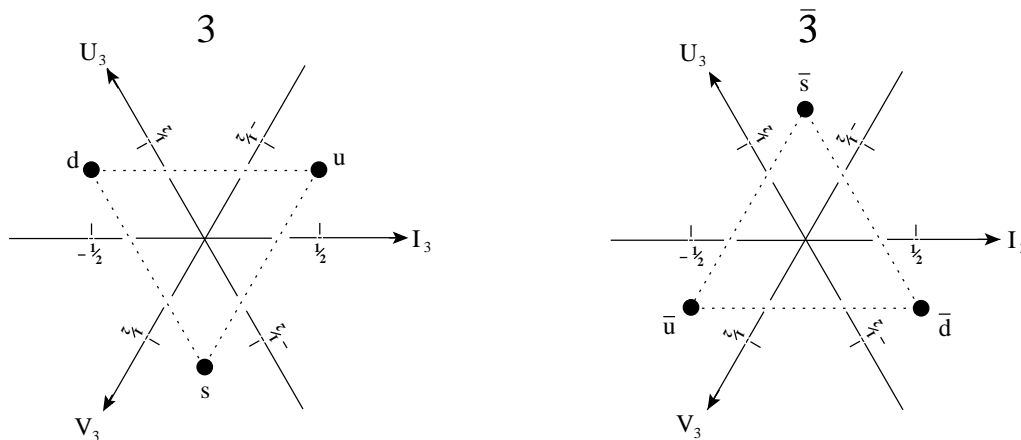


FIG. 8.7.2 – Les représentations fondamentales d' $SU(3)_{\text{saveur}}$ $\mathbf{3}$ et $\bar{\mathbf{3}}$ dans le système d'axes I_3, U_3, V_3 .

Dans $SU(3)$, on travaille dans un espace géométrique bidimensionnel¹²⁰ engendré par I_3 et l'étrangeté S , ou aussi par I_3 et l'hypercharge $Y = B + S$ ¹²¹.

Pour une représentation donnée (voir plus loin) la base sera définie par les 3 nombres :

$$(I, I_3, Y) \quad \text{ou} \quad (I, F_3, F_8) \quad \text{avec} \quad F_3 \equiv I_3, \quad F_8 \equiv \frac{\sqrt{3}}{2}Y \quad (8.7.1)$$

Exemple :

$$\pi^+ \equiv |\text{octet } \bar{q}q, I = 1, I_3 = +1, Y = 0\rangle$$

signifie que le pion positif est le membre de l'octet des quarks uds ; dans cet octet, il occupe la position $Y = 0, I_3 = +1$. Notons qu'on ne peut pas laisser de côté l'indication $I = 1$, car il y a une dégénérescence.

On trouve aussi cette expression écrite sous la forme :

$$\pi^+ \equiv \left| \underbrace{\mathbf{8}, Y = 0}_{SU(3)}, \underbrace{\mathbf{3}, I_3 = +1}_{SU(2)} \right\rangle$$

¹²⁰La dimension de l'espace est égale au nombre de générateurs qui peuvent être diagonalisés simultanément.

¹²¹On utilise la notation $SU(3)_{\text{saveur}}$ pour rappeler qu'on se situe dans l'espace $I_3 - Y$.

Les représentations fondamentales d' $SU(3)_{\text{saveur}}$ $\bar{\mathbf{3}}$ et $\mathbf{3}$ peuvent s'exprimer graphiquement, soit dans le système d'axes I_3, U_3, V_3 (figure 8.7.2) soit dans le système d'axes $I_3, Y = B + S$ (figure 8.7.3). On peut vérifier graphiquement que

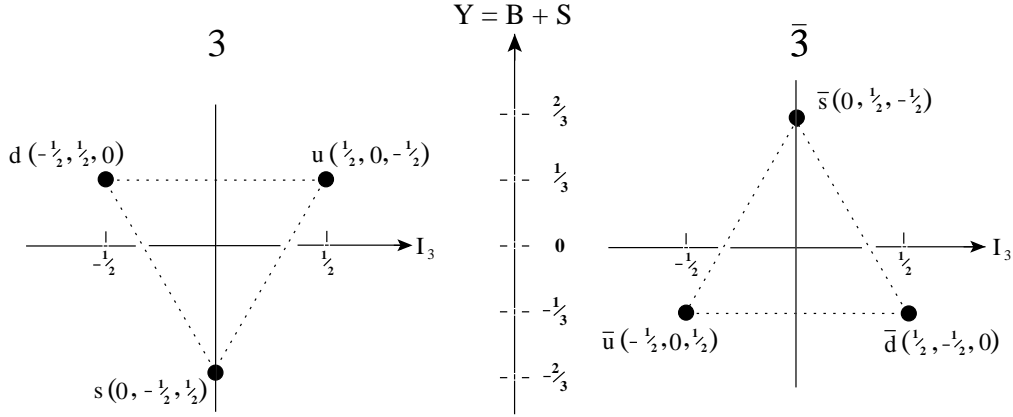


FIG. 8.7.3 – Les représentations fondamentales d' $SU(3)_{\text{saveur}}$, dans le système d'axes $I_3, Y = B + S$; les valeurs de I_3, U_3, V_3 correspondantes sont données entre parenthèses.

$I_3 = -(V_3 + U_3)$ ou l'établir à l'aide des opérateurs 8.6.7 :

$$V_3 + U_3 = \left(-\frac{1}{2}F_3 - \sqrt{\frac{3}{4}}F_8 \right) + \left(-\frac{1}{2}F_3 + \sqrt{\frac{3}{4}}F_8 \right) = -F_3 \equiv -I_3 \quad (8.7.2)$$

Les opérateurs $I_{\pm}, U_{\pm}, V_{\pm}$ ont l'action suivante :

$$\begin{array}{lll} I_+ & \text{fait} & I_3 \rightarrow I_3 + 1 \quad \text{et} \quad Y \rightarrow Y \\ U_+ & \text{fait} & I_3 \rightarrow I_3 - \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad Y \rightarrow Y + 1 \\ V_+ & \text{fait} & I_3 \rightarrow I_3 - \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad Y \rightarrow Y - 1 \end{array} \quad (8.7.3)$$

En ce qui concerne les représentations $\mathbf{3}$ et $\bar{\mathbf{3}}$, il faut relever ici la différence de situation par rapport à celle évoquée sous $SU(2)$. Il n'est pas possible d'arranger un triplet d'antiparticules de telle sorte qu'il se transforme comme le triplet des particules. Si l'on choisit de décrire les triplets correspondants par :

$$\psi \begin{pmatrix} u \\ d \\ s \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \bar{\varphi} = \begin{pmatrix} \bar{u} \\ \bar{d} \\ \bar{s} \end{pmatrix} \quad (8.7.4)$$

l'ensemble des générateurs $\bar{\lambda}_i$ à utiliser pour le triplet $\bar{\varphi}$ s'obtient par¹²² :

$$\lambda_i = W\lambda^*W^{-1} \quad \text{où } W = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (8.7.5)$$

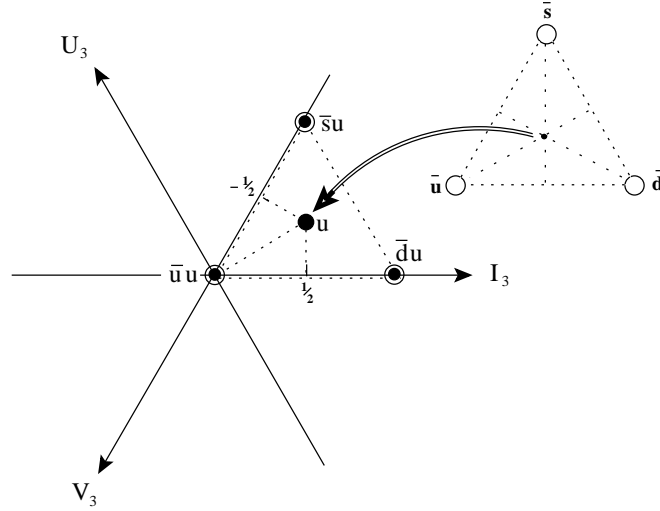


FIG. 8.7.4 – Procédé graphique de construction d'états $\bar{q}q$.

Graphiquement on peut effectuer le produit direct $\bar{\mathbf{3}} \otimes \mathbf{3}$, c. à d. combiner antiquarks et quarks¹²³ pour former les états de mésons. Considérons par ex. (voir figure 8.7.4) le point où se trouve le quark u , c'est-à-dire en : $I_3 = 1/2$, $U_3 = 0$, $V_3 = -1/2$; entourons ce point du triangle des antiquarks \bar{u} , \bar{s} , \bar{d} , ce qui donne les combinaisons :

$$\begin{aligned} \bar{u}u &= \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}, \quad 0 + 0, \quad \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right) = (0, 0, 0) \\ \bar{s}u &= \left(0 + \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{2} + 0, \quad -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1 \right) \\ \bar{d}u &= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}, \quad -\frac{1}{2} + 0, \quad 0 - \frac{1}{2} \right) = \left(1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right) \end{aligned}$$

L'opération étant répétée en partant des quarks d et s , on obtient un hexagone dont les sommets et le centre sont occupés par les différentes combinaisons d'états

¹²²Voir par ex. S. Gasiorowicz, Elementary particle physics. Ed. J. Wiley and Sons, chap. 16 et 17.

¹²³On peut aussi faire le produit direct $\mathbf{3} \otimes \mathbf{3}$ c'est-à-dire combiner deux quarks ; cela ne semble donner aucun état physiquement observable.

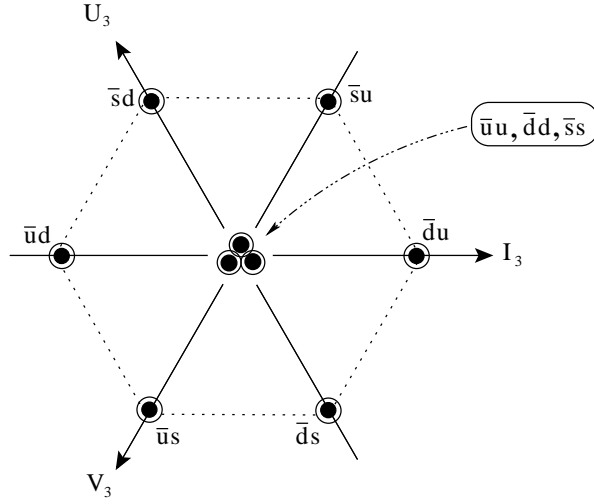


FIG. 8.7.5 – Ensemble des représentations (nonet) obtenues par le produit direct $\bar{\mathbf{3}} \otimes \mathbf{3}$.

possibles (voir figure 8.7.5). La position centrale comporte une dégénérescence d'états, puisqu'on trouve en ce point les combinaisons $\bar{u}u$, $\bar{d}d$, $\bar{s}s$. Pour arranger cet ensemble on s'inspire de la procédure utilisée dans le cas de $SU(2)$. On part d'un état extrême non ambigu, et on applique l'un des opérateurs I_{\pm} , U_{\pm} ou V_{\pm} faisant transiter d'un sous-état à l'autre le long de l'axe correspondant (par exemple : $(I_+ |I, I_3 = -I\rangle \Rightarrow |I, I_3 = -I + 1\rangle$). Dans $SU(2)$ l'action de I_+ dans le sous-espace $Y = 0$ amène à définir au centre ($I = 0$) le pion neutre et un candidat η (8.5.10) :

$$\pi^0 \equiv |1, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\bar{d}d - \bar{u}u) \quad (8.7.6)$$

$$\eta \equiv |0, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\bar{d}d + \bar{u}u) \quad (8.7.7)$$

La décomposition $\bar{\mathbf{2}} \otimes \mathbf{2} = \mathbf{3} \oplus \mathbf{1}$ donne un (iso) triplet (pion) et un (iso) singulet (eta). Dans $SU(3)$ la décomposition $\bar{\mathbf{3}} \otimes \mathbf{3} = \mathbf{8} \oplus \mathbf{1}$ donne un octet et un singulet. Le singulet doit être complètement symétrique par échange u , d et s (comme l'état $|0, 0\rangle$ dans $SU(2)$, 8.5.5). On va donc l'écrire ¹²⁴ :

$$\eta_1 \equiv |\text{singulet}\rangle \equiv \left| \underbrace{\mathbf{1}} , \underbrace{\mathbf{1}} \right\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{3}}(\bar{u}u + \bar{d}d + \bar{s}s) \quad (8.7.8)$$

¹²⁴On reviendra aux formes η_1 et η_8 dans le § 8.9 (relations 8.9.8 et 8.9.9).

dimension de $SU(3)$ et de $SU(2)$ isospin

Pour cet état $I_{\pm}|1, 1\rangle = V_{\pm}|1, 1\rangle = U_{\pm}|1, 1\rangle = 0$.

L'état représenté par 8.7.6 fait partie de l'octet d' $SU(3)_{\text{saveur}}$ et du triplet d'isospin.

$$\pi^0 = |\mathbf{8}, Y = 0, \mathbf{3}, I_3 = 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\bar{d}d - \bar{u}u) \quad (8.7.9)$$

On peut construire une combinaison orthogonale à 8.7.8 et 8.7.9 faisant partie de l'octet d' $SU(3)_{\text{saveur}}$ et du singulet d'isospin :

$$\eta_8 = |\mathbf{8}, Y = 0, \mathbf{1}, I_3 = 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}(\bar{d}d + \bar{u}u - 2\bar{s}s) \quad (8.7.10)$$

La décomposition $\bar{\mathbf{3}} \otimes \mathbf{3} = \mathbf{8} \oplus \mathbf{1}$ est représentée graphiquement dans la figure 8.7.6

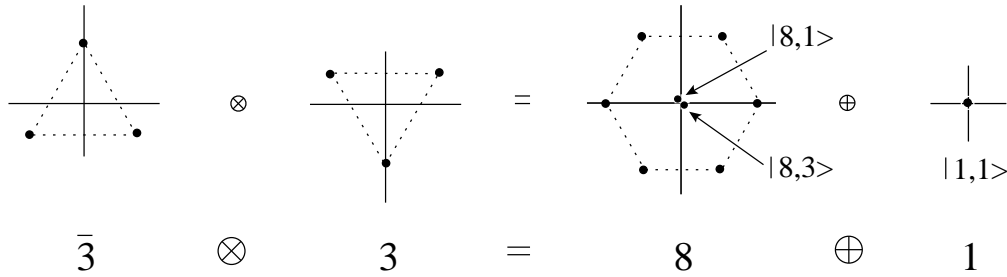
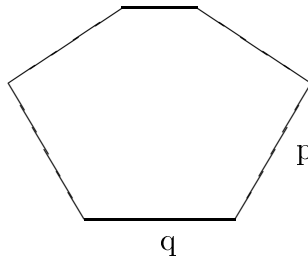


FIG. 8.7.6 – Décomposition $\bar{\mathbf{3}} \otimes \mathbf{3} = \mathbf{8} \oplus \mathbf{1}$

Il est commode, en vue de la généralisation de recourir au langage de la théorie des groupes.

On peut montrer que toutes les représentations d' $SU(3)_{\text{saveur}}$ correspondent à des structures géométriques dans le plan (I_3, Y) avec périmètre convexe, triangles, hexagones et plus généralement les formes :



On peut donc classer une représentation par deux nombres, p et q, qui indiquent le nombre de pas qu'il faut faire selon les axes V_3 (Vspin) et I_3 (Ispin) pour atteindre un extrême du domaine convexe à partir d'un autre extrême.

I		q	$I_+ \phi_{max} = 0$
0	•	0	
1/2	• ← •	1	
1	• ← • ← •	2	
3/2	• ← • ← • ← •	3	
	$\phi_{max} \nearrow$		

TAB. 8.7.1 – SU(2) : q en fonction de I quand on part de ϕ_{max} où $I_3 = I_{max} = I$

Dans SU(2), seul l'axe I_3 est concerné. Dans le tableau 8.7.1 on donne les valeurs de q en fonction des valeurs de I quand on part de ϕ_{max} où $I_3 = I_{max} = I$. En partant de l'état maximal, on peut donc faire $2I$ sauts avec l'opérateur d'échelle avant de se trouver dans le vide ; le $2I + 1^{\text{ième}}$ saut donne : $(I_-)^{2I+1} \phi_{max} = 0$.

Dans SU(3) la même procédure peut être appliquée sauf qu'il faut raisonner selon les axes I_3 , U_3 et V_3 du plan (voir figure 8.7.7). L'état maximal est celui qui a la propriété :

$$I_+ \phi_{max} = U_+ \phi_{max} = V_+ \phi_{max} = 0 \tag{8.7.11}$$

Si l'on applique à ϕ_{max} p+1 fois l'opérateur V_- , on se trouve dans le vide. On recule donc d'un pas et on fait p sauts $(V_-)^p \phi_{max}$. A partir de là, si l'on applique q+1 fois l'opérateur I_- on est à nouveau dans le vide $(I_-)^{q+1} (V_-)^p \phi_{max} = 0$. L'état ϕ_{max} est défini par :

$$\left. \begin{aligned} I_3 &= \frac{1}{2}(p + q) = I_3^{max} \\ Y &= \frac{1}{3}(p - q) = Y^{max} \end{aligned} \right\} \tag{8.7.12}$$

Dans SU(2) la valeur propre de I^2 est :

$$\langle I^2 \rangle = I(I + 1) = I^2 + I = (I_3^{max})^2 + I_3^{max}$$

où I_3^{max} est la valeur propre I_3 de l'état ϕ_{max} .

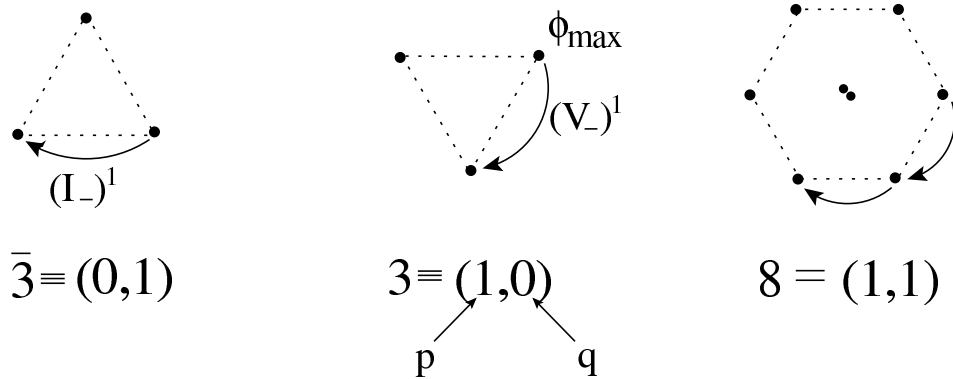


FIG. 8.7.7 – Classification dans SU(3)

Dimension	(p,q)	$\langle F^2 \rangle$
1	(0,0)	0
3	(1,0)	4/3
3	(0,1)	4/3
8	(1,1)	3
6	(2,0)	10/3
10	(3,0)	6

TAB. 8.7.2 – Valeurs propres de F^2 en fonction de (p, q)

Dans SU(3) on peut montrer que :

$$\langle F^2 \rangle = (I_3^{max})^2 + 2I_3^{max} + \frac{3}{4}(Y^{max})^2 \quad (8.7.13)$$

En utilisant 8.7.12 on obtient :

$$\langle F^2 \rangle = \frac{1}{3}(p^2 + pq + q^2) + p + q \quad (8.7.14)$$

Le tableau 8.7.2 donne les valeurs propres de F^2 en fonction des valeurs de (p, q) . On voit qu'elles ne spécifient pas complètement la représentation (comme c'était le cas pour I^2) : par ex. : $F^2(\mathbf{3}) = F^2(\bar{\mathbf{3}}) = 4/3$.

8.8 Le modèle statique des quarks.

Ainsi qu'on l'a rappelé dans l'introduction (§ 8.1), il existe une bonne correspondance entre la classification en J^P des hadrons observés et les représentations (irréductibles) du groupe $SU(3)_{\text{saveur}}$ pour les états liés $\bar{q}q$ et qqq (ou $\bar{q}\bar{q}\bar{q}$). Toutefois, la symétrie unitaire n'est que grossièrement respectée, p. ex. les masses de hadrons appartenant à un multiplet d' $SU(3)_{\text{saveur}}$ donné présentent de notables différences entre elles. Ainsi, on est amené à compléter le modèle en admettant que les propriétés du hadron sont fonctions du contenu en quarks de valence, de la configuration spatiale et de l'état de spin relatif de ces derniers. Par ex.. on considère que la masse du système croît quand l'état d'excitation radiale ($n=1,2,\dots$) et l'état d'excitation orbitale ($L=0,1,2,\dots$) augmentent.

$q(\bar{q})$	I	I_3	S	B	Q	$Y = 2(Q - I_3)$
$u(\bar{u})$	1/2	$\pm 1/2$	0	$\pm 1/3$	$\pm 2/3$	$\pm 1/3$
$d(\bar{d})$	1/2	$\mp 1/2$	0	$\pm 1/3$	$\mp 1/3$	$\pm 1/3$
$s(\bar{s})$	0	0	∓ 1	$\pm 1/3$	$\mp 1/3$	$\mp 2/3$

TAB. 8.8.1 – Nombres quantiques additifs des quarks (antiquarks) légers et du quark (antiquark) étrange.

Pour simplifier l'exposé, nous en restons ici aux quarks (antiquarks) des trois saveurs $u(\bar{u})$, $d(\bar{d})$, $s(\bar{s})$ ¹²⁵; on en rappelle les nombres quantiques dans le tableau 8.8.1. De plus, nous nous concentrons sur certaines situations particulières d'états mésoniques et baryoniques où l'interprétation dans le cadre des représentations d' $SU(3)_{\text{saveur}}$ n'est pas triviale.

8.9 Les systèmes liés $\bar{q}q$ (mésons).

La symétrie $SU(3)_{\text{saveur}}$ prédit que le système lié $\bar{q}q$ (où q est l'une des trois saveurs) peut se situer dans un singulet ou dans un octet de symétrie unitaire, ce qui s'exprime par la décomposition :

$$\bar{\mathbf{3}} \otimes \mathbf{3} = \mathbf{1} \oplus \mathbf{8} \quad (8.9.1)$$

¹²⁵L'extension à une quatrième saveur de quark est présentée au § 8.13. Voir aussi la table PDG, chapitre 13 Quark model.

Pour l'état singulet du système $\bar{q}q$, on a : $I = 0, S = Y = 0$; pour les états de l'octet, on a : $I = 0$ ou $1, S = Y = -1, 0$ ou 1 . Le modèle ne prévoit pas d'état d'isospin $I = \frac{3}{2}, 2, \dots$ et d'étrangeté (d'hypercharge) $S(Y) = \mp 2, \mp 3, \dots$. Cette prédiction est vérifiée par l'étude des mésons et de leurs états excités. Par exemple, la recherche de candidats à l'isospin $I = \frac{3}{2}$ se désintégrant dans la voies $K^\pm \pi^\pm$ et celle de candidats à l'isospin $I = 2$ se désintégrant dans les voies $\pi^\pm \pi^\pm$ a toujours été infructueuse.

Q. : dans quelles voies de désintégration faut-il rechercher d'éventuels mésons candidats à l'étrangeté $S = \pm 2$?

Le quark (l'antiquark) est un fermion (spin $\frac{1}{2}$); le système $\bar{q}q$ peut donc se trouver dans l'état singulet de spin : $S = 0, S_z = 0$, ou dans les états triplets de spin : $S = 1; S_z = -1, 0$ ou 1 selon que les spins des quarks constituants sont antiparallèles ($\uparrow\downarrow$) ou parallèles ($\uparrow\uparrow$)¹²⁶. Ce spin doit être combiné avec le moment orbital relatif L, L_z des membres de la paire $\bar{q}q$ pour obtenir le moment angulaire J, J_z du système (son spin, pour l'observateur placé au barycentre). L'ensemble de ces informations se retrouve en condensé dans la notation spectroscopique usuelle $^{2S+1}L_J$.

La fonction d'onde du système peut être définie comme le produit de deux termes, l'un se rapportant à la représentation d' $SU(3)_{\text{saveur}}$, l'autre aux configurations spatiale et spinorielle :

$$|\text{méson}\rangle \implies |\bar{q}q\rangle = \left| \begin{array}{c} \text{composante} \\ \text{d}'SU(3)_{\text{saveur}} \end{array} \right\rangle |L, L_z, J, J_z\rangle \quad (8.9.2)$$

par ex., la fonction d'onde d'un méson π^+ peut se définir par :

$$|\pi^+\rangle = |\mathbf{8}, Y = 0, I = 1, I_3 = 1\rangle |0, 0, 0, 0\rangle \quad (8.9.3)$$

Une fois donnés I_3 et Y , la charge électrique est fixée (relation 4.10.6). De même, une fois donné L , la parité du système est déterminée par : $P = (-1)^{L+1}$ (voir relation 4.3.10).

Après ce bref rappel, nous venons au problème d'interprétation de certains états mésoniques.

Dans le tableau 8.9.1, on a extrait de la table PDG une série de mésons non étranges et étranges connus avec les nombres quantiques additifs attribués et le domaine des masses concerné. Il est frappant de trouver dans la colonne $I = 0$ généralement deux états neutres ($I_3 = Y = 0$) identifiés pour un J^{PC} donné et avec des masses voisines. Notons qu'un troisième état neutre est contenu implicitement dans la colonne $I = 1$ pour le même J^{PC} . Rappelons qu' $SU(3)_{\text{saveur}}$ de son côté prédit également trois états neutres $I_3 = S = Y = 0$: le membre neutre du triplet

¹²⁶Il est courant de désigner l'étrangeté et le spin par la même lettre S ; le contexte dans lequel ces grandeurs sont utilisées devrait permettre de lever toute ambiguïté à leur sujet.

$^{2S+1}L_J$	J^{PC}	$\bar{d}u, \bar{u}u, \bar{d}d$ $I = 1$	$\bar{s}u, \bar{s}d$ $I = \frac{1}{2}$	$\bar{u}u, \bar{d}d, \bar{s}s$ $I = 0$	région de masse [MeV]
1S_0	0^{-+}	π	K	η, η'	100-600
3S_1	1^{--}	ρ	$K^*(892)$	ω, ϕ	700-1000
1P_1	1^{+-}	$b_1(1235)$	K_{1B}	$h_1(1170), ?$	1100-1300
3P_0	0^{++}	$a_0(1450)$	$K_0^*(1430)$	$f_0(1370), f_0(1710)$	1400-1700
3P_1	1^{++}	$a_1(1260)$	K_{1A}	$f_1(1285), f_1(1420)$	1300-1400
3P_2	2^{++}	$a_2(1320)$	$K_2^*(1430)$	$f_2(1270), f_2'(1525)$	1300-1500
1D_2	2^{-+}	$\pi_2(1670)$	$K_2(1770)$	$?, ?$	1700-1800
3D_1	1^{--}	$\rho(1700)$	$K^*(1680)$	$\omega(1650), ?$	

TAB. 8.9.1 – Etats liés du système $\bar{q}q$; mésons non étranges et étranges assignés à ces états.

d'isospin (contenu en quarks : $\frac{1}{\sqrt{2}}(\bar{u}u + \bar{d}d)$, le singulet d' $SU(3)_{\text{saveur}}$ ($\frac{1}{\sqrt{3}}(\bar{u}u + \bar{d}d + \bar{s}s)$), et le membre neutre de l'octet ($\frac{1}{\sqrt{6}}(\bar{u}u + \bar{d}d - 2\bar{s}s)$). L'assignation du premier de ces états est immédiate; celle des deux autres, par contre, n'est pas évidente et requiert un examen plus approfondi. A titre d'exemple, nous considérons la situation des mésons pseudoscalaires $J^{PC} = 0^{-+}$ et celle des mésons vecteurs $J^{PC} = 1^{--}$ (les deux premières lignes du tableau 8.9.1)¹²⁷.

Mésons pseudoscalaires.

On rappelle dans le tableau 8.9.2 leur appartenance aux représentations d' $SU(3)_{\text{saveur}}$, leur masse et leur contenu en quarks.

La masse du système $\bar{q}q$ peut s'exprimer sous la forme :

$$m = \langle \bar{q}q | H_0 | \bar{q}q \rangle = M(^{2S+1}L_J) + m_{\bar{q}} + m_q \quad \text{où :} \quad (8.9.4)$$

¹²⁷La situation des mésons de spin $J > 1$ est présentée dans la table PDG, chap. 13 Quark model.

H_0 est l'opérateur de masse ;

$M(^{2S+1}L_J)$ est la contribution dépendant des états de spin et de moment orbital ; on admet que cette contribution est indépendante de la saveur du quark.

Pour simplifier l'écriture dans ce qui suit, on pose :

$$\begin{aligned} m_{\bar{q}} = m_q &= m_0 && \text{pour les quarks } u \text{ et } d \\ &= m_s && \text{pour le quark } s \\ M(^1S_0) &= M_0 \end{aligned}$$

Dans cette notation, les masses des états du tableau 8.9.2 s'écrivent :

$$m_\pi = M_0 + 2m_0 \quad (8.9.5)$$

$$m_K = M_0 + m_0 + m_s \quad (8.9.6)$$

$$\begin{aligned} m_{\eta_8} &= \left\langle \frac{1}{\sqrt{6}}(\bar{u}u + \bar{d}d - 2\bar{s}s) \middle| H_0 \middle| \frac{1}{\sqrt{6}}(\bar{u}u + \bar{d}d - 2\bar{s}s) \right\rangle \\ &= M_0 + \frac{1}{6} \left\{ \underbrace{\langle \bar{u}u | H_0 | \bar{u}u \rangle}_{=2m_0} + \underbrace{\langle \bar{d}d | H_0 | \bar{d}d \rangle}_{=2m_0} + \underbrace{\langle \bar{u}u | H_0 | \bar{d}d \rangle}_{=0} + \dots + \underbrace{4\langle \bar{s}s | H_0 | \bar{s}s \rangle}_{=8m_s} \right\} \\ &= M_0 + \frac{2}{3}m_0 + \frac{4}{3}m_s \end{aligned} \quad (8.9.7)$$

En combinant 8.9.5, 8.9.6 et 8.9.7, on obtient la relation de Gell-Mann-Okubo¹²⁸ :

$$m_{\eta_8} = \frac{1}{3}(4m_K - m_\pi) \quad (8.9.8)$$

$$\begin{aligned} m_{\eta_1} &= \left\langle \frac{1}{\sqrt{3}}(\bar{u}u + \bar{d}d + \bar{s}s) \middle| H_0 \middle| \frac{1}{\sqrt{3}}(\bar{u}u + \bar{d}d + \bar{s}s) \right\rangle \\ &= M_0 + \frac{1}{3}(4m_0 + 2m_s) \end{aligned} \quad (8.9.9)$$

On peut également en tirer une relation entre m_{η_1} et les masses de mésons observés¹²⁹.

La composante des interactions responsable de la violation de symétrie $SU(3)_{\text{saveur}}$ peut engendrer le mélange des états appartenant au singulet et à l'octet. Cet effet de mélange peut être décrit à l'aide d'une matrice de rotation R :

$$\begin{pmatrix} \eta' \\ \eta \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_{ps} & \sin \theta_{ps} \\ -\sin \theta_{ps} & \cos \theta_{ps} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_8 \end{pmatrix} \quad (8.9.10)$$

¹²⁸Dans la table PDG et dans la littérature, on trouve cette relation (et celles qui suivent) écrites en terme des masses au carré. L'argumentation est que les bosons sont décrits par l'équation de Klein-Gordon où la masse est présente sous sa forme quadratique.

¹²⁹Nous n'explicitons pas cette relation, car elle conduit à des résultats peu satisfaisants, en particulier pour les mésons pseudoscalaires. Voir à ce sujet par exemple, B.T. Feld, Models of Elementary Particles, Blaisdell. Publ. Comp. (1968), chap. 14 et 15.

multiplet d'SU(3) _{saveur}	états	masse m [MeV]	$\Delta m = m - m_\pi$ [MeV]	m^2 [GeV ²]	contenu en quarks
{8}	π^+	140	0	0.0182	$\bar{d}u$
	π^-				$\bar{u}d$
	π^0	135			$\frac{1}{\sqrt{2}}(\bar{u}u - \bar{d}d)$
	K^+	494	362	0.2470	$\bar{s}u$
	K^-				$\bar{u}s$
	K^0	497			$\bar{s}d$
	\bar{K}^0				$\bar{d}s$
{8}	η_8	$\simeq 612$			$\frac{1}{\sqrt{6}}(\bar{u}u + \bar{d}d - 2\bar{s}s)$
{1}	η_1	$\simeq 886$			$\frac{1}{\sqrt{3}}(\bar{u}u + \bar{d}d + \bar{s}s)$
	m_{18}	$\simeq 155$			
mélange de {8} et {1}	η	547	407	0.2995	$-\eta_1 \sin \theta_{ps} + \eta_8 \cos \theta_{ps}$
	η'	958	818	0.9174	$\eta_1 \cos \theta_{ps} + \eta_8 \sin \theta_{ps}$ $\theta_{ps} \simeq -23^\circ$

TAB. 8.9.2 – Série de mésons pseudoscalaires $J^P = 0^-$. Notons que si les masses sont remplacées par leur carré dans les relations 8.9.8 à 8.9.16, on obtient : $\theta_{ps} \simeq -11^\circ$.

où θ_{ps} est l'angle de mélange pour les mésons pseudoscalaires.

Par rapport à la base η, η' , la matrice des masses est diagonale :

$$H_0 \begin{pmatrix} \eta' \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{\eta'} & 0 \\ 0 & m_{\eta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta' \\ \eta \end{pmatrix} \quad (8.9.11)$$

Par contre, dans la base η_8, η_1 , par suite de l'effet de mélange, on a¹³⁰ :

$$H_0 \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_1 & m_{18} \\ m_{81} & m_8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_8 \end{pmatrix} \quad (8.9.12)$$

où :

$$\begin{pmatrix} m_1 & m_{18} \\ m_{81} & m_8 \end{pmatrix} = R^\dagger \cdot \begin{pmatrix} m_{\eta'} & 0 \\ 0 & m_{\eta} \end{pmatrix} \cdot R$$

Après multiplication des matrices et égalisation terme à terme, on peut obtenir différentes relations entre les masses et l'angle de mélange, telles que :

$$m_1 + m_8 = m_{\eta} + m_{\eta'} \quad (8.9.13)$$

$$m_{18}^2 = m_{81}^2 = m_1 \cdot m_8 - m_{\eta} \cdot m_{\eta'} \quad (8.9.14)$$

$$\tan^2 \theta_{ps} = \frac{m_8 - m_{\eta}}{m_{\eta'} - m_8} \quad (8.9.15)$$

$$\tan \theta_{ps} = \frac{m_{18}}{m_{\eta'} - m_8} = \frac{m_8 - m_{\eta}}{m_{18}} \quad (8.9.16)$$

Les masses inconnues sont déterminées à l'aide des masses mesurées en procédant dans l'ordre suivant : m_8 de 8.9.8, m_1 de 8.9.13 et m_{18} de 8.9.14. L'angle de mélange θ_{ps} s'en déduit à l'aide des relations 8.9.15 ou 8.9.16 (les résultats sont donnés dans le tableau 8.9.2).

Notons que le signe de θ_{ps} est fonction du signe de m_{18} . Nous avons admis que $m_{18} < 0$ en suivant la recommandation de la table PDG¹³¹.

Mésons vecteurs.

Le tableau 8.9.3 est le pendant du tableau 8.9.2 et la comparaison ligne à ligne permet de faire la correspondance entre les deux séries de mésons. Les compositions en quarks du singulet et de l'octet sont les mêmes, mais la configuration spinorielle est différente ; aussi avons-nous utilisé des caractères différents pour désigner ces états.

Les masses des mésons vecteurs sont supérieures aux masses des mésons pseudoscalaires, ce qui indique que dans la relation 8.9.4 $M(^3S_1) = M_1 > M(^1S_0) =$

¹³⁰Pour alléger l'écriture, on a écrit m_1 et m_8 pour les masses du singulet et de l'octet d' $SU(3)_{\text{saveur}}$.

¹³¹Voir table PDG chapitre 13 Quark Model.

multiplet d'SU(3) _{saveur}	états	masse m [MeV]	$\Delta m = m - m_\pi$ [MeV]	m^2 [GeV ²]	contenu en quark
{8}	ρ^+	766	0	0.591	$\bar{d}u$
	ρ^-				$\bar{u}d$
	ρ^0	769			$\frac{1}{\sqrt{2}}(\bar{u}u - \bar{d}d)$
	K^{*+}	892			$\bar{s}u$
	K^{*-}				$\bar{u}s$
	K^{*0}				$\bar{s}d$
	\bar{K}^{*0}				$\bar{d}s$
{8}	ω_8	$\simeq 938$			$\frac{1}{\sqrt{6}}(\bar{u}u + \bar{d}d - 2\bar{s}s)$
{1}	ω_1	$\simeq 884$			$\frac{1}{\sqrt{3}}(\bar{u}u + \bar{d}d + \bar{s}s)$
	m_{18}	$\simeq 112$			
mélange de {8} et {1}	ϕ	1019		1.038	$-\omega_1 \sin \theta_v + \omega_8 \cos \theta_v$
	ω	783		0.613	$\omega_1 \cos \theta_v + \omega_8 \sin \theta_v$ $\theta_v \simeq 36^\circ$

TAB. 8.9.3 – Série de mésons vecteurs $J^P = 1^-$. Notons que si les masses sont remplacées par leur carré dans les relations 8.9.8 à 8.9.16, on obtient : $\theta_v \simeq 39^\circ$.

M_0 . Les masses inconnues et l'angle de mélange θ_v sont déterminés en suivant le

même schéma qu'auparavant et en convenant de faire les substitutions suivantes :

$$K^0 \implies K^{*0}(896) \quad ; \quad \pi^0 \implies \rho^0 \quad \text{dans 8.9.8}$$

$$\eta' \implies \omega \quad ; \quad \eta \implies \phi \quad \text{dans 8.9.13 et 8.9.16}$$

(Voir les résultats dans le tableau 8.9.3).

Il apparaît dans le cas présent qu'on s'approche de la situation du mélange idéal où $\theta_{\text{idéal}} = 35.3^\circ$; $\cos \theta_{\text{idéal}} = \sqrt{\frac{2}{3}}$; $\sin \theta_{\text{idéal}} = \sqrt{\frac{1}{3}}$ et :

$$|\phi\rangle \approx -\left|\frac{1}{\sqrt{3}}(\bar{u}u + \bar{d}d + \bar{s}s)\right\rangle\sqrt{\frac{1}{3}} + \left|\frac{1}{\sqrt{6}}(\bar{u}u + \bar{d}d - 2\bar{s}s)\right\rangle\sqrt{\frac{2}{3}} = -|\bar{s}s\rangle$$

$$|\omega\rangle \approx -\left|\frac{1}{\sqrt{3}}(\bar{u}u + \bar{d}d + \bar{s}s)\right\rangle\sqrt{\frac{2}{3}} + \left|\frac{1}{\sqrt{6}}(\bar{u}u + \bar{d}d - 2\bar{s}s)\right\rangle\sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\bar{u}u + \bar{d}d)$$

On en trouve une confirmation dans le fait que le méson ϕ (essentiellement système $\bar{s}s$) se désintègre en kaons et en pions dans la proportion :

$$\text{BR}(\phi \rightarrow \bar{K}K) \simeq 83\%$$

$$\text{BR}(\phi \rightarrow \rho\pi, \rho\pi\pi) \simeq 16\%$$

La masse du ϕ dépasse de peu le seuil de désintégration en $\bar{K}K$, ce qui explique la largeur observée ($\Gamma_\phi \simeq 4.5 \text{ MeV}$). Les mécanismes de la désintégration du ϕ sont une application de la règle OZI¹³² qui prescrit la prédominance du processus régi par un diagramme connecté (figure 8.9.1 **a**) sur le processus régi par un diagramme déconnecté (figure 8.9.1 **b**). Pour expliquer le rapport d'embranchement de la voie $\phi \rightarrow \rho\pi$, on postule l'intervention d'un mécanisme concurrentiel du type $\phi \rightarrow \bar{K}K \rightarrow \rho\pi$ (diagramme de la figure 8.9.2).

8.10 Les systèmes liés $q q q$ et $\bar{q} \bar{q} \bar{q}$ (baryons et antibaryons).

La symétrie $\text{SU}(3)_{\text{saveur}}$ prédit que le système $q q q$ ($\bar{q} \bar{q} \bar{q}$) peut se présenter dans 27 combinaisons différentes (rappel, on se limite à 3 saveurs), ce qui s'exprime par la décomposition :

$$\mathbf{3} \otimes \mathbf{3} \otimes \mathbf{3} = \mathbf{3} \otimes (\mathbf{6} \oplus \bar{\mathbf{3}}) = \mathbf{10} \oplus \mathbf{8} \oplus \mathbf{8}' \oplus \mathbf{1} \quad (8.10.1)$$

Dans ce qui suit on admet que les trois quarks sont dans l'état d'excitation le plus bas possible ($n = 1, L = 0$).

Les états du décuplet $\{10\}$.

¹³²S. Okubo, G. Zweig, J. Iizuka Phys. Lett. 5 (1963) 165, Suppl. Prog. Theor. Phys. 37-38 (1966) 21.

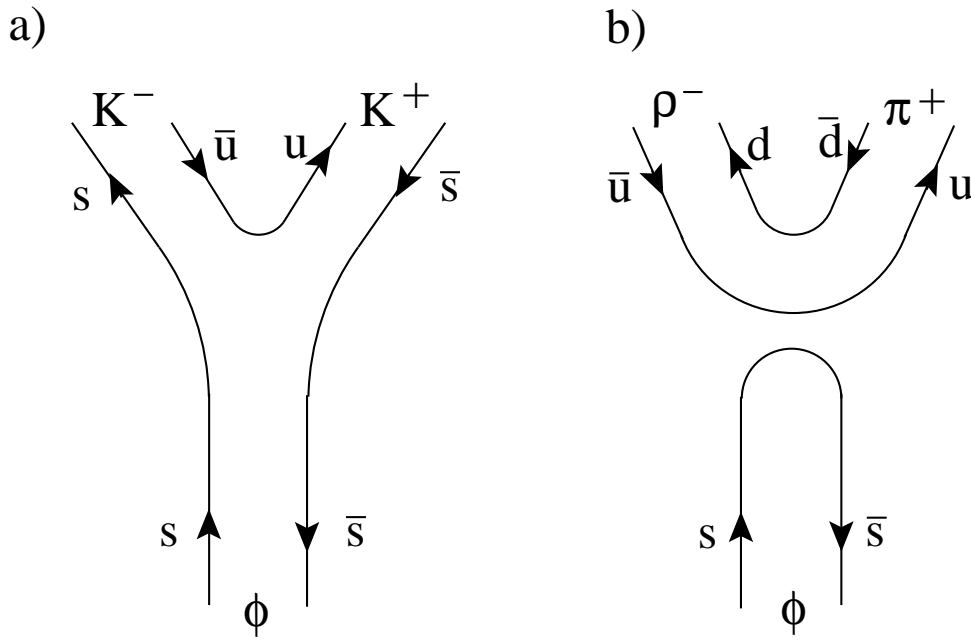


FIG. 8.9.1 – a) Diagramme de $\phi \rightarrow \bar{K}K$ favorisé par la règle OZI ; b) Diagramme de $\phi \rightarrow \rho\pi$ défavorisé par la règle OZI.

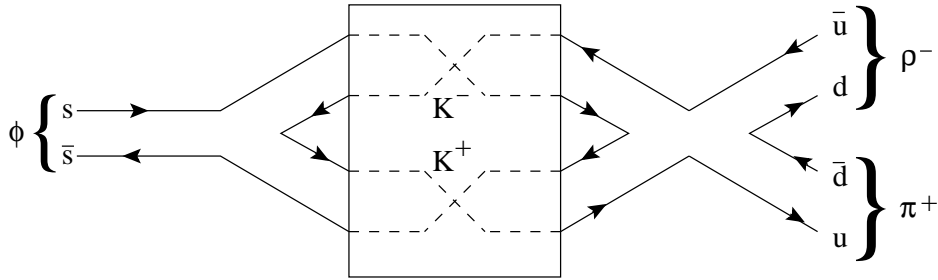


FIG. 8.9.2 – Diagramme de $\phi \rightarrow \bar{K}K \rightarrow \rho\pi$, où $\bar{K}K$ est un état intermédiaire virtuel.

Les spins des quarks sont alignés, le système est donc dans l'état symétrique de spin : $|\uparrow\uparrow\uparrow\rangle = |J = \frac{3}{2}, J_Z\rangle$, où J_Z peut prendre les valeurs $-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}$. La figure 8.10.1 représente les baryons observés et leur contenu en quarks, dans le système d'axes I_3, Y . Les antibaryons correspondants seraient représentés par une figure symétrique par rapport à ces deux axes. Les états situés aux sommets

du triangle sont manifestement symétriques en terme de la saveur des quarks ; par continuité l'ensemble des états de la représentation $\{10\}$ doivent l'être. Donc dans la figure 8.10.1 il faut comprendre que :

$$ddu \implies \text{sym}(ddu) = \frac{1}{\sqrt{3}} (ddu + dud + udd) \quad (8.10.2)$$

et de même :

$$uds \implies \text{sym}(uds) = \frac{1}{\sqrt{6}} [(uds + usd) + (dus + dsu) + (sud + sdu)] \quad (8.10.3)$$

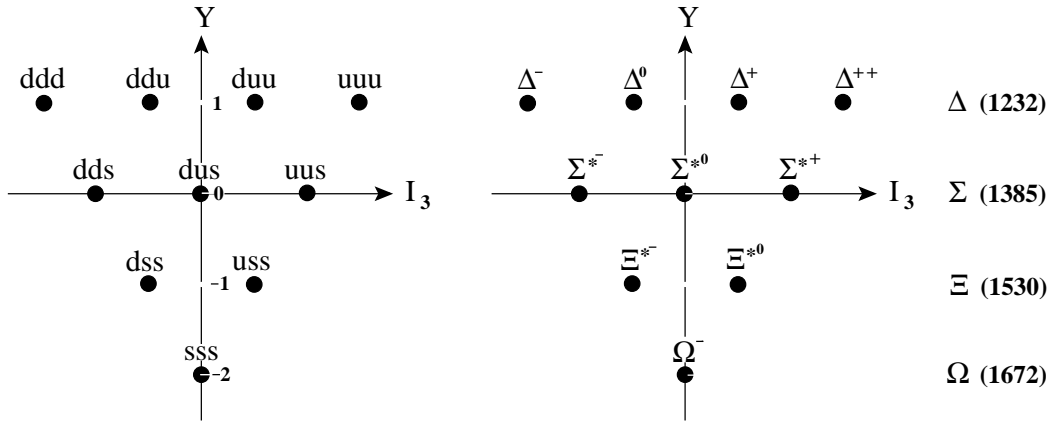


FIG. 8.10.1 – Décuplet $J^P = \frac{3}{2}^+$ et baryons correspondants.

Les opérateurs I_{\pm} peuvent être utilisés pour construire les états intermédiaires à partir des états situés aux sommets du triangle (voir figure 8.10.2) ; par exemple :

$$\begin{aligned} I_-(uuu) &\approx I_-(u)uu + uI_-(u)u + uuI_-(u) \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} (duu + udu + uud) \end{aligned} \quad (8.10.4)$$

Le facteur $\frac{1}{\sqrt{3}}$ est introduit pour assurer la normalisation de la fonction d'onde.

Relevons que des états de fermions dont la fonction d'onde est complètement symétrique sont proscrits par le principe d'exclusion de Pauli. Dans le cas présent, l'antisymétrie globale est restaurée par l'adjonction d'une composante d' $\text{SU}(3)_{\text{couleur}}$ antisymétrique.

Les quarks sont porteurs d'une charge de couleur, susceptible de prendre trois valeurs différentes¹³³. Formellement on peut désigner ces trois couleurs par leurs

¹³³Le concept de la charge de couleur des quarks sera développé au § 8.15.

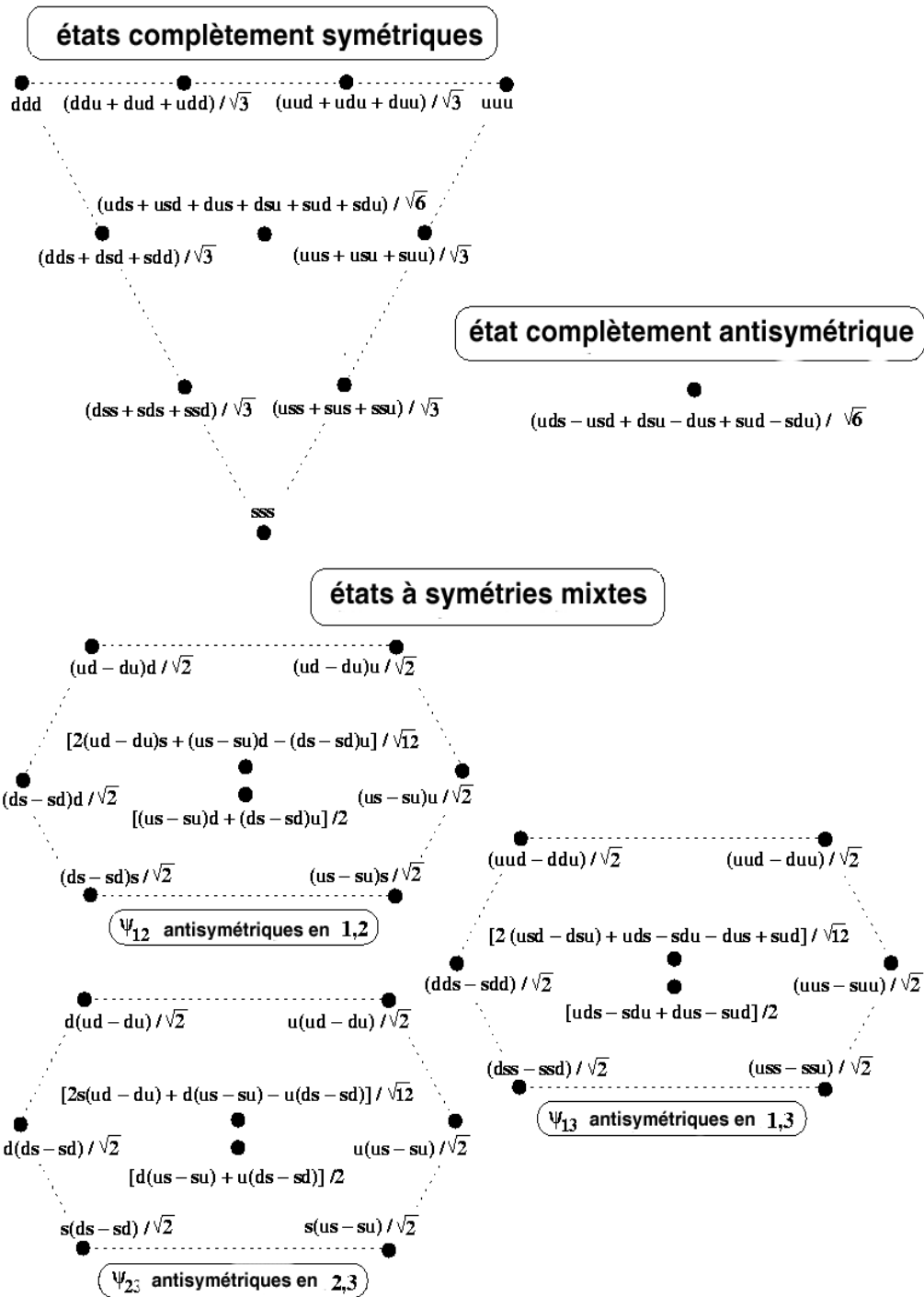


FIG. 8.10.2 – Configurations du système $(qq\bar{q})$ prédites par $SU(3)_{\text{saveur}}$.

initiales, par exemple celles des trois couleurs **red**, **green**, **blue**. Pour les états qqq (baryons), on prescrit que :

$$\begin{aligned} |\text{composante } (\text{SU}(3)_{\text{couleur}}) \rangle &= |\text{antisym. rgb}\rangle = \\ &= \frac{1}{\sqrt{6}} [(\text{rgb}-\text{rbg}) + (\text{gbr}-\text{grb}) + (\text{brg}-\text{bgr})] \end{aligned} \quad (8.10.5)$$

Ces états sont donc des singulets d' $\text{SU}(3)_{\text{couleur}}$, c'est à dire "incolores".

Pour les états d'antibaryons, on définit les charges de couleur complémentaires \bar{r} , \bar{g} , \bar{b} , au même titre qu'on a des charges électriques de signes opposés. Il n'y a ensuite qu'à faire les substitutions adéquates dans 8.10.5.

Notons ici que les systèmes liés $\bar{q}q$ (mésons) échappent à la contrainte de la statistique de Fermi-Dirac ; on garde cependant la prescription qu'il s'agit d'états "incolores", ce qui conduit à écrire leur composante d' $\text{SU}(3)_{\text{couleur}}$ sous la forme :

$$\begin{aligned} |\text{composante d}'\text{SU}(3)_{\text{couleur}} \text{ de } \bar{q}q \rangle &= \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} (\bar{r}r + \bar{g}g + \bar{b}b) \end{aligned} \quad (8.10.6)$$

L' état du singulet {1}.

Dans l'état singulet, la composante d' $\text{SU}(3)_{\text{saveur}}$ est complètement antisymétrique (figure 8.10.2) :

$$\begin{aligned} |\text{composante } (\text{SU}(3)_{\text{saveur}} \text{ de } qq\bar{q}) \rangle &\implies \text{antisym.}(uds) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{6}} [u(sd - ds) + d(us - su) + s(du - ud)] \end{aligned} \quad (8.10.7)$$

Q. : 1) montrer que l'état singulet d' $\text{SU}(3)_{\text{saveur}}$ du système $qq\bar{q}$ avec $\underline{L} = \underline{0}$ est interdit par la statistique de Fermi-Dirac compte tenu des prescriptions sur $\text{SU}(3)_{\text{couleur}}$;

2) chercher un candidat pour ce singulet d' $\text{SU}(3)_{\text{saveur}}$ dans la table PDG et en donner les nombres quantiques.

Les états des octets {8} et {8'}.

La composante d' $\text{SU}(3)_{\text{saveur}}$ a une symétrie mixte relativement aux paires de quarks q_1q_2 , q_2q_3 et q_1q_3 . On peut construire ainsi (voir figure 8.10.2) trois octets ψ_{12} , ψ_{23} et ψ_{13} dont deux seulement sont indépendants. Effectivement, on peut vérifier en prenant les termes correspondants des octets que $\psi_{13} = \psi_{12} + \psi_{23}$.

Les opérateurs I_{\pm} permettent de transiter d'un état à l'autre le long de l'axe I_3 de l'octet. Par exemple, partant de l'état $\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}(ud - du)d$ dans l'octet ψ_{12} ,

on a :

$$\begin{aligned}
I_+[(ud - du)d] &= I_+[ud - du]d + (ud - du)I_+[d] \\
&= (I_+[u]d + uI_+[d] - I_+[d]u + dI_+[u])d + (ud - du)u \quad (8.10.8) \\
&= (0 + uu - uu + 0)d + (ud - du)u \\
&= (ud - du)u
\end{aligned}$$

La construction de la composante spinorielle n'est pas triviale. Rappelons que la fonction d'onde totale du système des trois quarks doit être antisymétrique :

$$\begin{aligned}
\underbrace{|q_1 q_2 q_3\rangle}_{\text{antisym.}} &= \underbrace{|\text{comp. spatiale } L=0\rangle}_{\text{symétrique}} \cdot \underbrace{|\text{comp. de spin}\rangle}_{?} \cdot \underbrace{|\text{comp. d'SU}(3)_{\text{saveur}}\rangle}_{\text{sym. mixte}} \cdot \\
&\quad \cdot \underbrace{|\text{comp. d'SU}(3)_{\text{couleur}}\rangle}_{\text{antisymétrique}} \quad (8.10.9)
\end{aligned}$$

Cette contrainte implique que la fonction d'onde soit symétrique par l'échange simultané du spin et de la saveur. La structure de la composante spinorielle est donc déterminée par la symétrie mixte de la composante d'SU(3)_{saveur}. Illustrons cette corrélation en raisonnant de nouveau sur l'état $\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}(ud - du)d$ de l'octet ψ_{12} . Dans un premier temps, on associe la partie antisymétrique en saveurs ($ud - du$) à une composante antisymétrique en spins des quarks :

$$(ud - du) \otimes (\uparrow\downarrow - \downarrow\uparrow) = u \uparrow d \downarrow - u \downarrow d \uparrow - d \uparrow u \downarrow + d \downarrow u \uparrow \quad (8.10.10)$$

L'association ainsi réalisée est manifestement symétrique, ce qu'on peut vérifier en échangeant la position des deux quarks. Remarquons de plus qu'elle donne une contribution nulle au spin du système. Dans un second temps, on complète l'association ci-dessus en adjoignant à chacun des termes de droite de 8.10.10 le troisième quark muni de son spin ($d \uparrow$ ou $d \downarrow$). Dans un troisième temps, on symétrise l'état obtenu en effectuant dans chacun de ces termes une permutation de la position du troisième quark par rapport aux deux autres. L'expression finale comporte 12 termes qui peuvent être partiellement regroupés comme suit :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{18}} &[-2(d \uparrow d \uparrow u \downarrow) - 2(d \uparrow u \downarrow d \uparrow) - 2(u \downarrow d \uparrow d \uparrow) \\
&+ u \uparrow d \uparrow d \downarrow + u \uparrow d \downarrow d \uparrow + d \downarrow u \uparrow d \uparrow \\
&+ d \uparrow u \uparrow d \downarrow + d \uparrow d \downarrow u \uparrow + d \downarrow d \uparrow u \uparrow] \quad (8.10.11)
\end{aligned}$$

Le facteur $\frac{1}{\sqrt{18}}$ assure la normalisation de l'état. Le spin du système est déterminé par le spin du troisième quark ($J = 1/2$, $J_Z = \pm 1/2$).

La même démarche peut être empruntée pour les autres membres de l'octet ψ_{12} (figure 8.10.2) ainsi que pour les membres de l'octet ψ_{23} . On obtient des expressions identiques membre à membre pour ces deux octets (à vérifier à titre d'exercice); ainsi les octets $\{8\}$ et $\{8'\}$ dans 8.10.1 se confondent, une fois les composantes de spin introduites et la symétrisation adéquate effectuée. Les expressions détaillées pour l'ensemble des membres de l'octet baryonique se trouvent dans la littérature spécialisée¹³⁴. Notons que ces expressions se trouvent souvent écrites sous une forme rationalisée plus commode pour l'exploitation. Par exemple, on trouve 8.10.11 écrite comme suit :

$$8.10.11 \implies \frac{1}{\sqrt{6}} \left[-2 \left\langle \begin{array}{ccc} \downarrow & \uparrow & \uparrow \\ u & d & d \end{array} \right\rangle + \left\langle \begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \downarrow \\ u & d & d \end{array} \right\rangle + \left\langle \begin{array}{ccc} \uparrow & \downarrow & \uparrow \\ u & d & d \end{array} \right\rangle \right] \quad (8.10.12)$$

$$\text{où} \quad \left\langle \begin{array}{ccc} \downarrow & \uparrow & \uparrow \\ u & d & d \end{array} \right\rangle \equiv_{\text{symétr.}} \frac{1}{\sqrt{3}} [u \downarrow d \uparrow d \uparrow + d \uparrow d \uparrow u \downarrow + d \uparrow u \downarrow d \uparrow]$$

En conclusion, l'application des règles de symétrie unitaire et des règles de la statistique de Fermi-Dirac amène à prédire que les baryons (antibaryons) non étranges et étranges dans l'état fondamental se situent dans le décuplet de spin $J = 3/2$ (figure 8.10.1) et dans l'octet de spin $J = 1/2$ (figure 8.11.1).

8.11 $SU(3)_{\text{savoir}} \otimes SU(2)_{\text{spin}}$.

La procédure décrite au § 8.10 peut-être étendue et formalisée en s'appuyant sur les règles de la théorie des groupes. La combinaison des symétries $SU(3)_{\text{savoir}}$ et $SU(2)_{\text{spin}}$ engendre la symétrie $SU(6)_{\text{savoir-spin}}$. Les états de base de la représentation 6 sont :

$$u \uparrow = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u \downarrow = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad d \uparrow = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad d \downarrow = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$s \uparrow = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad s \downarrow = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

¹³⁴Voir par ex. W.M. Gibson et B.R. Pollard, Symmetry Principles in Elementary Particle Physics. Ed. Cambridge University Press. (1976) Table 11.6.

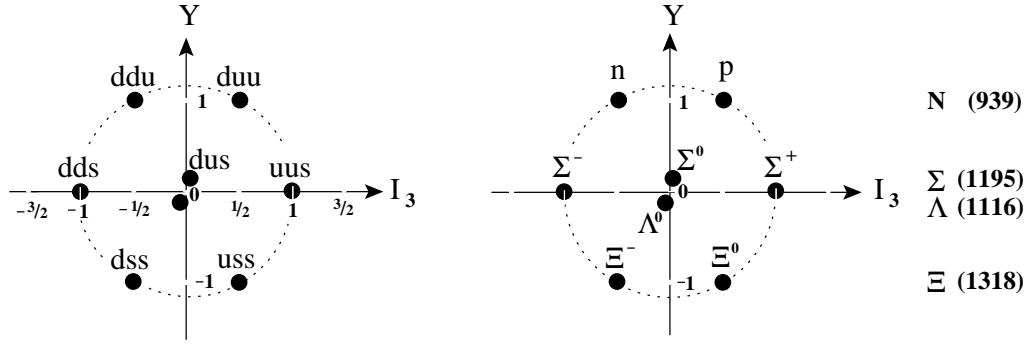


FIG. 8.11.1 – Octet $J^P = \frac{1}{2}^+$ et baryons correspondants.

Dans le cas d'un système de trois quarks (antiquarks), on peut constituer 216 états, à distribuer entre différents multiplets qui se distinguent par leurs propriétés de symétrie. Le tableau 8.11.1 aide à comprendre comment les symétries des parties $SU(3)_{\text{saveur}}$ et $SU(2)_{\text{spin}}$ se combinent. On obtient la décomposition suivante :

$$\mathbf{6} \otimes \mathbf{6} \otimes \mathbf{6} = \mathbf{56}_S \oplus \mathbf{70}_M \oplus \mathbf{70}'_M + \mathbf{20}_A$$

où S signifie complètement symétrique, A complètement antisymétrique et M à symétrie mixte.

Le 56-plet complètement symétrique est formé à l'aide des produits $S \otimes S$ et $M \otimes M$ et il se décompose comme suit :

$$\mathbf{56} = \mathbf{10} \left(J = \frac{3}{2} \right) \oplus \mathbf{8} \left(\frac{1}{2} \right)$$

On lui associe le décuplet et l'octet des baryons connus dans l'état d'excitation $L = 0$.

Le 20-plet complètement antisymétrique et le 70-plet à symétrie mixte se décomposent comme suit :

$$\begin{aligned} \mathbf{20} &= \mathbf{1} \left(\frac{3}{2} \right) \oplus \mathbf{8} \left(\frac{1}{2} \right) \\ \mathbf{70} &= \mathbf{10} \left(\frac{1}{2} \right) \oplus \mathbf{8} \left(\frac{3}{2} \right) \oplus \mathbf{8} \left(\frac{1}{2} \right) \oplus \mathbf{1} \left(\frac{1}{2} \right) \end{aligned}$$

Le 70'-plet a la même structure que le 70-plet et ne s'en distingue que par des symétries sous-jacentes opposées dans les paires de quarks constituantes. Ces différents multiplets trouvent des affectations dans les résonances baryoniques correspondant aux états d'excitation $L = 1, 2, \dots$. On se situe alors dans le cadre

des représentations d' $SU(6) \otimes O(3)$, où $O(3)$ concerne la partie spatiale de la fonction d'onde.

Symétrie $SU(3)_{\text{saveur}}$	S	M	A
Symétrie $SU(2)_{\text{spin}}$			
$S(J = \frac{3}{2})$	S	M	A
$M(J = \frac{1}{2})$	M	S, M, A	M

TAB. 8.11.1 – Symétries $SU(6)_{\text{saveur-spin}}$ du système de 3 quarks en fonction des symétries $SU(3)_{\text{saveur}}$ et $SU(2)_{\text{spin}}$. Notons qu'il n'existe pas d'état complètement antisymétrique de spin pour le système de 3 quarks dans l'état fondamental ($L = 0$).

8.12 Applications numériques du modèle statique des quarks.

8.12.1 Chromomagnétisme dans les mésons pseudoscalaires ($J^P = 0^-$) et les mésons vecteurs ($J^P = 1^-$).

On fait ici un retour au § 8.9 et plus spécifiquement au terme $M^{(2S+1)L_J}$ dans l'expression de la masse du système $\bar{q}q$ (relation 8.9.4). Dans le cas des mésons pseudoscalaires et vecteurs ($L = 0$, $S = J = 0$ et 1), ce terme se réduit à l'effet de la configuration des spins du quark et de l'antiquark. Dans QCD, il est représenté comme le résultat de l'interaction chromomagnétique entre les moments associés aux charges de couleur¹³⁵ :

$$\Delta E_{\text{chromo}} = \frac{8\pi\alpha}{3} |\psi(0)|^2 \frac{\langle \mathbf{s}_{\bar{q}} \cdot \mathbf{s}_q \rangle}{m_{\bar{q}} \cdot m_q} \quad \text{où :} \quad (8.12.1)$$

$$\alpha = \alpha_{\bar{q}q} = \frac{4}{3}\alpha_s, \quad \alpha_s = \text{constante de couplage fort},$$

$$\psi(r_{\bar{q}}, r_q) = \text{fonction d'onde du système } \bar{q}q \text{ prise à l'origine } (r_{\bar{q}} = r_q = 0),$$

¹³⁵Une relation analogue décrit l'interaction électromagnétique entre le moment magnétique de l'électron et celui du proton dans l'atome d'hydrogène; dans ce cas, $\alpha = \alpha_e$ est la constante de structure fine. Voir un livre de physique atomique, au chapitre sur la structure hyperfine du spectre optique.

$m_{\bar{q}}(m_q)$ et $\mathbf{s}_{\bar{q}}(\mathbf{s}_q)$ = masse et spin de l'antiquark (quark).

méson	J^P, I	masse mesurée [GeV]	masses effectives des constituants	ΔE_{chromo}
π	$0^-, 1$	$\simeq 0.140$	$2m_0$	$-\frac{3}{4} \frac{K_{\bar{q}q}}{m_0^2}$
$K(\bar{K})$	$0^-, 1/2$	$\simeq 0.490$	$m_0 + m_s$	$-\frac{3}{4} \frac{K_{\bar{q}q}}{m_0 m_s}$
ρ	$1^-, 1$	$\simeq 0.770$	$2m_0$	$\frac{1}{4} \frac{K_{\bar{q}q}}{m_0^2}$
$K^*(\bar{K}^*)$	$1^-, 1/2$	$\simeq 0.890$	$m_0 + m_s$	$\frac{1}{4} \frac{K_{\bar{q}q}}{m_0 m_s}$

TAB. 8.12.1 – Contributions à la masse de mésons pseudoscalaires et vecteurs, selon le modèle statique des quarks.

Le couplage de spin moyen vaut :

$$\begin{aligned}
 \langle \mathbf{s}_{\bar{q}} \cdot \mathbf{s}_q \rangle &= \frac{1}{2} \left[J(J+1) - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + 1 \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + 1 \right) \right] \\
 &= \begin{cases} -\frac{3}{4} & \text{pour } J = 0 \\ \frac{1}{4} & \text{pour } J = 1 \end{cases}
 \end{aligned} \tag{8.12.2}$$

Le tableau 8.12.1 donne les contributions des masses effectives (constitutives) et de l'interaction chromomagnétique dans les isotriplets des mésons π et ρ et les isodoublets des mésons K et K^* . On a repris la notation du § 8.9 ; de plus pour alléger l'écriture on a posé :

$$\frac{32\pi}{9} \alpha_s |\psi(0)|^2 = K_{\bar{q}q}$$

En composant les masses dans l'octet vecteur et l'octet pseudoscalaire :

$$m_\rho(770) - m_\pi(140) \implies \frac{K_{\bar{q}q}}{m_0^2} \simeq 0.630 \text{ GeV} \tag{8.12.3}$$

$$m_{K^*}(890) - m_K(490) \implies \frac{K_{\bar{q}q}}{m_0 \cdot m_s} \simeq 0.400 \text{ GeV} \tag{8.12.4}$$

$$\text{d'où : } \frac{m_s}{m_0} \simeq 1.6 \tag{8.12.5}$$

En comparant les masses à l'intérieur des octets :

$$\begin{aligned}
m_K(490) - m_\pi(140) &= m_s - m_0 - \frac{3}{4} \left(\frac{K_{\bar{q}q}}{m_0 m_s} - \frac{K_{\bar{q}q}}{m_0^2} \right) \\
&\simeq 0.350 \text{ GeV} \\
m_K^*(890) - m_\rho(770) &= m_s - m_0 + \frac{1}{4} \left(\frac{K_{\bar{q}q}}{m_0 m_s} - \frac{K_{\bar{q}q}}{m_0^2} \right) \\
&\simeq 0.120 \text{ GeV}
\end{aligned} \tag{8.12.6}$$

d'où en combinant 8.12.4, 8.12.5 et 8.12.6 :

$$\begin{aligned}
m_s - m_0 &\simeq 0.180 \text{ GeV} \\
m_0 &\simeq 0.300 \text{ GeV} \quad (\text{quarks } u, d) \\
m_s &\simeq 0.480 \text{ GeV} \quad (\text{quark } s)
\end{aligned} \tag{8.12.7}$$

Notons qu'il s'agit ici de masses effectives (constitutives) des quarks dans les mésons ; elles ne doivent pas être confondues avec les masses "courantes" entrant dans la construction du Lagrangien QCD.

8.12.2 Chromomagnétisme dans les baryons du décuplet ($J^P = \frac{3}{2}^+$) et de l'octet ($J^P = \frac{1}{2}^+$).

Dans ces systèmes de trois quarks (antiquarks), on peut former trois paires $q\bar{q}$ ($\bar{q}\bar{q}$) dont il faut déterminer les contributions à l'interaction chromomagnétique et en faire la somme.

La contribution d'une paire $q_1\bar{q}_2$ est représentée par une expression du type (8.12.1), dans laquelle $\alpha = \alpha_{q\bar{q}} = \frac{2}{3}\alpha_s$, $\alpha_s =$ constante de couplage fort¹³⁶.

Le tableau 8.12.2 montre les contributions des masses effectives et de l'interaction chromomagnétique totale dans le décuplet ($J^P = \frac{3}{2}^+$) et l'octet ($J^P = \frac{1}{2}^+$). On a posé : $\frac{16\pi}{9}\alpha_s |\psi(0)|^2 = K_{q\bar{q}}$.

Dans le cas du décuplet, l'évaluation des couplages de spin est simple à faire, puisque les trois spins sont alignés. Pour chacune des paires de quarks, on a (de 8.12.2) : $\langle \mathbf{s}_{q_i} \cdot \mathbf{s}_{q_j} \rangle = \frac{1}{4}$, et il suffit de pondérer par l'inverse des masses concernées pour obtenir le ΔE_{chromo} correspondant.

En ce qui concerne l'octet, l'évaluation des couplages de spin requiert une attention particulière, car le résultat diffère d'un multiplet d'isospin à l'autre, ce

¹³⁶Le facteur $\frac{1}{2}$ entre $\alpha_{q\bar{q}}$ et $\alpha_{\bar{q}q}$ sera justifié au § 8.15

baryon	J^P, I	masse mesurée [GeV]	masses effectives des constituants	ΔE_{chromo}
$\Delta(1232)$	$\frac{3}{2}^+, \frac{3}{2}$	$\simeq 1.23$	$3m_0$	$\frac{3}{4} \frac{K_{qq}}{m_0^2}$
$\tau(1385)$	$\frac{3}{2}^+, 1$	$\simeq 1.38$	$2m_0 + m_s$	$\frac{1}{2} \frac{K_{qq}}{m_0 m_s} + \frac{1}{4} \frac{K_{qq}}{m_0^2}$
$\Xi(1530)$	$\frac{3}{2}^+, \frac{1}{2}$	$\simeq 1.53$	$m_0 + 2m_s$	$\frac{1}{2} \frac{K_{qq}}{m_0 m_s} + \frac{1}{4} \frac{K_{qq}}{m_s^2}$
$\Omega(1672)$	$\frac{3}{2}^+, 0$	$\simeq 1.67$	$3m_s$	$\frac{3}{4} \frac{K_{qq}}{m_s^2}$
$N(939)$	$\frac{1}{2}^+, \frac{1}{2}$	$\simeq 0.94$	$3m_0$	$-\frac{3}{4} \frac{K_{qq}}{m_0^2}$
$\Lambda(1116)$	$\frac{1}{2}^+, 0$	$\simeq 1.12$	$2m_0 + m_s$	$-\frac{3}{4} \frac{K_{qq}}{m_0^2}$
$\tau(1179)$	$\frac{1}{2}^+, 1$	$\simeq 1.18$	$m_0 + 2m_s$	$-\frac{K_{qq}}{m_0 m_s} + \frac{1}{4} \frac{K_{qq}}{m_0^2}$
$\Xi(1318)$	$\frac{1}{2}^+, \frac{1}{2}$	$\simeq 1.33$	$3m_s$	$-\frac{K_{qq}}{m_0 m_s} + \frac{1}{4} \frac{K_{qq}}{m_s^2}$

TAB. 8.12.2 – Contributions à la masse des baryons du décuplet et de l’octet, selon le modèle statique des quarks.

qui se répercute sur le ΔE_{chromo} correspondant. A titre d’exemple, nous examinons en détail le cas des hyperons $\Sigma(1179)$ et $\Lambda(1116)$, formés de deux quarks légers (1,2, d’isospin $I_{1\text{ou}2} = \frac{1}{2}$) et d’un quark étrange ($s, I_s = 0$).

Dans l’isotriplet $\Sigma(I_\Sigma = 1)$ la paire formée des deux quarks légers est nécessairement dans l’état symétrique d’isospin ($I_{\text{paire}} = 1$) et dans l’état symétrique de spin¹³⁷ ; d’où (de 8.12.2) : $\langle \mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{s}_2 \rangle = \frac{1}{4}$. D’autre part :

$$\sum_{i < j} \langle \mathbf{s}_i \cdot \mathbf{s}_j \rangle = \frac{1}{2} \left[J_\Sigma(J_\Sigma + 1) - 3 \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + 1 \right) \right] = -\frac{3}{4}$$

ce qui laisse pour l’ensemble des deux paires mixtes (1, s et 2, s) :

$$\langle \mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{s}_s \rangle + \langle \mathbf{s}_2 \cdot \mathbf{s}_s \rangle = -\frac{3}{4} - \frac{1}{4} = -1.$$

¹³⁷Rappelons que l’antisymétrie de la fonction d’onde est assurée par sa partie $\text{SU}(3)_{\text{couleur}}$.

Après pondération par l'inverse des masses, on obtient (voir tableau 8.12.2) :
 $\Delta E_{\text{chromo}} = -\frac{K_{qq}}{m_0 m_s} + \frac{1}{4} \frac{K_{qq}}{m_0^2}$.

Dans l'isosingulet $\Lambda (I_\Lambda = 0)$, la paire des quarks légers est l'état antisymétrique d'isospin ($I_{\text{paire}} = 0$) et dans l'état antisymétrique de spin. On obtient dans ce cas :
 $\langle \mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{s}_2 \rangle = -\frac{3}{4}$, $\langle \mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{s}_s \rangle + \langle \mathbf{s}_2 \cdot \mathbf{s}_s \rangle = -\frac{3}{4} + \frac{3}{4} = 0$, et $\Delta E_{\text{chromo}} = -\frac{3}{4} \frac{K_{qq}}{m_0^2}$.

Q. : déterminer les couplages de spin dans les paires de quarks du doublet $N(939)$ et du doublet $\Xi(1318)$; tenir compte du fait que ces systèmes comprennent deux quarks de même saveur.

L'ajustement à l'ensemble des masses mesurées (tableau 8.12.2) donne :

$$m_0 \simeq 0.360 \text{ GeV} \quad ; \quad m_s \simeq 0.540 \text{ GeV} \quad (8.12.8)$$

$$m_s/m \simeq 1.5 \quad (8.12.9)$$

$$\frac{K_{qq}}{m_0^2} \simeq 0.200 \text{ GeV} \quad ; \quad \frac{K_{qq}}{m_0 m_s} \simeq 0.135 \text{ GeV} \quad (8.12.10)$$

Ces résultats sont en accord qualitatif (10 à 20%) avec ceux obtenus dans les octets mésoniques.

8.12.3 Moments (électro)magnétiques dipolaires de l'hypéron $\Omega (J^P = \frac{3}{2}^+)$ et des baryons de l'octet ($J^P = \frac{1}{2}^+$).

En l'absence de moment orbital ($L = 0$), le vecteur moment magnétique du baryon est la somme des vecteurs moments magnétiques des trois quarks constituants :

$$\boldsymbol{\mu}_B = \sum_{i=1} \boldsymbol{\mu}_{qi} \quad , \quad \boldsymbol{\mu}_{qi} = \mu_{qi} \cdot \boldsymbol{\sigma}_{qi} \quad (8.12.11)$$

où :

$\boldsymbol{\sigma}_{qi}$ est l'opérateur de spin,

$\mu_{qi} \simeq Q_{qi} \frac{e\hbar}{2m_{qi}c}$ (pour les applications présentes, on suppose les quarks ponctuels et on néglige l'effet d'une éventuelle anomalie),

Q_{qi} est l'opérateur de charge (avec son signe),

$\frac{e\hbar}{2m_{qi}c}$ est le magnéton intrinsèque.

Par convention, on exprime la valeur du moment magnétique (comme en général celle du moment angulaire) comme le maximum de sa composante selon l'axe

de quantification choisi (et non comme le module de $\boldsymbol{\mu}$!). Pour les quarks u , d et s , avec $\sigma_Z = +1$, on obtient :

$$(\mu_u)_Z = +\frac{3}{2} \frac{e\hbar}{2m_u c}, \quad (\mu_d)_Z = -\frac{1}{3} \frac{e\hbar}{2m_d c}, \quad (\mu_s)_Z = -\frac{1}{3} \frac{e\hbar}{2m_s c}, \quad (8.12.12)$$

Les valeurs numériques de ces moments magnétiques sont communément données en unité de magnéton nucléaire : $\mu_N = \frac{e\hbar}{2m_p c}$, grandeur connue avec une grande précision (voir table PDG). Avec les valeurs des masses constitutives 8.12.8, on trouve par exemple :

$$\begin{aligned} (\mu_u)_Z &= \frac{2}{3} \frac{m_p}{m_u} \mu_N \simeq 1.7\mu_N \quad ; \quad (\mu_d)_Z = -\frac{1}{3} \frac{m_p}{m_d} \mu_N \simeq -0.9\mu_N \\ (\mu_s)_Z &= -\frac{1}{3} \frac{m_p}{m_s} \mu_N \simeq -0.6\mu_N \end{aligned}$$

Le moment magnétique d'un baryon B peut être exprimé sous la forme :

$$(\mu_B)_Z = \langle B \uparrow | \sum_{i=1}^3 (\mu_{qi})_Z | B \uparrow \rangle \quad (8.12.13)$$

où $|B \uparrow\rangle = |B, \sigma_Z = +1\rangle$ symbolise la fonction d'onde normalisée d' $\text{SU}(6)_{\text{saveur-spin}}$.

L'application la plus simple concerne l'hypéron Ω^- , puisqu'il s'agit d'un système de trois quarks s aux spins alignés ($J^P = \frac{3}{2}^+$) :

$$(\mu_\Omega)_Z = 3(\mu_s)_Z = -\frac{m_p}{m_s} \mu_N \simeq -1.8\mu_N$$

L'application du modèle aux baryons de l'octet $J^P = \frac{1}{2}^+$ requiert un certain effort ; nous l'illustrons par l'exemple du moment magnétique du neutron. Afin d'alléger l'écriture, on utilise la forme rationalisée 8.10.13 de la fonction d'onde d' $\text{SU}(6)_{\text{saveur-spin}}$:

$$|n \uparrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}} \left(-2 \left\langle \begin{array}{ccc} \downarrow & \uparrow & \uparrow \\ u & d & d \end{array} \right\rangle + \left\langle \begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \downarrow \\ u & d & d \end{array} \right\rangle + \left\langle \begin{array}{ccc} \uparrow & \downarrow & \uparrow \\ u & d & d \end{array} \right\rangle \right) \quad (8.12.14)$$

en rappelant que $\langle \dots \rangle$ signifie une symétrisation telle que :

$$\left\langle \begin{array}{ccc} \downarrow & \uparrow & \uparrow \\ u & d & d \end{array} \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} (u \downarrow d \uparrow d \uparrow + d \uparrow d \uparrow u \downarrow + d \uparrow u \downarrow d \uparrow) \quad (8.12.15)$$

Chacun des trois termes de (8.12.15) contribue par :

$$\left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right)^2 [-(\mu_u)_Z + (\mu_d)_Z + (\mu_d)_Z]$$

En insérant ce résultat dans le premier terme de (8.12.14) et en développant de la même manière les deux autres termes, on obtient :

$$\begin{aligned}
(\mu_n)_Z &= 3 \left(\frac{1}{\sqrt{6}} \right)^2 \left\{ 2^2 \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right)^2 [-(\mu_u)_Z + 2(\mu_d)_Z] \right. \\
&+ \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right)^2 [(\mu_u)_Z + (\mu_d)_Z - (\mu_d)_Z] \\
&+ \left. \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right)^2 [(\mu_u)_Z - (\mu_d)_Z + (\mu_d)_Z] \right\} \\
&= -\frac{1}{3}(\mu_u)_Z + \frac{4}{3}(\mu_d)_Z
\end{aligned} \tag{8.12.16}$$

On peut alternativement arriver à ce même résultat en raisonnant sur la dépendance spinorielle des fonctions d'onde. En effet, l'état de spin du neutron est déterminé par l'état de spin de son quark u et l'état (symétrique) de spin de la paire des quarks d . On a donc à combiner les états de spin $|\downarrow\rangle_u \cdot |\uparrow\uparrow\rangle_{dd}$ et $|\uparrow\rangle_u |\uparrow\downarrow + \downarrow\uparrow\rangle_{dd}$ avec des poids appropriés donnés par la table de coefficients de Clebsch-Gordan :

$$\left| \frac{1}{2}, +\frac{1}{2} \right\rangle_n = \sqrt{\frac{2}{3}} \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle_u |1, +1\rangle_{dd} - \sqrt{\frac{1}{3}} \left| \frac{1}{2}, +\frac{1}{2} \right\rangle_u |1, 0\rangle_{dd} \tag{8.12.17}$$

Le premier terme de 8.12.17 donne la contribution de $\frac{2}{3}[-(\mu_u)_Z + 2(\mu_d)_Z + 2(\mu_d)_Z]$, le second terme la contribution de $\frac{1}{3}[(\mu_u)_Z + 0]$, soit au total $-\frac{1}{3}(\mu_u)_Z + \frac{4}{3}(\mu_d)_Z$.

Dans $SU(6)_{\text{saveur-spin}}$, le proton ne diffère du neutron que par l'échange des saveurs u et d ; on s'attend donc à trouver :

$$(\mu_p)_Z = -\frac{1}{3}(\mu_d)_Z + \frac{4}{3}(\mu_u)_Z \tag{8.12.18}$$

ce qui peut se vérifier en effectuant le développement complet du calcul.

Dans le cas des différents hyperons de l'octet $J^P = \frac{1}{2}^+$, on s'appuyera sur les propriétés de symétrie discutées au § 8.12.2 pour établir les expressions de leur moment magnétique.

Les prédictions du modèle statique des quarks pour l'ensemble des baryons stables¹³⁸ sont consignées dans le tableau (8.12.3), ainsi que les valeurs mesurées correspondantes (voir table PDG). Les prédictions numériques (troisième colonne du tableau) sont fonctions des valeurs des masses constitutives des quarks; on a adopté ici les moyennes de (8.12.7) et (8.12.8), soit $m_u = m_d \simeq 0.33$ GeV, $m_s \simeq 0.51$ GeV.

Notons que les rapports $(\mu_p)_Z/(\mu_n)_Z$ et $(\mu_\Lambda)_Z/(\mu_\Omega)_Z$, qui sont indépendants de ces masses dans le cadre du modèle des quarks, sont en bon accord avec les rapports mesurés.

¹³⁸C'est-à-dire à vie moyenne relativement longue ($\gg 10^{-20}$ s), car se désintégrant par interaction faible ou électromagnétique.

baryon	moment magnétique dipolaire en unité μ_N		
	contributions des quarks	valeurs prédites	valeurs mesurées
p	$\frac{4}{3}(\mu_u)_Z - \frac{1}{3}(\mu_d)_Z$	2.84	$2.793\dots \pm (2.9 \cdot 10^{-8})$
n	$\frac{4}{3}(\mu_d)_Z - \frac{1}{3}(\mu_u)_Z$	-1.89	$-1.913\dots \pm (5 \cdot 10^{-7})$
Λ	$(\mu_s)_Z$	-0.61	-0.613 ± 0.004
Σ^+	$\frac{4}{3}(\mu_u)_Z - \frac{1}{3}(\mu_s)_Z$	2.72	2.458 ± 0.010
Σ^0	$\frac{2}{3}(\mu_u)_Z + \frac{2}{3}(\mu_d)_Z - \frac{1}{3}(\mu_s)_Z$	0.83	?
Σ^-	$\frac{4}{3}(\mu_d)_Z - \frac{1}{3}(\mu_s)_Z$	-1.06	-1.160 ± 0.025
Ξ^0	$\frac{4}{3}(\mu_s)_Z - \frac{1}{3}(\mu_u)_Z$	-1.44	-1.250 ± 0.014
Ξ^-	$\frac{4}{3}(\mu_s)_Z - \frac{1}{3}(\mu_d)_Z$	-0.49	-0.6507 ± 0.0025
Ω^-	$3(\mu_s)_Z$	-1.83	-2.02 ± 0.05

TAB. 8.12.3 – Moments magnétiques dipolaires des baryons de l'octet $J^P = \frac{1}{2}^+$ et de l'hypéron Ω^- ; prédictions du modèle statique des quarks et valeurs mesurées.

8.13 Extension aux nouvelles saveurs de quark.

La découverte des quarks c , b et t ¹³⁹ a rendu nécessaire l'extension de la classification des hadrons basée sur $SU(3)_{saveur}$. Nous nous bornons dans ces notes à une brève présentation de ces développements.

Le tableau 8.13.1 est un complément au tableau 8.8.1 et donne les valeurs des nombres quantiques additifs relevantes pour l'extension aux quarks lourds. La notation et la convention de signe sont celles de la table PDG. La charge baryonique ne figure plus explicitement dans le tableau 8.13.1 afin d'éviter la confusion avec la "bottomness" ; elle est néanmoins contenue ($\pm\frac{1}{3}$) dans la valeur

¹³⁹Rappel des dates de mises en évidence expérimentales :

quark c : 1974 (voir réf. § 7.5).

quark b : 1977 S.W. Herb et al. Phys. Rev. Lett. 39 (1977) 252.

quark t : 1994 F. Abe et al. Phys. Rev. Lett. 73 (1997) 225.

de l'hypercharge Y des différents quarks¹⁴⁰.

propriété	$d(\bar{d})$	$u(\bar{u})$	$s(\bar{s})$	$c(\bar{c})$	$b(\bar{b})$	$t(\bar{t})$
Q : charge élect.	$\mp \frac{1}{3}$	$\pm \frac{2}{3}$	$\mp \frac{1}{3}$	$\pm \frac{2}{3}$	$\mp \frac{1}{3}$	$\pm \frac{2}{3}$
I_3 : comp. 3 d'isospin	$\mp \frac{1}{2}$	$\pm \frac{1}{2}$	0	0	0	0
S : "strangeness"	0	0	∓ 1	0	0	0
C : "charm"	0	0	0	± 1	0	0
B : "bottomness"	0	0	0	0	∓ 1	0
T : "topness"	0	0	0	0	0	± 1
Y : hypercharge	$\pm \frac{1}{3}$	$\pm \frac{1}{3}$	$\mp \frac{2}{3}$	$\pm \frac{1}{3}$	$\mp \frac{1}{3}$	$\pm \frac{1}{3}$

TAB. 8.13.1 – Nombres quantiques additifs des quarks (antiquarks).

8.13.1 Extension au charme ; $SU(4)_{\text{savoir}}$.

Examinons la classification des hadrons comprenant au moins un quark c (ou un antiquark \bar{c}) et un (ou des) quark plus léger que ce quark c (u, d, s ou $\bar{u}, \bar{d}, \bar{s}$).

L'état générique à considérer est :

$$\varphi = \begin{pmatrix} u \\ d \\ s \\ c \end{pmatrix}$$

qui se transforme comme :

$$\varphi \Rightarrow \varphi' = U\varphi$$

¹⁴⁰On se conforme ici à la relation 4.10.6, où l'hypercharge Y est définie comme la charge baryonique + l'étrangeté, et à la relation 4.10.7 qui tient compte de l'extension aux nouvelles saveurs de quarks : $Q = \frac{1}{2}Y + \frac{1}{2}(\text{Cha.} + \text{Bot.} + \text{Top.}) + I_3$.

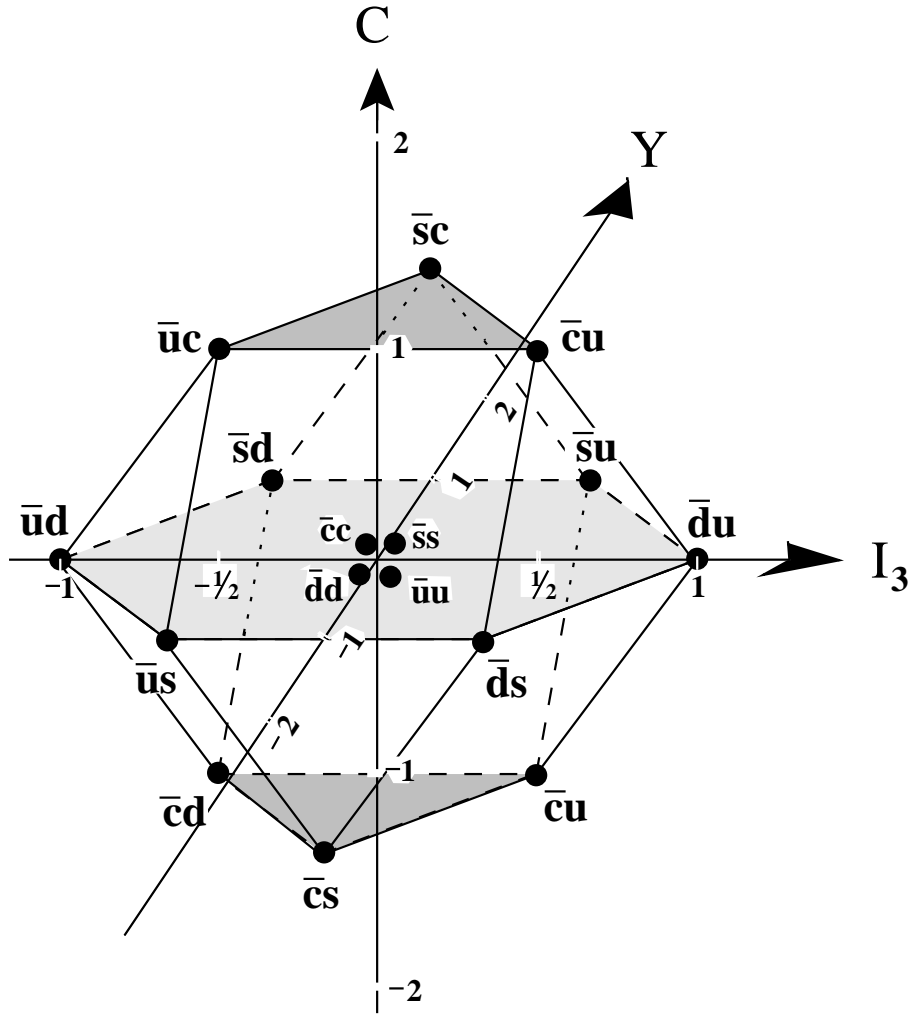


FIG. 8.13.1 – Les 16 états du système $\bar{q}q$ prédits par $SU(4)_{\text{saveur}}$ (saveurs u, d, s, c).

où $U \in SU(4)_{\text{saveur}}$ est construite à l'aide de 15 générateurs (matrices 4×4), satisfaisant à des relations de commutation du type 8.6.12¹⁴¹. Pour les représentations du groupe, il est usuel de conserver les axes $I_3 - Y$ d' $SU(3)_{\text{saveur}}$ en leur adjoignant l'axe C (le "Charm"). Des opérateurs d'échelle sont introduits comme auparavant pour engendrer des transitions entre états d'une même représentation ou de représentations différentes. Dans le cas présent des opérateurs X_{\pm} produisent des transitions le long de l'axe C , par exemple :

¹⁴¹Pour la forme explicite de ces matrices et pour les valeurs des constantes de structure d' $SU(4)$, voir par exemple : D. B. Lichtenberg Unitary Symmetry and Elementary Particles Ed. Acad. Press (1978), chap. 6.

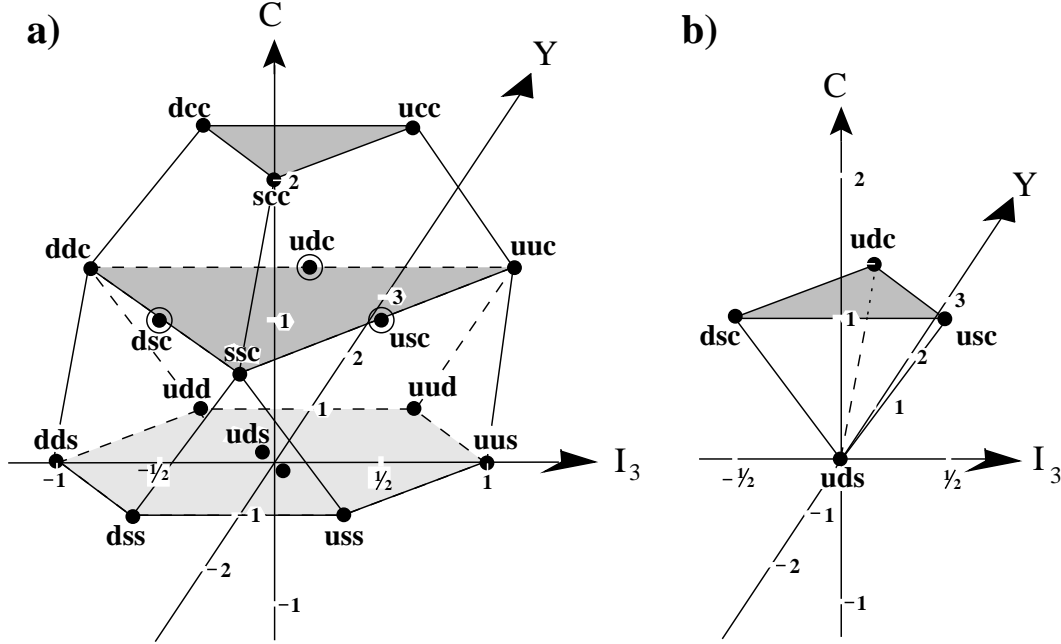


FIG. 8.13.2 – a) Les 20 états à symétries de saveur mixtes du système qqq prédits par $SU(4)_{\text{saveur}}$; b) les 4 états antisymétriques de saveur (non occupables si $L = 0$).

$$X_+|sss\rangle \Rightarrow |css\rangle, X_-|cuu\rangle \Rightarrow |uuu\rangle, \text{ etc.}$$

Les 16 états du système $\bar{q}q$ (mésons) sont distribués entre un singulet et un 15-plet d' $SU(4)_{\text{saveur}}$. La sous-structure d' $SU(3)_{\text{saveur}}$ est révélée par la décomposition : $\mathbf{15} \Rightarrow \mathbf{1} \oplus \mathbf{8} \oplus \bar{\mathbf{3}} \oplus \mathbf{3}$, où les membres du singulet et de l'octet ont $C = 0$ et les membres des triplets ont $C = \pm 1$. La figure 8.13.1 donne les positions de ces différents états dans l'espace $I_3 - Y - C$.

Q. : 1) en s'appuyant sur les figures 1.1.1 et 1.1.2, (§ 1.1), compléter la figure 8.13.1 en entrant les mésons non étranges et étranges avec $J^P = 0^-$ et $J^P = 1^-$;

2) en se référant à la table PDG la plus récente, entrer les mésons charmés avec $J^P = 0^-$ et $J^P = 1^-$.

Les 64 états du système qqq (baryons) sont répartis entre un 20-plet symétrique 20_S , deux 20-plets à symétries mixtes $20_M, 20'_M$ et un quadruplet antisymétrique $\bar{4}_A$. Le contenu d' $SU(3)_{\text{saveur}}$ se retrouve en effectuant les décompositions

l'ensemble des mésons et d'une grande partie des baryons avec $C = \pm 1$. Aucun baryon doublement charmé n'a encore été observé. Les spectres de masses font apparaître que la brisure de la symétrie $SU(4)_{\text{saveur}}$ est nettement accentuée par rapport à celle sous-jacente d' $SU(3)_{\text{saveur}}$.

Q. : 1) en s'appuyant sur les figures 1.1.3 et 1.1.4, (§ 1.1), compléter les figures 8.13.2 et 8.13.3 en entrant les baryons non étranges et étranges avec $J^P = \frac{1}{2}^+$ et $J^P = \frac{3}{2}^+$;

2) en se référant à la table PDG la plus récente, entrer les baryons charmés avec $J^P = \frac{1}{2}^+$ et $J^P = \frac{3}{2}^+$.

Q. : relever dans la table PDG les masses des mésons D^\pm et $D^0(\bar{D}^0)$ et celles des baryons charmés Σ_c^{++} et Σ_c^0 ; les comparer aux masses des mésons K^\pm et $K^0(\bar{K}^0)$ et à celle des hyperons Σ^\pm . Utiliser des relations de chromomagnétisme (§ 8.12) pour évaluer la masse effective (constitutive) du quark c .

L'étude des processus faibles impliquant les hadrons charmés a permis de déterminer les éléments V_{cd} et V_{cs} de la matrice CKM (voir § 7.6). L'étude des désintégrations faibles des mésons D^0 et D_s^0 sont d'un grand intérêt par comparaison à celle du $K^0(\bar{K}^0)$, car elles donnent également lieu au phénomène de mélange d'états (voir § 4.6).

Les propriétés du charmonium (système $\bar{c}c$) seront examinées au § 8.14.

8.13.2 Extension à la "bottomness" : $SU(5)_{\text{saveur}}$.

On considère ici la situation des hadrons formés au moins d'un quark $b(\bar{b})$ et d'un (ou de) quark plus léger (u, d, s, c ou $\bar{u}, \bar{d}, \bar{s}, \bar{c}$).

L'état générique est un vecteur à cinq composantes dont les transformations sont régies par les règles de la symétrie $SU(5)_{\text{saveur}}$ (24 générateurs).

Les états du système $\bar{q}q$ (mésons) comprennent un singulet d' $SU(5)_{\text{saveur}}$ et d'un 24-plet. Le système qqq (baryons) forme un multiplet de 125 états qui se décompose comme : $\mathbf{125} = \mathbf{35}_S \oplus \mathbf{40}_M \oplus \mathbf{40}'_M \oplus \mathbf{10}_A$. Les baryons de spin $J = \frac{3}{2}$ sont à associer au 35_S -plet, ceux de spin $J = \frac{1}{2}$ au 40_M -plet (40_M et $40'_M$ se confondent une fois le spin introduit).

L'investigation menée depuis 1977 a permis l'identification de tous les mésons B attendus et d'un certain nombre de leurs états excités ; par contre, seuls les baryons Λ_b^0 (système udb), Ξ_b^0 (usb) et Ξ_b^- (dsb) sont reconnus (table PDG 2002). Les spectres de masses montrent que la brisure de symétrie est beaucoup plus importante que dans $SU(4)_{\text{saveur}}$.

Q. : rechercher les masses du méson B^\pm et du Λ_b^0 dans la table PDG, les comparer aux masses du K^\pm et du Λ ; en déduire la masse effective (constitutive) du quark

b.

L'étude des désintégrations faibles du B^\pm et du B_c^\pm a permis de déterminer les valeurs des éléments V_{ub} et V_{cb} de la matrice CKM.

Les propriétés des désintégrations faibles du $B^0(\overline{B}^0)$ et du $B_s^0(\overline{B}_s^0)$ sont à mettre en relation avec celles des mésons $K^0(\overline{K}^0)$, $D^0(\overline{D}^0)$ et $D_s^0(\overline{D}_s^0)$. Leur étude est d'une importance majeure comme test additionnel (voir § 4.6) de la violation de CP dans des processus faibles. Notons que la situation est plus favorable d'un point de vue expérimental avec les mésons B^0 qu'avec les mésons D^0 , car la signature des désintégrations est mieux reconnaissable ($m_b \gg m_c$).

Les propriétés du bottomonium (système $\overline{b}b$) sont exposées au § 8.14.

8.13.3 Extension au top.

Ce secteur n'a pas encore été exploré.

Dans l'expérience ayant conduit à la découverte du quark t (Tevatron, Lab. de Fermi 1994), les mécanismes de production dominants sont :

$$\begin{array}{l} \overline{q}q \rightarrow \overline{t}t \quad \text{et} \quad gg \rightarrow \overline{t}t \quad (\text{toponium}) \\ \text{où} \quad \overline{t} \rightarrow W^- \overline{b} \quad \text{et} \quad t \rightarrow W^+ b \end{array}$$

Les bosons W^\pm sont identifiés via leurs produits de désintégration leptonique et hadronique. Le quark b est reconnu via sa signature de jet caractéristique.

8.14 Les quarkonia.

On appelle communément quarkonia les états liés et sans saveur (à saveur cachée), où $q(\overline{q})$ concerne un des quarks lourds c , b ou t . Le charmonium est le système $\overline{c}c$, le bottomonium le système $\overline{b}b$ et le toponium le système $\overline{t}t$. Expérimentalement, on observe leur formation dans les collisions e^+e^- , $\overline{p}p$ ou p -noyau aux hautes énergies, sous la forme d'étroits pics de résonance dans les sections efficaces totale et partielle (voir par ex. la figure 7.4.4). Historiquement, ces observations ont joué un rôle majeur dans la confirmation de l'existence des différentes saveurs de quark.

Dans une description non relativiste, un système $\overline{q}q$ est caractérisé par son moment angulaire $\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}$, où \mathbf{L} est le moment orbital relatif et \mathbf{S} le spin total ($S = 0$ ou 1). La parité du système est donnée par $P_{\overline{q}q} = (-1)^{L+1}$ et sa conjugaison de charge par $C_{\overline{q}q} = (-1)^{L+S}$. De nombreux états de quarkonia peuvent être formés, impliquant différents mécanismes de création. Par exemple, dans les collisions e^+e^- , le mécanisme de formation dominant est l'échange d'un photon virtuel dans la voie s , ce qui donne naissance à des états de quarkonia avec $J^{PC} = 1^{--}$ (nbres quantiques du photon). Dans la table PDG, ces états sont désignés par les symboles ψ (ou J/ψ), Υ et θ en fonction des saveurs concernées.

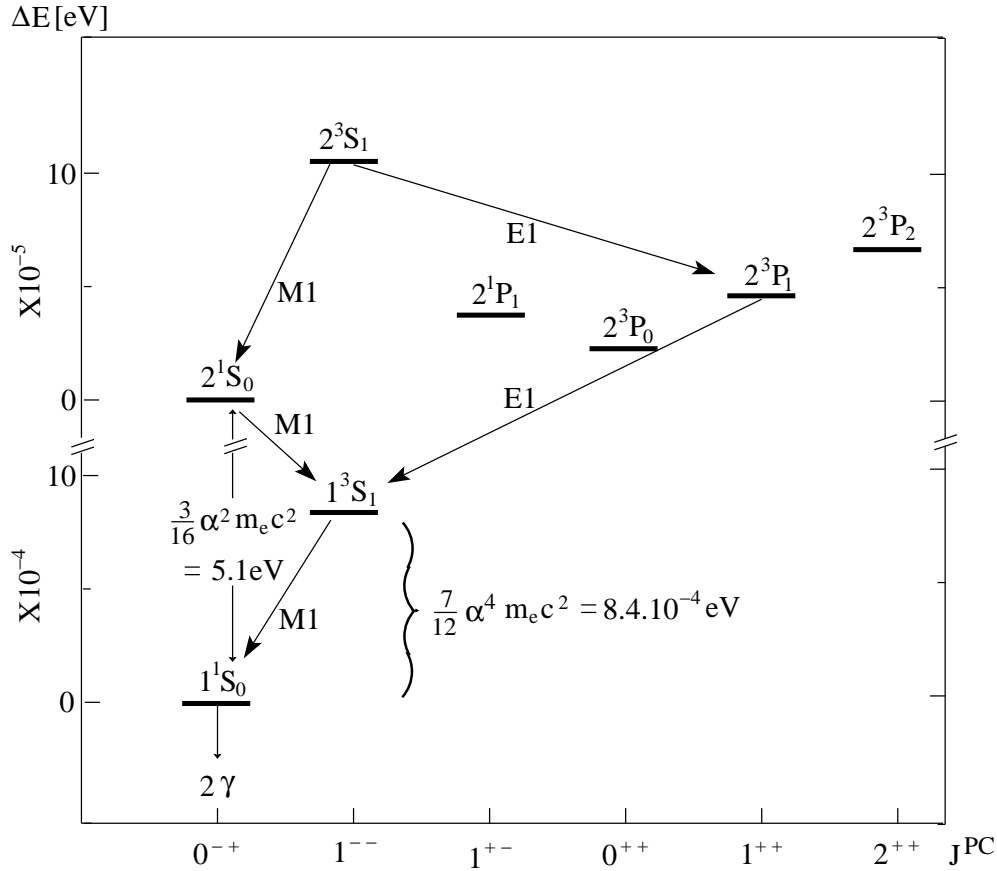


FIG. 8.14.1 – Les niveaux d'énergie du positronium (syst. e^+e^-) en fonction de leur J^{PC} caractéristique. Les lignes en traitillé désignent les transitions dominantes de la desexcitation e.m.. On a fait usage de la notation de la spectroscopie atomique : $N^{2S+1}L_J$.

L'état 3S_1 (mésion vecteur) est le plus abondant, les états avec $L > 0$ étant atténués par l'effet de la barrière de moment angulaire. Pour des valeurs de J^{PC} différentes de 1^{--} , la table PDG emploie une notation spectroscopique différenciée : χ_c, χ_b, \dots si on est dans l'état triplet de spin et $L > 0$, η_c, η_b, \dots et h_c, h_b, \dots si on est dans l'état singulet de spin et $L = 0$ et $L > 0$ respectivement¹⁴².

On peut construire un modèle du quarkonium basé sur le modèle du positronium (système e^+e^-) bien connu en théorie QED. En première approximation, on peut rechercher les niveaux d'énergie stationnaires de ce système pour un puits de potentiel coulombien $V_{em} = -\frac{\alpha}{r}$ où $\alpha = e^2/\hbar c$ est la constante de structure fine.

¹⁴²Selon la table PDG 2002, aucun état η_b n'a encore été clairement identifié.

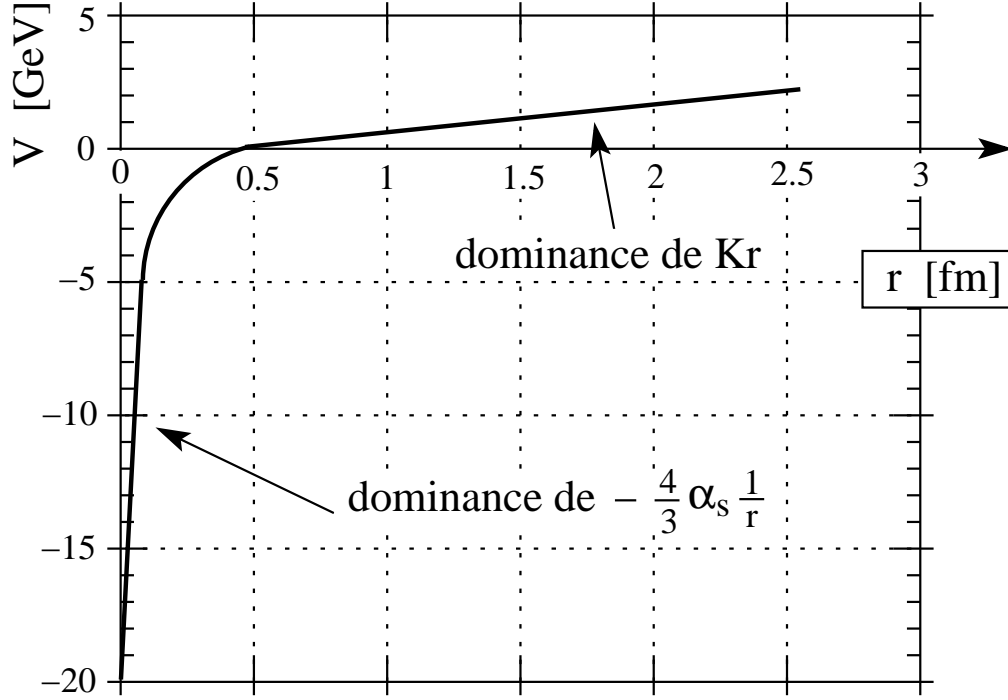


FIG. 8.14.2 – Puits de potentiel du quarkonium $V_{QCD}(r)$. Ce graphique est une portion de la figure 6.6.4, avec une échelle dilatée et linéaire en abscisse.

Ces niveaux sont représentés par la relation de Bohr¹⁴³ :

$$E_N = -\alpha^2 \frac{m_e c^2}{4} \frac{1}{N^2} \quad \text{où} \quad (8.14.1)$$

$N = 1, 2, \dots$; en spectroscopie N est appelé le nombre quantique principal;
 $N = n + L$; $n = 1, 2, \dots$ est le nombre quantique radial; $L = 0, 1, \dots, N - 1$ est le nombre quantique orbital.

Cette relation contient implicitement les contributions d'excitations radiale et orbitale et prédit des niveaux dégénérés en N . Cette prédiction est en désaccord avec l'observation (voir figure 8.14.1). On peut rétablir un accord plus satisfaisant par l'introduction de différents termes correctifs à V_{em} . Le couplage de spin-orbite ($V_{LS} \approx \mathbf{L} \cdot \mathbf{S}$) et le couplage spin-spin (V_{SS}) sont bien connus dans la description des niveaux électroniques de l'atome et des niveaux nucléoniques du noyau. On les retrouve avec le positronium (et avec le quarkonium); selon la théorie QED, les corrections des niveaux dues à V_{LS} et V_{SS} sont comparables en importance et de l'ordre de :

$$\Delta E \simeq \alpha^4 m_e c^2 \cdot \frac{1}{N^3} \quad (8.14.2)$$

¹⁴³Voir par exemple référence 10.

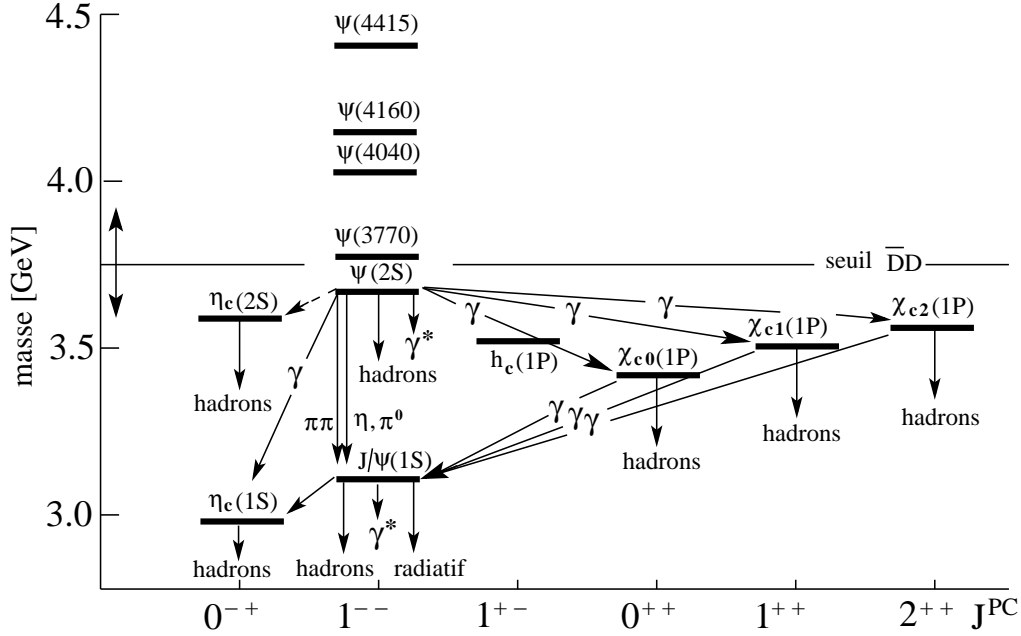


FIG. 8.14.3 – Les niveaux d’énergie du charmonium en fonction de leur J^{PC} . Les lignes fléchées indiquent les transitions dominantes attendues. La notation est celle de la table PDG, qui s’inspire de la notation de spectroscopie nucléaire ; un état singulet de spin est écrit $X(nL)$, un état triplet $X_J(nL)$, où n est le nbre quantique radial, L le nbre quantique orbital (rappel : $N = n + L$, $J = L + S$, $S = 0$ ou 1).

Il s’y ajoute une correction spécifique affectant les niveaux $1S(L = 0)$ du positronium, l’électron et le positron pouvant s’annihiler en photons réels. L’effet combiné de ces corrections est inclus dans le spectre représenté à la figure 8.14.1 et on y donne explicitement la séparation entre les niveaux 1^3S_1 et 1^1S_0 .

Les niveaux supérieurs du positronium se desexcitent par émission de photons ; les transitions e.m. dominantes sont indiquées sur la figure. Elles ont fait l’objet de mesures spectroscopiques de haute précision ; l’accord avec les prédictions de QED est très bon (tout au moins pour les premiers niveaux).

La séparation mesurée des niveaux 2^1S_0 et 1^1S_0 est de 5.1 eV ; on peut en tirer une valeur approximative de α à l’aide de (8.14.1) :

$$E_2 - E_1 = -\alpha^2 \frac{m_e c^2}{4} \left(\frac{1}{4} - 1 \right), \quad \text{d'où}$$

$$\alpha = \left(\frac{16}{3} \frac{5.1 \text{ [eV]}}{0.51 \cdot 10^6 \text{ [eV]}} \right) = \frac{1}{136.9}$$

Venons-en maintenant à la prédiction des niveaux d’énergie du quarkonium

état $\bar{c}c$	J^{PC}	masse [MeV]	largeur [MeV]
$\eta_c(1S)$	0^{-+}	2980	16.
$\eta_c(2S)$	0^{-+}	3594	< 8.
$J/\psi(1S)$	1^{--}	3097	0.087
$\psi(2S)$	1^{--}	3686	0.3
$h_c(1P)$	1^{+-}	3526	< 1.1
$\chi_{c0}(1P)$	0^{++}	3415	16.
$\chi_{c1}(1P)$	1^{++}	3510	0.9
$\chi_{c2}(1P)$	2^{++}	3556	2.

TAB. 8.14.1 – Masses et largeurs intrinsèques d'états identifiés du charmonium (table PDG 2002). La notation spectroscopique utilisée est définie dans la légende de la figure 8.14.3.

dans le cadre de l'approximation non relativiste. Remarquons que cette approximation se justifie ici du fait que les constituants du système sont lourds ($m_c \simeq 1.8 \text{ GeV}/c^2$, $m_b \simeq 5.3 \text{ GeV}/c^2$, $m_t \simeq 175 \text{ GeV}/c^2$).

On a déjà eu l'occasion de présenter une forme plausible pour le potentiel d'interaction $\bar{q}q$ (voir relation 6.6.1) :

$$V_{QCD} = -\frac{4}{3} \frac{\alpha_s}{r} + Kr, \quad \text{où} \quad (8.14.3)$$

α_s est la constante de couplage fort,

K est un paramètre empirique,

le facteur $\frac{4}{3}$ sera justifié au § 8.15.

Rappelons que le premier terme de 8.14.1, dominant aux courtes distances, reflète l'échange d'un gluon ; le second terme, prépondérant aux grandes distances, permet d'assurer le confinement des quarks (voir figure 8.14.2). Comme auparavant dans le modèle du positronium, des corrections à (8.14.3) sont apportées sous

état $\bar{b}b$	J^{PC}	masse [MeV]	largeur [MeV]
$\eta_b(1S)$	0^{-+}	9300	?
$\Upsilon(1S)$	1^{--}	9460	0.053
$\Upsilon(2S)$	1^{--}	10023	0.044
$\Upsilon(3S)$	1^{--}	10355	0.026
$\chi_{b0}(1P)$	0^{++}	9860	?
$\chi_{b1}(1P)$	1^{++}	9893	?
$\chi_{b2}(1P)$	2^{++}	9913	?
$\chi_{b0}(2P)$	0^{++}	10232	?
$\chi_{b1}(2P)$	1^{++}	10255	?
$\chi_{b2}(2P)$	2^{++}	10269	?

TAB. 8.14.2 – Masses et largeurs intrinsèques d'états identifiés du bottomonium (table PDG 2002). La notation spectroscopique utilisée est définie dans la légende de la figure 8.14.3.

la forme de couplages V_{LS} et V_{SS} . Elles amènent des paramètres qui sont ajustés empiriquement. Les figures 8.14.3 et 8.14.4 montrent les niveaux d'énergie et les transitions prédites par le modèle des quarks pour les systèmes du charmonium et du bottomonium. Les tableaux 8.14.1 et 8.14.2 donnent les masses et largeurs intrinsèques mesurées pour les différents états identifiés (table PDG 2002). Le modèle théorique permet de reproduire les niveaux observés à une précision de l'ordre du pourcent (les premiers niveaux d'excitation tout au moins).

On peut évaluer la constante de couplage fort $\alpha_s(E)$ à partir de la séparation mesurée des niveaux d'énergie 2^3S_1 et 1^3S_1 et en utilisant la relation (8.14.1), où

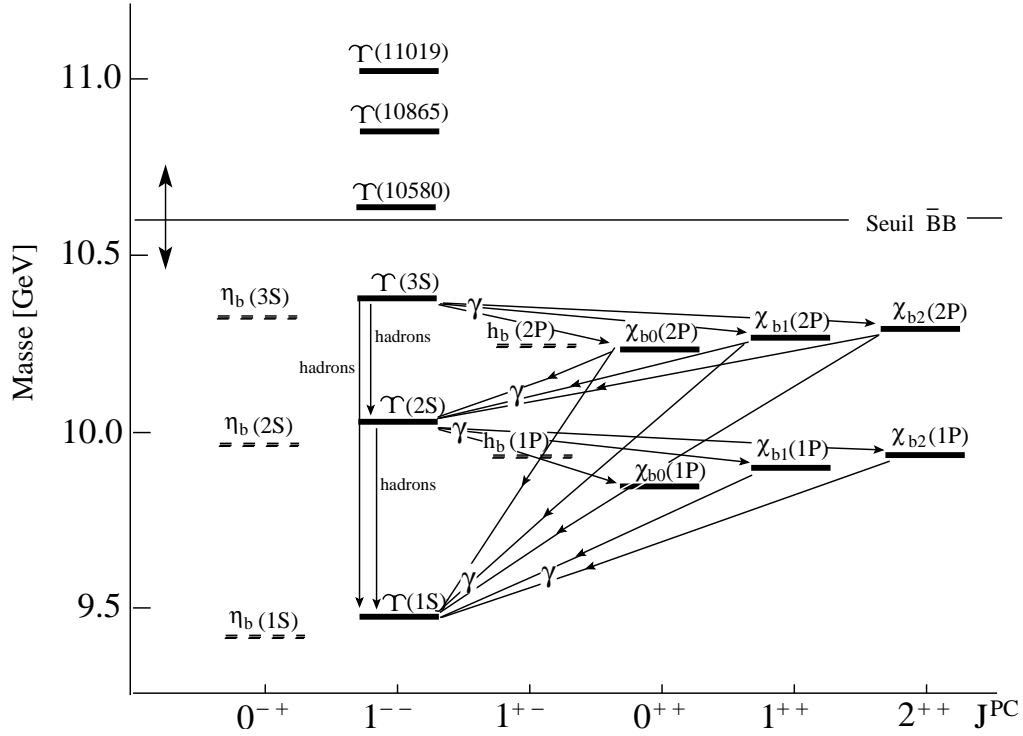


FIG. 8.14.4 – Les niveaux d'énergie du bottomonium en fonction de leur J^{PC} . Les lignes fléchées indiquent les transitions dominantes attendues. Pour la notation utilisée, voir l'explication donnée dans la légende de la figure 8.14.3.

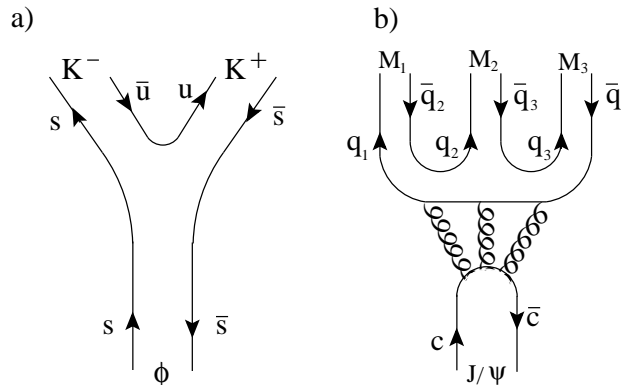


FIG. 8.14.5 – Diagrammes dominants de la désintégration d'états du charmonium. **a)** états $J^{PC} = 1^{--}$ situés au-dessus du seuil $\bar{D}D$, diagramme connecté ; **b)** états $J^{PC} = 1^{--}$ situés au-dessous du seuil $\bar{D}D$, diagramme déconnecté avec échange de 3 gluons virtuels. M_i =mésons non charmés.

$\frac{4}{3}\alpha_s$ est à substituer à α . A l'énergie correspondant à la masse du charmonium :

$$\alpha_s(m_{J/\psi}) \simeq \frac{3}{4} \left(\frac{16}{3} \frac{3.69 - 3.10}{1.8} \right)^{\frac{1}{2}} \simeq 1.$$

A l'énergie de masse du bottomonium, le calcul donne¹⁴⁴ :

$$\alpha_s(m_\Upsilon) \simeq \frac{3}{4} \left(\frac{16}{3} \frac{10.02 - 9.46}{5.3} \right)^{\frac{1}{2}} \simeq 0.5$$

Le modèle du quarkonium révèle une caractéristique propre à ce système : les premiers niveaux du spectre se situent au-dessous du seuil de désintégration en deux hadrons porteurs de la saveur de quark lourd concernée. Dans le charmonium, les niveaux $L = 0$, $N = n < 3$ sont en dessous du seuil de désintégration en $\overline{D}D$ (voir figure 8.14.3), et dans le bottomonium les niveaux $L = 0$, $N = n < 4$ sont en dessous du seuil de désintégration en $\overline{B}B$ (voir figure 8.14.4). Pour ces niveaux, la désintégration peut être soit e.m. avec émission de photons soit forte avec production de hadrons légers. Le mécanisme dans ce second cas implique un diagramme déconnecté (voir figure 8.14.5 **b**) et donc un processus fortement inhibé (règle d'OZI, voir § 8.9). On comprend dès lors pourquoi ces états de quarkonia ont des largeurs intrinsèques réduites (par ex. $\Gamma_{J/\psi} \simeq 90$ KeV, $\Gamma_\Upsilon \simeq 50$ KeV)¹⁴⁵.

*Q. : Dans le diagramme **b**) de la figure 8.14.5 on a trois gluons échangés. Indiquer les règles de sélection déterminantes. Comparer à l'annihilation e^+e^- à l'arrêt dans l'état triplet de spin.*

Relevons encore que les états singulets ont des largeurs intrinsèques bien supérieures à celles des états triplets correspondants (par ex, $\Gamma_{\eta_c(1S)} \simeq 13$ MeV). On peut le comprendre en rappelant que par suite de la conservation de C , le mécanisme dominant est un échange à deux gluons dans le premier cas ($\Gamma \approx \alpha_s^2$) et à trois gluons dans le second ($\Gamma \approx \alpha_s^3$)¹⁴⁶.

8.15 La charge de couleur : $SU(3)_{\text{couleur}}$.

Le concept de la charge de couleur a déjà été abordé au § 6.5 et au § 8.10. Notre objectif ici est d'approfondir l'examen du sujet, en particulier de montrer comment on peut déterminer les facteurs de couplages (facteurs de couleur) relevant à différentes situations pratiques, de justifier le postulat contenu dans les relations 8.10.5 et 8.10.6, et de retrouver le facteur $\alpha_{qq}/\alpha_{\overline{q}q} = 1/2$ utilisé dans les applications de chromomagnétisme (§ 8.12.1 et § 8.12.2).

¹⁴⁴A l'énergie de masse du boson Z, la table PDG donne $\alpha_s(m_Z) \simeq 0.12$.

¹⁴⁵Par comparaison, le méson ϕ (système $\overline{s}s$) a une largeur de $\Gamma_\phi \simeq 4.5$ MeV; notons que la masse du ϕ (1020 MeV) dépasse le seuil de désintégration en $\overline{K}K$.

¹⁴⁶Rappel : le gluon a une conjugaison de charge $C_{\text{gluon}} = -1$ comme le photon.

Rappelons que la théorie QCD est basée sur le groupe $SU(3)_{\text{couleur}}$, cette symétrie étant supposée exacte¹⁴⁷. Les générateurs de ce groupe sont les huit matrices de Gell-Mann $\lambda_i (i = 1, \dots, 8)$ décrites en 8.6.3, l'algèbre du groupe est celui défini par les relations de commutation 8.6.12. Dans QCD, on admet qu'un quark de saveur donnée ($q = u, d, s, \dots$) est porteur à la fois d'une charge électrique source d'interaction e.m. et d'une charge de couleur source d'interaction forte. Il se distingue en cela fondamentalement d'un lepton. De plus, on postule que la charge de couleur peut prendre trois "couleurs" différentes qu'on appelle communément rouge (r), verte (g) et bleue (b)¹⁴⁸. L'antiquark ($\bar{q} = \bar{u}, \bar{d}, \bar{s}, \dots$) est porteur d'une charge électrique de signe opposé et aussi d'une charge de couleur de signe opposé qu'on appelle $\bar{r}, \bar{g}, \bar{b}$.

Ces trois états de couleur et ces trois états d'anticouleur sont les vecteurs de base 3 et $\bar{3}$ de la représentation du groupe dans le plan λ_3, λ_8 :

$$|\text{couleur}\rangle = \begin{bmatrix} r \\ g \\ b \end{bmatrix}, \quad |\overline{\text{couleur}}\rangle = \begin{bmatrix} \bar{r} \\ \bar{g} \\ \bar{b} \end{bmatrix} \quad (8.15.1)$$

L'interaction entre deux quarks ou entre un antiquark et un quark est propagée par un gluon (vecteur) appartenant à l'octet (8_c) de couleur-anticouleur dans $\mathbf{3}_c \otimes \bar{\mathbf{3}}_c = \mathbf{1}_c \oplus \mathbf{8}_c$ (à mettre en parallèle avec l'octet $\bar{q}q_{\text{saveur}}$) :

$$\begin{aligned} g_1 &= \bar{b}r, & g_2 &= \bar{g}r, & g_3 &= \bar{g}b, \\ g_4 &= \bar{r}b, & g_5 &= \bar{r}g, & g_6 &= \bar{b}g, \\ g_7 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\bar{r}r - \bar{g}g), & g_8 &= \frac{1}{\sqrt{6}}(\bar{r}r + \bar{g}g - 2\bar{b}b) \end{aligned} \quad (8.15.2)$$

Les états de gluons ainsi définis sont porteurs de charges de couleur, et de ce fait peuvent interagir entre eux¹⁴⁹.

L'état de gluon appartenant au singulet (1_c) de couleur-anticouleur :

$$g_0 = \frac{1}{\sqrt{3}}(\bar{r}r + \bar{g}g + \bar{b}b) \quad (8.15.3)$$

est un invariant sous les transformations d' $SU(3)_{\text{couleur}}$; il ne contribue pas à l'interaction forte entre quarks (ou antiquarks) porteurs de couleur. On reviendra en fin de paragraphe sur le rôle possible d'un tel singulet de gluon.

¹⁴⁷Relevons la différence avec $SU(3)_{\text{saveur}}$, qui n'est qu'une symétrie approchée.

¹⁴⁸Notons que ces couleurs ne doivent pas être prises au sens littéral, mais comme des valeurs de charge.

¹⁴⁹Notez ici la différence de situation par rapport à celle prévalant avec le photon, qui ne porte pas de charge électrique.

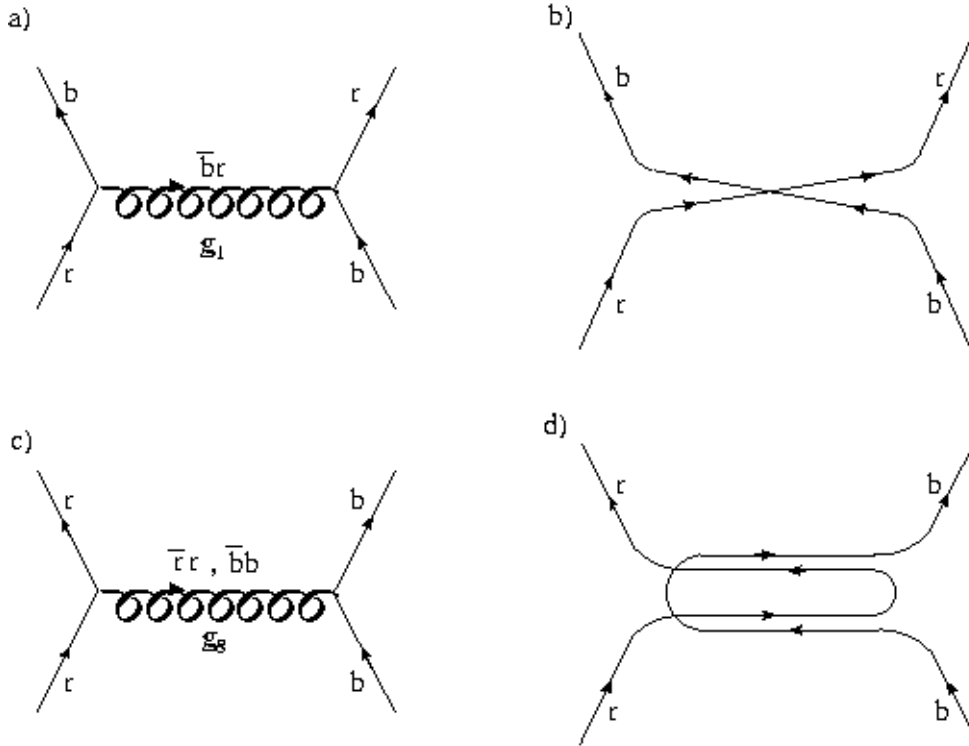


FIG. 8.15.1 – Situations de couplage de couleur entre deux quarks différents (r , b); illustrations du courant de couleur correspondant.

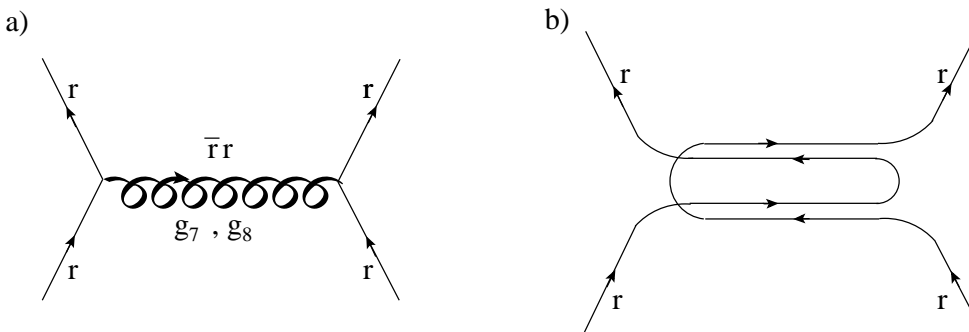


FIG. 8.15.2 – Situation de couplage de couleur entre deux quarks identiques (r); courant de couleur correspondant.

Venons-en au calcul des facteurs de couplage intervenant aux vertex quarks (antiquarks)-gluons. Différentes situations sont illustrées dans les figures 8.15.1 et 8.15.2. La figure 8.15.1 présente les deux situations de couplage de couleur entre deux quarks différents porteurs par ex. de charges r et b ; dans le couplage $rb \rightarrow br$,

seul l'état de gluon $g_1 = \bar{b}r$ entre en ligne de compte dans l'échange, ce qui donne la contribution $\langle rb|H_c|br\rangle = +\beta^2$; dans le couplage $rb \rightarrow rb$, c'est l'échange de l'état de gluon $g_8 = \frac{1}{\sqrt{6}}(\bar{r}r + \bar{g}g - 2\bar{b}b)$ qui a lieu, pour lequel on a la contribution : $\langle rb|H_c|rb\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}(-\frac{2}{\sqrt{6}})\beta^2 = -\frac{1}{3}\beta^2$. La grandeur β introduite aux vertex quarks-gluon est une mesure de la force de couleur ($-\beta$ au vertex antiquarks-gluon); elle est directement reliée à la constante du couplage fort α_s , comme on va le voir.

type de couplage de couleur	états de gluon échangés	contribution au couplage
$rb \rightarrow br$	g_1	$+\beta^2$
$rb \rightarrow rb$	g_8	$-\frac{1}{3}\beta^2$
$rr \rightarrow rr$	g_7 et g_8	$+\frac{2}{3}\beta^2$
$\bar{r}r \rightarrow \bar{b}b$	g_1	$-\beta^2$
$\bar{b}r \rightarrow \bar{b}r$	g_8	$+\frac{1}{3}\beta^2$
$\bar{r}r \rightarrow \bar{r}r$	g_7 et g_8	$-\frac{2}{3}\beta^2$

TAB. 8.15.1 – Facteurs de couplage pour différentes situations pratiques. Les états de gluons sont ceux définis dans la relation 8.15.2. D'autres situations peuvent être réalisées par permutations $r \leftrightarrow g$ ou $b \leftrightarrow g$.

La figure 8.15.2 présente la situation de couplage de couleur entre deux quarks identiques porteurs par ex. de la charge r : $rr \rightarrow rr$; les états de gluons g_7 et g_8 participent à l'échange et donnent la contribution totale $\langle rr|H_c|rr\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2}} \beta^2 + \frac{1}{\sqrt{6}} \frac{1}{\sqrt{6}} \beta^2 = +\frac{2}{3} \beta^2$. Les contributions relatives aux couplages de couleur impliquant un quark et un antiquark se déduisent des résultats précédents en effectuant un changement du signe de β au vertex antiquarks-gluon. Le tableau 8.15.1 résume l'ensemble des situations évoquées ci-dessus.

Appliquons maintenant ces résultats aux systèmes $\bar{q}q$ et qqq associables aux hadrons observés.

La paire $\bar{q}q$ (méson) peut être dans l'état singulet de couleur ou dans un des états de l'octet de couleur¹⁵⁰. Pour l'état singulet, la composante de couleur de la

¹⁵⁰Rappel : $\bar{\mathbf{3}} \otimes \mathbf{3} = \mathbf{1} \oplus \mathbf{8}$.

fonction d'onde s'écrit (voir 8.10.6) :

$$|\bar{q}q, 1_c\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(\bar{r}r + \bar{g}g + \bar{b}b)$$

La combinaison de couleur $\bar{r}r$ génère trois contributions, celle de $\bar{r}r \rightarrow \bar{r}r(-\frac{2}{3}\beta^2)$, celle de $\bar{r}r \rightarrow \bar{b}b(-\beta^2)$ et celle de $\bar{r}r \rightarrow \bar{g}g(-\beta^2)$, dont la somme fait $-\frac{8}{3}\beta^2$. Les deux autres combinaisons de couleur ($\bar{g}g$ et $\bar{b}b$) donnent des sommes équivalentes, par symétrie. Après avoir tenu compte du facteur de normalisation de la fonction d'onde, on obtient la contribution totale : $\frac{1}{\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot 3 \cdot (-\frac{8}{3}\beta^2) = -\frac{8}{3}\beta^2$. Le signe négatif signifie que l'interaction en question est de nature attractive. Pour les états de l'octet, les composantes de la fonction d'onde $|\bar{q}q, 8_c\rangle$ ont la même structure de couleur que les composantes de l'octet de gluons (relation 8.15.2). La contribution de chaque état au couplage de couleur peut être établie en suivant la même procédure que ci-dessus et en s'appuyant sur les données du tableau 8.15.1. On trouve que cette contribution vaut $+\frac{1}{3}\beta^2$ pour chacun de ces huit états. Elle représente une interaction de nature répulsive.

Q. : montrer que pour les membres de l'octet de couleur de la paire $\bar{q}q$, la contribution au couplage de couleur vaut $+\frac{1}{3}\beta^2$.

Ces résultats justifient le postulat contenu implicitement dans la relation 8.10.6.

Les paires qq du système qqq (baryon) peuvent être dans un état de l'antitriplet de couleur ou dans un état du sextet de couleur ; elles sont couplées au troisième quark (triplet de couleur) pour former l'une des représentations irréductibles de l'ensemble qqq : 1_c , 8_c ou 10_c ¹⁵¹.

Pour l'antitriplet $|qq, \bar{3}\rangle$, on a les configurations de couleur $(rb - br)$, $(bg - gb)$ et $(gr - rg)$ dont les contributions au couplage sont équivalentes par symétrie. Il nous suffit d'évaluer la contribution de la première, en nous reportant au tableau 8.15.1 :

$$\begin{aligned} \langle rb - br | H_c | rb - br \rangle &= \langle rb | H_c | rb \rangle + \langle br | H_c | br \rangle - \langle rb | H_c | br \rangle - \langle br | H_c | rb \rangle = \\ &2(-\frac{1}{3}\beta^2) - 2(\beta^2) = -\frac{8}{3}\beta^2 \quad (\text{couplage attractif}) \end{aligned}$$

Tenant compte du facteur de normalisation de la fonction d'onde du système qqq (voir 8.10.5) on obtient pour l'ensemble des trois configurations de couleur de la paire qq : $\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)^2 3(-\frac{8}{3}\beta^2) = -\frac{4}{3}\beta^2$.

Pour le sextet $|qq, 6_c\rangle$, on a les configurations de couleur : rr , bb , gg , $\frac{1}{\sqrt{2}}(rb + br)$, $\frac{1}{\sqrt{2}}(rg + gr)$ et $\frac{1}{\sqrt{2}}(gb + bg)$; le calcul montre que leur contribution d'ensemble vaut : $+\frac{2}{3}\beta^2$ (couplage répulsif).

¹⁵¹Rappel : $\mathbf{3} \otimes \mathbf{3} = \bar{\mathbf{3}} \oplus \mathbf{6}$; $\mathbf{3} \otimes \mathbf{3} \otimes \mathbf{3} = (\bar{\mathbf{3}} \oplus \mathbf{6}) \otimes \mathbf{3} = \mathbf{1} \oplus \mathbf{8} \oplus \mathbf{8}' \oplus \mathbf{10}$.

Q. : montrer que pour les membres du sextet de couleur de la paire qq , la contribution au couplage de couleur vaut $+\frac{2}{3}\beta^2$.

Ces résultats ont des implications intéressantes sur les couplages de couleur possibles du système qqq . Dans l'état singulet de couleur $|qqq, 1_c\rangle$, complètement antisymétrique, toute paire qq est dans l'état antitriplet (couplage attractif). Dans le décuplet de couleur $|qqq, 10\rangle$, complètement symétrique, toute paire qq est dans l'état sextet (couplage répulsif). Enfin, dans les deux octets de couleur $|qqq, 8_c \text{ et } 8'_c\rangle$, certaines des paires qq se rattachent à l'antitriplet et d'autres au sextet (mélange de couplages attractif et répulsif). On voit que la configuration du singulet du système qqq est la seule où l'on obtient une attraction mutuelle entière des trois quarks. C'est donc la configuration de couleur favorisée pour la description de l'état lié qqq , ce qui justifie le postulat contenu implicitement dans la relation 8.10.5.

Dans les raisonnements ci-dessus, l'interaction de couleur (entre quarks et anti-quarks) est décrite comme résultant de l'échange d'un gluon (virtuel), par analogie avec l'échange d'un photon dans l'interaction e.m.. Dans cette approximation, il est légitime d'attribuer les facteurs de couplage calculés pour les singulets $|\bar{q}q, 1_c\rangle$ et $|qqq, 1_c\rangle$ à la composante du potentiel d'interaction dominant à courte distance ($\approx \frac{1}{r}$) :

$$V_{\bar{q}q}(r) \Leftarrow -\frac{8}{3}\beta^2\frac{1}{r} \quad (8.15.4)$$

$$V_{qq}(r) \Leftarrow -\frac{4}{3}\beta^2\frac{1}{r} \quad (8.15.5)$$

En comparant les relations (8.15.4) et (8.14.3), on déduit que :

$$\beta^2 = \frac{\alpha_s}{2}, \quad \alpha_s = \text{constante de couplage fort.} \quad (8.15.6)$$

D'autre part, en comparant (8.15.5) à (8.15.4), on retrouve le facteur $\frac{1}{2}$ mentionné au § 8.12.2.

Nous faisons maintenant un retour à la question du rôle possible du gluon g_0 (état singulet de couleur). Les systèmes liés $\bar{q}q$ et qqq (hadrons) observés dans la nature étant des singulets de couleur, on peut concevoir à priori l'existence d'une composante d'interaction de type nouveau résultant de l'échange de g_0 ¹⁵². Le gluon étant de masse nulle, cette composante de force aurait une portée infinie (comme pour le photon) ce qui est en contradiction avec les faits observés (confinement des quarks). L'état de gluon g_0 (s'il existe) ne paraît pas jouer de rôle significatif dans les états liés $\bar{q}q$ et qqq . Par contre, on peut imaginer des singulets de couleur

¹⁵²Notons que l'échange d'un gluon "coloré" de l'octet (type g_1 à g_8) aurait pour effet de transformer des hadrons neutres (de couleur) en hadrons chargés (de couleur), processus non observé à ce jour.

formés par couplage de deux ou plusieurs gluons porteurs de charges de couleur ; c’est ce qu’on nomme des “glueballs”. La production de tels états ainsi que celle des paires $\bar{q}q$ liées à un gluon excité (hybrides) dans les collisions à haute énergie est prédite par QCD. Ils devraient être reconnaissables grâce à des signatures caractéristiques (par ex. nbres quantiques exotiques $J^{PC} = 0^{--}, 0^{+-}, 1^{-+}, \dots$). La table PDG fait mention de certaines catégories d’événements candidats pour les “glueballs” et les hybrides¹⁵³.

8.16 Dépendance en énergie des constantes de couplage.

L’évocation du concept de “constante de couplage” fait, à priori, penser à une grandeur de valeur fixe et immuable. En fait, dans les théories QED et QCD, ce concept est utilisé dans le cadre élargi d’une constante de couplage effective, dépendant de l’énergie en jeu dans le processus décrit¹⁵⁴. La motivation en est la suivante : dans le développement perturbatif à la Feynman de la théorie, il peut apparaître des termes correctifs importants à grand transfert d’énergie qu’il est commode en pratique d’absorber dans un (ou un nombre restreint de) facteur dépendant de l’échelle d’énergie, typiquement d’une constante de couplage effective.

Illustrons cette approche en faisant un retour au problème de l’anomalie de l’électron et du muon (voir § 3.6). On conçoit qu’il est commode en pratique de substituer à la longue série de puissances de $a = \alpha_{em}/\pi$ la forme ramassée :

$$A_\ell = (g_\ell - 2)/2 = \frac{0.5}{\pi} \alpha_{eff}, \quad \text{où :} \quad (8.16.1)$$

$\alpha_{eff} = \alpha(q^2)$ est la constante de couplage effective (“running coupling constant”), q est le quadri-moment du photon virtuel impliqué dans le mécanisme d’échange.

Le facteur α_{eff} inclut les contributions des corrections radiatives décrites par les diagrammes de la figure 3.6.2. La plus importante est celle due à la polarisation du vide, qui se traduit par un effet d’écran affectant la charge apparente du lepton concerné (figure 8.16.1). A l’ordre le plus bas des corrections, c’est-à-dire avec un photon échangé et une boucle e^+e^- intermédiaire, QED prédit que (voir appendice 8) :

$$\alpha(q^2) \simeq \frac{\alpha_{em}}{1 - \frac{\alpha_{em}}{3\pi} \ln\left(\frac{q^2}{4m_e^2}\right)}, \quad \text{où :} \quad (8.16.2)$$

$\alpha_{em} = \alpha(q^2 \rightarrow 0) = e^2/4\pi\epsilon_0\hbar c$, la constante de structure fine,
 $(2m_e)^2 \simeq 1 < q^2 < 400$ [MeV]²

¹⁵³Voir table PDG sous : Meson Particle Listings Non- $\bar{q}q$ candidates.

¹⁵⁴C’est ce qu’on appelle généralement “the running coupling constants” dans la littérature de langue anglaise.

Si des échanges à grandes valeurs de q^2 sont possibles, des corrections d'ordres supérieurs sont à introduire, qui tiennent compte de diagrammes à plusieurs boucles et de boucles de fermions plus lourds que l'électron (leptons et quarks). Si on ne garde que les termes logarithmiques dominants, on obtient la relation approximative suivante :

$$\alpha(q^2) \simeq \frac{\alpha(q_0^2)}{1 - \frac{\alpha(q_0^2)}{3\pi} \sum_{\substack{i \\ q^2 > 4m_i^2}} Q_i^2 \ln\left(\frac{q^2}{4m_i^2}\right)}, \quad \text{où :} \quad (8.16.3)$$

Q_i , m_i sont les charges et masses des fermions concernés, q_0 est une valeur de référence arbitraire.

On voit que dans QED la constante de couplage effective croît lentement en fonction de q^2 ; par exemple, $\alpha(0) = \alpha_{em} \simeq 1/137$, $\alpha(m_W \simeq 80 \text{ GeV}) \simeq 1/128$.

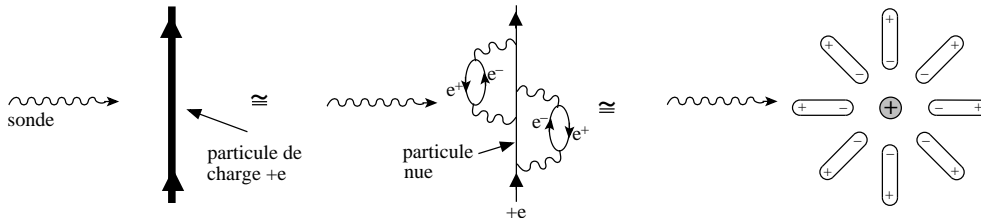


FIG. 8.16.1 – Représentation schématique de l'effet d'écran autour d'une particule portant une charge électrique.

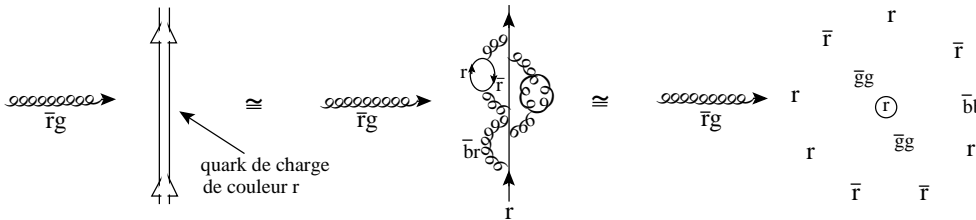


FIG. 8.16.2 – Représentation schématique de l'effet d'écran autour d'un quark porteur d'une charge de couleur.

En théorie QCD, les interactions quarks-gluons peuvent également être paramétrisées en terme d'une constante de couplage effective $\alpha_s(q^2)$. Une (ou des) boucle de quark-antiquark donne lieu à un effet d'écran sur la charge de couleur du quark sondé (voir figure 8.16.2). De plus, un gluon peut engendrer une boucle de gluons ; il s'avère que pour certains états de polarisation de cette boucle

il se manifeste un effet d'anti-écran. Dans l'approximation où l'on ne prend en compte à nouveau que les termes logarithmiques dominants, la théorie prédit une dépendance de $\alpha_s(q^2)$ de la forme :

$$\alpha_s(q^2) \simeq \frac{\alpha_s(q_0^2)}{1 + B\alpha_s(q_0^2) \ln\left(\frac{q^2}{q_0^2}\right)}, \quad \text{où :} \quad (8.16.4)$$

$$\begin{aligned} B &= \frac{11N_c - 2N_s}{12\pi}, \\ N_c &= 3 \text{ couleurs de quark,} \\ N_s &= \text{nombre de saveurs de quark impliquées,} \\ q_0 &= \text{valeur de référence de } q. \end{aligned}$$

Vu que $B > 0$ et $\alpha_s(q_0^2) > 0$, on voit de la relation 8.16.4 que dans QCD la constante de couplage effective $\alpha_s(q^2)$ diminue quand q^2 croît. La figure 8.16.3 montre la variation observée dans l'intervalle $1 < q < 100$ GeV.

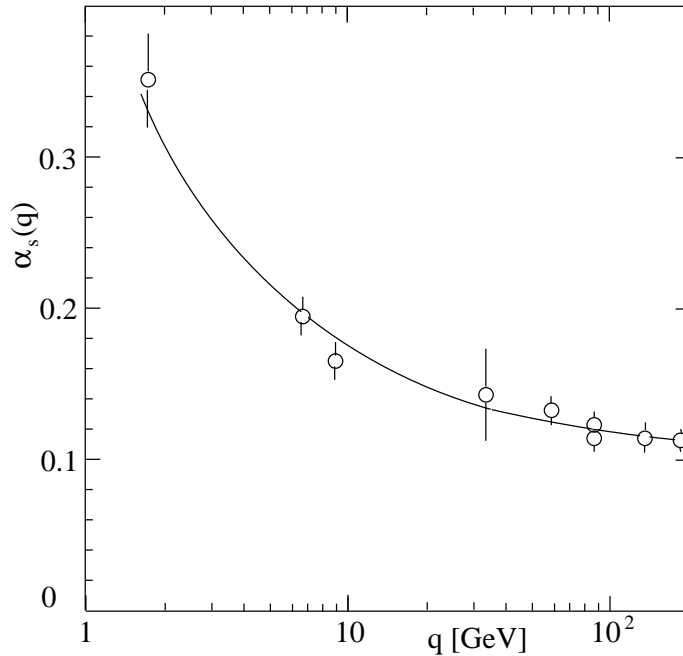


FIG. 8.16.3 – Evolution de α_s en fonction de l'énergie échangée ; la courbe en trait plein représente l'ajustement de la relation 8.16.4 aux valeurs mesurées.

On trouve dans la littérature une forme de paramétrisation alternative de $\alpha_s(q^2)$, qu'on obtient en définissant un facteur d' "échelle" Λ (ou Λ_{QCD}) tel que :

$$\Lambda^2 = q_0^2 \exp\left(-\frac{1}{B\alpha_s(q_0^2)}\right)$$

En insérant ce nouveau paramètre dans (8.16.4), on obtient la forme simple :

$$\alpha_s(q^2) \simeq \frac{1}{B \ln\left(\frac{q^2}{\Lambda^2}\right)} \quad (8.16.5)$$

La valeur de Λ est fonction du nombre de saveurs de quark impliquées, donc de l'énergie mise en jeu. Par exemple, pour l'énergie équivalente à la masse du boson Z , des expériences au LEP¹⁵⁵ ont donné les résultats suivants :

$$\begin{aligned} \text{pour } N_s &= 5 \text{ saveurs } (u, d, s, c, b), \\ B &= (33-10)/12\pi \simeq 0.61, \\ \Lambda^{(5)} &= 216_{-24}^{+25} \text{ MeV}/c, \\ \alpha_s(Z) &= 1/\{0.61 \ln[(91.2 \cdot 10^3/216)^2]\} \simeq 0.117. \end{aligned}$$

Relevons les caractéristiques saillantes de l'évolution de $\alpha_s(q^2)$:

- aux faibles moments de transfert $q \leq 200$ MeV c'est-à-dire à grande distance relative des quarks $r = \frac{\hbar c}{q} \geq 1$ fm, $\alpha_s \geq 1$, ce qui se reflète par l'effet de confinement observé des quarks.
- aux grands moments de transfert $q \gg 1$ GeV c'est-à-dire aux faibles distances relatives $r \ll 1$ fm, $\alpha_s \ll 1$, ce qui fait apparaître les quarks comme quasi-libres (déconfinement). A la limite $q \rightarrow \infty$ $\alpha_s(q^2) \rightarrow 0$; c'est ce qu'on appelle communément la "**liberté asymptotique**".

Sur cette base, on peut rendre compte de la dépendance en r du potentiel d'interaction représenté en 6.6.1 ou 8.14.3. Effectivement, si l'on imagine un potentiel de la forme $V(r) \propto \frac{\alpha_s}{r}$ (α_s supposée fixe) et qu'on substitue à α_s une constante de couplage effective représentée par exemple par (8.16.5), on peut écrire :

$$\begin{aligned} V(r) &\approx \frac{1}{r} \frac{1}{\ln\left(\frac{q}{\Lambda}\right)^2} \approx \frac{1}{r} \frac{1}{\ln\left(\frac{R_\Lambda}{r}\right)^2} \quad \text{où :} \quad (8.16.6) \\ R_\Lambda &= \frac{\hbar c}{\Lambda} \simeq 1 \text{ fm (si } \Lambda \simeq 200 \text{ MeV}/c) \end{aligned}$$

Pour $r \ll 1$ fm et $R_\Lambda/r \gg 1$, le facteur $1/\ln(\dots)$ varie lentement et la dépendance en r de $V(r)$ est dominée par le facteur $\frac{1}{r}$ (décroissance d'allure coulombienne). Pour $r \gg 1$ fm et $R_\Lambda/r \ll 1$, le facteur $1/\ln(\dots)$ varie rapidement (en gros comme r^2) ce qui donne une dépendance $V(r) \approx r$ (croissance linéaire).

¹⁵⁵Voir par ex. la table PDG sous 9. Quantum chromodynamics.

On voit qu'aux grands moments de transfert ($> \mathcal{O}(1\text{GeV}/c)^2$) c'est-à-dire aux courtes distances ($\ll 1 \text{ fm}$), $\alpha_s(q^2) \ll 1$ et l'emploi de la méthode des perturbations dans les calculs de QCD est justifiée. Par contre aux faibles moments de transfert c'est à dire aux grandes distances ($\gg 1 \text{ fm}$), $\alpha_s(q^2) \geq 1$ et le recours à un modèle phénoménologique est nécessaire dans la description des processus. Rappelons par exemple le modèle de la corde pour décrire le processus de formation des jets hadroniques (§ 6.6).

8.17 Exemples de construction d'amplitudes de transition en QCD.

QCD est une théorie de jauge (voir chapitre 9) basée sur les propriétés du groupe $SU(3)_{\text{couleur}}$. Dans cette théorie on postule qu'un quark (antiquark) est porteur d'une charge de couleur pouvant prendre l'une des trois valeurs r, g, b ($\bar{r}, \bar{g}, \bar{b}$). Cette charge est supposée responsable de l'interaction forte entre deux quarks (et entre un quark et un antiquark). La propagation de l'interaction est faite via l'échange d'un (ou de) gluon appartenant à l'octet d' $SU(3)_{\text{couleur}}$ (g_1, \dots, g_8 , voir 8.15.2). Un gluon appartenant au singulet de couleur (g_0) ne participe pas à cet échange. Le fait que les gluons de l'octet soient porteurs d'une charge de couleur complique les règles de Feynman applicables en théorie QCD ; en particulier, ces gluons peuvent interagir entre eux, contrairement aux photons, qui ne portent pas de charge. Un certain nombre d'informations à ce sujet sont réunies dans la figure 8.17.1¹⁵⁶, qui constitue un complément à la figure 5.3.2. On peut se rendre compte des similitudes et des différences entre les situations en QED et QCD.

A titre d'application, on montre ci-après comment se construit l'amplitude de transition (diagramme du premier ordre) dans trois processus impliquant des quarks (antiquarks) et des gluons. L'interaction e.m. entre quarks est laissée de côté. Le développement complet des calculs se trouve dans les livres spécialisés¹⁵⁷.

8.17.1 Diffusion (forte) d'un quark sur un autre quark de saveur différente.

Le processus est représenté par le diagramme de la figure 8.17.2 **a**). Remarquons que le diagramme croisé de la figure 8.17.2 **b**) n'a pas à être pris en compte ici puisque par hypothèse les saveurs des quarks sont différentes¹⁵⁸, telles que : $u + d \rightarrow u + d$. La notation est celle de la figure 8.17.1, μ et ν sont des

¹⁵⁶Rappelons que les fonctions u et v contiennent la dépendance spatio-temporelle, les fonctions c et a la dépendance de couleur (3 composantes pour c , 8 composantes pour a). Les λ^α sont les matrices de Gell-Mann (8.6.3); les $f^{\alpha\beta\gamma}$ sont les constantes de structure d' $SU(3)$.

¹⁵⁷Voir par exemple réf. 7 (appendix 1), réf. 10 (chapitre 9) où l'on trouve un traitement du processus d'annihilation $\bar{q}q \rightarrow gg$ pour des quarks à l'arrêt et dans l'état singulet de spin.

¹⁵⁸Ce serait un diagramme concurrent si les quarks étaient de la même saveur.

QED		QCD	
lepton	$\left\{ \begin{array}{l} \text{entrant} \left(\begin{array}{c} \bullet \\ \nearrow \end{array} \right): u(p) \\ \text{sortant} \left(\begin{array}{c} \nearrow \\ \bullet \end{array} \right): \bar{u}(p) \end{array} \right.$	quark	$\left\{ \begin{array}{l} \text{entrant} \left(\begin{array}{c} \bullet \\ \nearrow \end{array} \right): u(p)c \\ \text{sortant} \left(\begin{array}{c} \nearrow \\ \bullet \end{array} \right): \bar{u}(p)c^\dagger \end{array} \right.$
antilepton	$\left\{ \begin{array}{l} \text{entrant} \left(\begin{array}{c} \bullet \\ \nearrow \end{array} \right): \bar{v}(p) \\ \text{sortant} \left(\begin{array}{c} \nearrow \\ \bullet \end{array} \right): v(p) \end{array} \right.$	antiquark	$\left\{ \begin{array}{l} \text{entrant} \left(\begin{array}{c} \bullet \\ \nearrow \end{array} \right): \bar{v}(p)c^\dagger \\ \text{sortant} \left(\begin{array}{c} \nearrow \\ \bullet \end{array} \right): v(p)c \end{array} \right.$
photon	$\left\{ \begin{array}{l} \text{entrant} \left(\begin{array}{c} \bullet \\ \nearrow \text{~~~~} \end{array} \right): \varepsilon_\mu(p) \\ \text{sortant} \left(\begin{array}{c} \nearrow \text{~~~~} \\ \bullet \end{array} \right): \varepsilon_\mu^*(p) \end{array} \right.$	gluon	$\left\{ \begin{array}{l} \text{entrant} \left(\begin{array}{c} \bullet \\ \nearrow \text{~~~~} \end{array} \right): \varepsilon_\mu(p)a^\alpha \\ \text{sortant} \left(\begin{array}{c} \nearrow \text{~~~~} \\ \bullet \end{array} \right): \varepsilon_\mu^*(p)a^{\alpha*} \end{array} \right.$
propagateur lepton antilepton	$\left(\begin{array}{c} \bullet \text{---} \text{---} \bullet \\ \text{q} \end{array} \right): \frac{i(\not{q} + m_\ell)}{q^2 - m_\ell^2}$	propagateur quark antiquark	$\left(\begin{array}{c} \bullet \text{---} \text{---} \bullet \\ \text{q} \end{array} \right): \frac{i(\not{q} + m_q)}{q^2 - m^2}$
propagateur photon	$\left(\begin{array}{c} \bullet \text{~~~~} \text{~~~~} \bullet \\ \text{q} \end{array} \right): \frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2}$	propagateur gluon	$\left(\begin{array}{c} \bullet \text{~~~~} \text{~~~~} \bullet \\ \text{q} \end{array} \right): \frac{-ig_{\mu\nu}\delta^{\alpha\beta}}{q^2}$
vertex $\ell^+ \ell^- \gamma$	$\left(\begin{array}{c} \nearrow \text{---} \text{---} \searrow \\ \text{~~~~} \end{array} \right): -ie\gamma_\mu$	vertex qqg	$\left(\begin{array}{c} \nearrow \text{~~~~} \text{~~~~} \searrow \\ \alpha, \mu \end{array} \right): \frac{-ig_s}{2} \lambda^\alpha \gamma^\mu$
pas de vertex $\gamma\gamma\gamma$		vertex ggg	$\left(\begin{array}{c} \nearrow \text{~~~~} \text{~~~~} \searrow \\ \alpha, \mu \quad \beta, \nu \quad \gamma, \lambda \\ k_1 \quad k_2 \quad k_3 \end{array} \right):$ $-g_s f^{\alpha\beta\gamma} [g_{\mu\nu}(k_1 - k_2)_\lambda + g_{\nu\lambda}(k_2 - k_3)_\mu + g_{\lambda\mu}(k_3 - k_1)_\nu]$ $f^{\alpha\beta\gamma} = \text{cste de structure d'SU(3)}_{\text{couleur}}$

FIG. 8.17.1 – Comparaison des règles de Feynman pour l'évaluation de diagrammes du premier ordre en QED et en QCD.

indices spatio-temporels , α et β des indices de couleur ; de plus, on pose : $u(p_i)c_i, \dots, \equiv u(i)c_i$ pour alléger l'écriture.

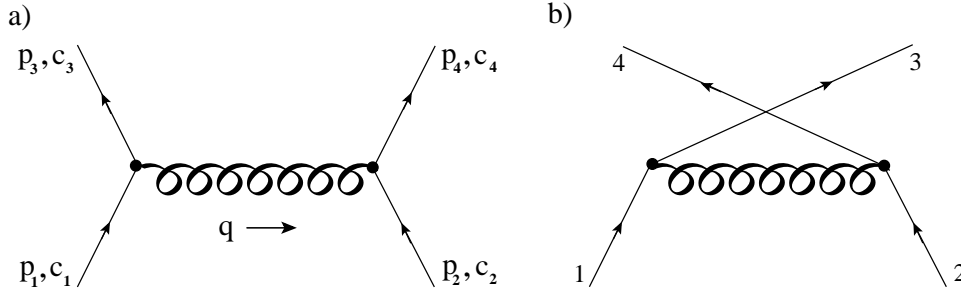


FIG. 8.17.2 – Diagrammes du premier ordre représentant la diffusion (forte) quark-quark.

On définit les courants de quarks :

$$j_1^{\mu\alpha} = [\bar{u}(3)c_3^\dagger] \left[-i \frac{g_s}{2} \lambda^\alpha \gamma^\mu \right] [u(1)c_1] \quad (8.17.1)$$

$$j_2^{\nu\beta} = [\bar{u}(4)c_4^\dagger] \left[-i \frac{g_s}{2} \lambda^\beta \gamma^\nu \right] [u(2)c_2] \quad (8.17.2)$$

le propagateur du gluon :

$$-\frac{ig_{\mu\nu}\delta^{\alpha\beta}}{q^2} \quad (8.17.3)$$

et l'amplitude de transition :

$$-i\mathcal{M}_{qq} = j_1^{\mu\alpha} \left(-\frac{ig_{\mu\nu}\delta^{\alpha\beta}}{q^2} \right) j_2^{\nu\beta}$$

En regroupant les produits de spineurs spatio-temporels d'une part et ceux de spineurs de couleur d'autre part, l'amplitude s'écrit :

$$\mathcal{M}_{qq} = -g_s^2 \frac{1}{q^2} [\bar{u}(3)\gamma^\mu u(1)] [\bar{u}(4)\gamma_\mu u(2)] \frac{1}{4} (c_3^\dagger \lambda^\alpha c_1) (c_4^\dagger \lambda^\alpha c_2) \quad (8.17.4)$$

On définit :

$$g_s^2 = 4\pi\alpha_s, \quad \alpha_s \text{ est la constante de couplage fort,}$$

$$f_{qq} = \frac{1}{4} (c_3^\dagger \lambda^\alpha c_1) (c_4^\dagger \lambda^\alpha c_2), \quad \text{le facteur de couleur.}$$

La sommation sur l'indice de couleur α est implicite :

$$\left(\sum_{\alpha=1}^8 \right)$$

La relation 8.17.4 représente aussi l'amplitude de diffusion e.m. $e^- + \mu^- \rightarrow e^- + \mu^-$ si l'on pose : $g_s = g_e$ et $f_{qq} = 1$ (pas de facteur de couleur). Par conséquent les relations 5.12.8 à 5.12.10 sont applicables aux sections efficaces différentielles.

On a vu au § 8.15 que la valeur du facteur f_{qq} est fonction de la configuration de couleur des deux quarks en interaction, c'est-à-dire soit l'antitriplet (combinaisons antisymétriques) soit le sextet (combinaisons symétriques). On en a déjà fait le calcul pour le premier cas, par une voie rapide; effectuons à titre d'exemple le calcul pour un état typique du sextet, rr , en partant de l'expression de f_{qq} dans (8.17.4). On a :

$$c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{d'où :}$$

$$f_{qq}^{\{6\}} = \frac{1}{4} \sum_{\alpha=1}^8 \left[(100)\lambda_{\alpha} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right] \left[(100)\lambda_{\alpha} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right] = \frac{1}{4} \sum_{\alpha=1}^8 (\lambda_{\alpha}^{11} \lambda_{\alpha}^{11})$$

Un coup d'oeil aux matrices λ_{α} de Gell-Mann (voir 8.6.3) fait apparaître que seules λ_3 et λ_8 ont une entrée en position 11. Par conséquent :

$$f_{qq}^{\{6\}} = \frac{1}{4} [\lambda_3^{11} \lambda_3^{11} + \lambda_8^{11} \lambda_8^{11}] = \frac{1}{4} \left[(1)(1) + \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right) \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right) \right] = +\frac{1}{3} \quad (8.17.5)$$

En langage non relativiste, on a vu que le signe positif de f_{qq} correspond à un potentiel d'interaction répulsif.

8.17.2 Diffusion (forte) d'un quark sur un antiquark de saveur différente.

On a un processus du type : $u + \bar{d} \rightarrow u + \bar{d}$, dont le mécanisme est représenté par le diagramme de la figure 8.17.3 **a**). Le diagramme 8.17.3 **b**) est ignoré puisque les saveurs sont différentes par hypothèse. Avec la notation de la figure 8.17.1, on peut écrire d'emblée :

$$-i\mathcal{M}_{qq} = [\bar{u}(3)c_3^{\dagger}] \left[-i\frac{g_s}{2} \lambda^{\alpha} \gamma^{\mu} \right] [u(1)c_1] \left[\frac{-ig_{\mu\nu} \delta^{\alpha\beta}}{q^2} \right] \quad (8.17.6)$$

$$[\bar{v}(2)c_2^{\dagger}] \left[-i\frac{g_s}{2} \lambda^{\beta} \gamma^{\nu} \right] [v(4)c_4]$$

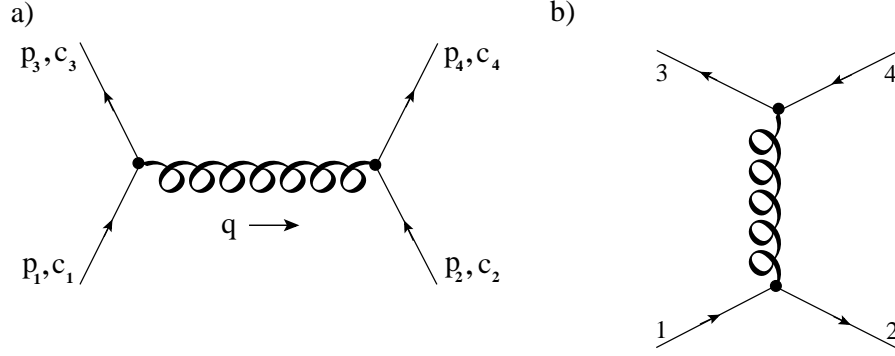


FIG. 8.17.3 – Diagrammes du premier ordre représentant la diffusion (forte) quark-antiquark.

En regroupant les catégories de spineurs comme auparavant, on peut écrire l'amplitude sous la forme :

$$\mathcal{M}_{qq} = -g_s^2 \frac{1}{q^2} [\bar{u}(3)\gamma^\mu u(1)][\bar{v}(2)\gamma_\mu v(4)] \frac{1}{4} (c_3^\dagger \lambda^\alpha c_1)(c_2^\dagger \lambda^\alpha c_4) \quad (8.17.7)$$

avec :

$$\begin{aligned} g_s^2 &= 4\pi\alpha_s \\ f_{\bar{q}q} &= \frac{1}{4} (c_3^\dagger \lambda^\alpha c_1)(c_2^\dagger \lambda^\alpha c_4) \end{aligned}$$

(sommation sur l'indice α implicite)

Si l'on substitue $g_s \rightarrow g_e$, $\alpha_s \rightarrow \alpha$ et l'on pose $f = 1$ dans (8.17.7), cette relation représente l'amplitude de diffusion e.m. : $e^- + \mu^+ \rightarrow e^- + \mu^+$.

On a vu au § 8.15 que le système $\bar{q}q$ peut être dans la configuration du singulet de couleur ou dans celle de l'octet de couleur, et on en a donné les valeurs du facteur de couleur $f_{\bar{q}q}$ ¹⁵⁹

8.17.3 Annihilation (forte) d'un antiquark et d'un quark de même saveur.

Trois diagrammes du premier ordre contribuent aux processus d'annihilation en deux gluons (voir figure 8.17.4 **a,b,c**).

Pour le diagramme 8.17.4 **a**), on a¹⁶⁰ :

$$\begin{aligned} -i\mathcal{M}_a &= [\bar{v}(2)c_2^\dagger] \left[-i\frac{g_s}{2} \lambda^\beta \gamma^\mu \right] [\varepsilon_{4\mu}^* a_4^{\beta*}] \left[\frac{i(\not{q} + m)}{q^2 - m^2} \right] \\ &\quad \left[-i\frac{g_s}{2} \lambda^\alpha \gamma^\nu \right] [\varepsilon_{3\nu}^* a_3^{\alpha*}] [u(1)c_1] \end{aligned} \quad (8.17.8)$$

¹⁵⁹Rappel : le coefficient β^2 vaut $\alpha_s/2$.

¹⁶⁰Rappel de la figure 5.3.2 et de la notation de Dirac (2.3.3) : $\not{p} = \gamma^\mu p_\mu$.

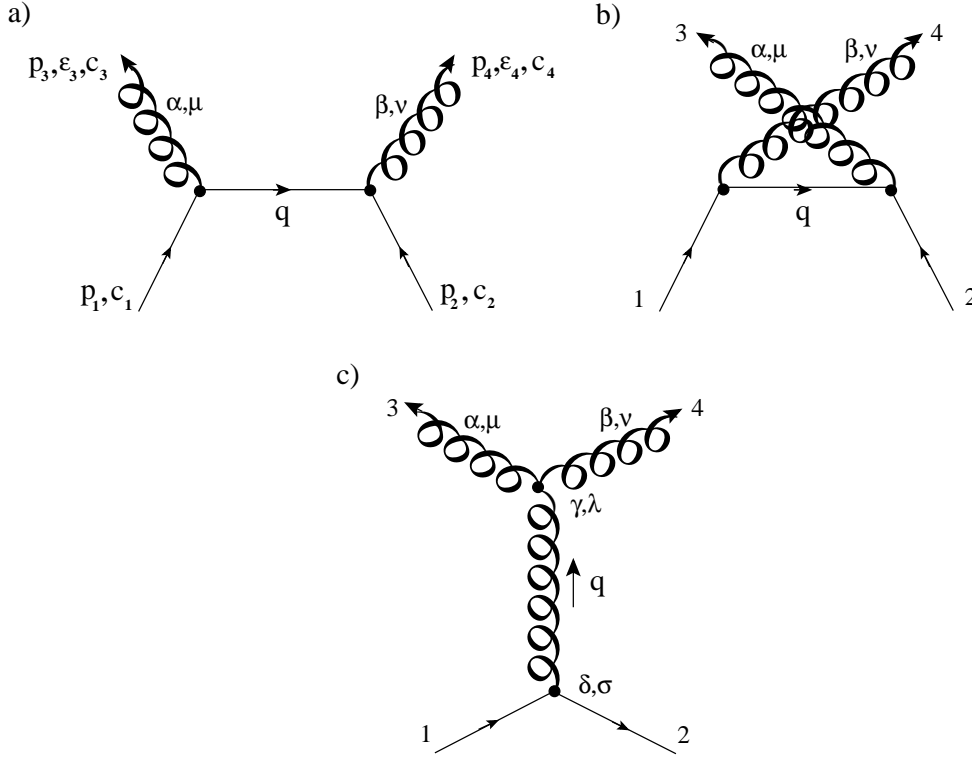


FIG. 8.17.4 – Diagrammes du premier ordre représentant l'annihilation (forte) $\bar{q}q \rightarrow gg$.

Mais :

$$q = p_1 - p_3$$

$$q^2 - m^2 = p_1^2 - 2p_1 p_3 + p_3^2 - m^2 = -2p_1 p_3$$

(gluon sans masse!).

D'où en regroupant les facteurs de couleur en fin d'expression :

$$\mathcal{M}_a = -g_s^2 \frac{1}{p_1 p_3} \bar{v}(2) [\not{\epsilon}_4^* (\not{p}_1 - \not{p}_3 + m) \not{\epsilon}_3^*] u(1) \frac{1}{8} (a_3^{\alpha*} a_4^{\beta*}) (c_2^\dagger \lambda^\beta \lambda^\alpha c_1) \quad (8.17.9)$$

(sommation sur les indices α, β implicite).

De façon similaire, mais en inversant l'ordre des matrices λ , on peut écrire pour le diagramme 8.17.4 b) :

$$\mathcal{M}_b = -g_s^2 \frac{1}{p_1 p_4} \bar{v}(2) [\not{\epsilon}_3^* (\not{p}_1 - \not{p}_4 + m) \not{\epsilon}_4^*] u(1) \frac{1}{8} (a_3^{\alpha*} a_4^{\beta*}) (c_2^\dagger \lambda^\alpha \lambda^\beta c_1) \quad (8.17.10)$$

Ces amplitudes \mathcal{M}_a et \mathcal{M}_b ont leurs correspondantes dans l'annihilation e.m. : $e^+ e^- \rightarrow \gamma \gamma$, si dans (8.17.9) et (8.17.10) on fait la substitution $g_s \rightarrow g_e$ et on laisse de côté les facteurs de couleur.

Le diagramme 8.17.4 c) se caractérise par la présence d'un vertex à trois gluons ; en se rapportant à ce sujet à la figure 8.17.1, on peut écrire

$$-i\mathcal{M}_c = [\bar{v}(2)c_2^\dagger] \left[-i\frac{g_s}{2}\lambda^\delta\gamma_\sigma \right] [u(1)c_1] \left[-i\frac{g^{\sigma\lambda}\delta^{\delta\gamma}}{q^2} \right] \\ \{-g_s f^{\alpha\beta\gamma} [g_{\mu\nu}(-p_3 + p_4)_\lambda + g_{\nu\lambda}(-p_4 - q)_\mu + g_{\lambda\mu}(q + p_3)_\nu]\} [\varepsilon_3^{\mu*} a_3^{\alpha*}] [\varepsilon_4^{\nu*} a_4^{\beta*}]$$

Mais :

$$\begin{aligned} q &= p_3 + p_4 \\ q^2 &= 2p_3p_4 ; \end{aligned}$$

de plus :

$$\varepsilon_3^* p_3 = \varepsilon_4^* p_4 = 0 \text{ (condition de Lorentz),} \quad \text{d'où :}$$

$$\mathcal{M}_c = ig_s^2 \frac{1}{p_3 p_4} \bar{v}(2) [(\varepsilon_3^* \varepsilon_4^*) (\not{p}_4 - \not{p}_3) - 2(p_4 \varepsilon_3^*) \varepsilon_4^* + 2(p_3 \varepsilon_4^*) \varepsilon_3^*] u(1) f^{\alpha\beta\gamma} a_3^{\alpha*} a_4^{\beta*} (c_2^\dagger \lambda^\gamma c_1)$$

(sommation sur les indices de couleur implicite).

Cette amplitude \mathcal{M}_c n'a pas de correspondante dans l'annihilation $e^+e^- \rightarrow \gamma\gamma$.

Remarques :

Les applications ci-dessus se situent dans le cadre de la théorie QCD perturbative. Cette approche concerne le comportement à très courte distance de l'interaction qq ($\bar{q}q$), c'est-à-dire celui régissant les processus à grand transfert d'énergie (vers la limite de la liberté asymptotique). Citons parmi ces processus permettant de tester les prédictions théoriques : la diffusion inélastique profonde, l'annihilation e^+e^- en leptons et hadrons à haute énergie, les collisions hadron-hadron à grand transfert d'énergie, la désintégration d'états de quarkonium. Certains d'entre eux ont fait l'objet de présentations dans les chapitres précédents du cours.

L'étude du comportement à longue distance de l'interaction qq (ou $\bar{q}q$), et en particulier le problème du confinement des quarks, entre dans le cadre de modèles phénoménologiques (voir chapitre 6.6) et dans celui de la théorie QCD non perturbative (théorie de jauge sur réseau). Ce dernier sujet n'est pas abordé ici.

9 Les théories de jauge ; la théorie électrofaible (EW).

9.1 Introduction : concept d'invariance de jauge.

Le concept d' **Invariance de Jauge (IJ)** vient d'une idée d'Hermann Weyl (1921) qui a essayé d'unifier la gravitation et l'électromagnétisme dans une théorie inspirée des concepts géométriques de la relativité générale. H. Weyl introduit un facteur d'échelle (**jauge**) qui modifie localement la géométrie. Soit une fonction $f(x)$ dépendant de l'endroit x . Si la géométrie a une échelle uniforme, $\forall x$,

$$f(x + dx) = f(x) + \partial^\mu f(x) dx_\mu \quad (9.1.1)$$

Par contre, si l'unité de mesure (**la jauge**) varie d'un point à l'autre, 9.1.1 doit être corrigée par un facteur $S(x)$ qui dépend du lieu :

$$\begin{aligned} f(x + dx) &= f(x) + \partial^\mu f(x) dx_\mu [1 + S^\nu dx_\nu] \\ &= f(x) + (\partial^\mu + S^\mu) f(x) dx_\mu + 0(dx^2) \end{aligned} \quad (9.1.2)$$

H. Weyl a cherché à faire correspondre S^μ au champ e.m. A^μ , sans succès.

V. Fock et F. London en 1927 et H.Weyl en 1929 trouvèrent une solution satisfaisante à ce problème en observant l'équivalence :

$$\begin{array}{ccc} \text{écriture classique} & & \text{écriture quantique} \\ p^\mu \rightarrow p^\mu - eA^\mu & \iff & i(\partial^\mu + ieA^\mu) \end{array} \quad (9.1.3)$$

Donc l'idée de H. Weyl aurait fonctionné en physique quantique si $S^\mu \rightarrow ieA^\mu$.

Dans le § 9.2, on commence par donner la signification de l' **IJ** en théorie QED. On montre que :

$$\text{éq. de Maxwell} \implies \mathbf{IJ}$$

Par la suite on inverse le raisonnement ; en supposant l' **IJ** valable on en déduit les lois de l' e.m. :

$$\mathbf{IJ} \implies \text{éq. de Maxwell} \implies \text{QED}$$

Cette approche peut se généraliser à d'autres types d'interactions, par ex. :

$$\mathbf{IJ}(\text{SU}(3)_{\text{couleur}}) \implies \text{QCD}$$

On considère deux types de symétrie de jauge : l'une dite GLOBALE et l'autre dite LOCALE. Elles se distinguent par le paramètre caractérisant le changement de phase de la fonction d'onde :

$$\begin{aligned} \text{Sym. Globale} & : \psi(x) \rightarrow \psi'(x) = \exp^{i\alpha} \psi(x) \quad \text{où } \alpha = \text{constante} \\ \text{Sym. Locale} & : \psi(x) \rightarrow \psi'(x) = \exp^{i\alpha(x)} \psi(x) \quad \text{où } \alpha = \alpha(x) \end{aligned}$$

On sait que la description physique d'un système "libre" n'est pas affectée par le changement de la phase Globale (sauf cas pathologique). En langage de la théorie des groupes, on parle d'invariance sous le groupe $U(1)$ des phases.

9.2 Invariance de jauge en théorie QED.

Si A^μ est le champ e.m., on sait que la transformation de jauge :

$$A^\mu \rightarrow A^\mu - \partial^\mu f(x) \quad (9.2.1)$$

laisse invariante la description du phénomène considéré ; $f(x)$ est une fonction arbitraire des coordonnées. L' **IJ** en e.m. est démontrée en observant que les champs **E** et **B** sont insensibles à cette transformation, ce qui se reflète sur les équations du mouvement.

En notation covariante, les grandeurs :

$$F^{\mu\nu} = \partial^\nu A^\mu - \partial^\mu A^\nu \quad (9.2.2)$$

et

$$F^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} F_{\alpha\beta} \quad (9.2.3)$$

sont insensibles à la transformation 9.2.1.

Les équations de Maxwell¹⁶¹ sont écrites sur la base de $F^{\mu\nu}$ et $F_{\mu\nu}$:

$$\left. \begin{array}{l} \text{div}(E) \\ \text{rot}(B) \end{array} \right\} \rightarrow \partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu \quad (9.2.4)$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{rot}(E) \\ \text{div}(B) \end{array} \right\} \rightarrow \partial_\mu F^{\mu\nu} = 0 \quad (9.2.5)$$

La substitution de 9.2.2 dans 9.2.4 donne :

$$\square A^\mu - \partial^\mu (\partial_\nu A^\nu) = j^\mu \quad (9.2.6)$$

Si l'on adopte la jauge de Lorentz :

$$\partial_\nu A^\nu = 0 \quad (9.2.7)$$

¹⁶¹On a posé : $\frac{4\pi}{c} = 1$.

on obtient une forme à la Klein-Gordon, pour une particule de masse nulle :

$$\square A^\mu = 0 \quad (9.2.8)$$

La relation 9.2.6 est invariante sous la transformation de jauge $A^\mu \Rightarrow A^\mu - \partial^\mu f(x)$. Il n'en serait pas ainsi si le photon avait une masse $M \neq 0$. L'équation d'onde correspondante serait (éq. de Proca) :

$$(\square + M^2)A^\mu - \partial^\mu(\partial_\nu A^\nu) = j^\mu \quad (9.2.9)$$

qui n'est pas invariante de jauge. Donc l'invariance de jauge e.m. est reliée au fait que la masse du photon est nulle (voir chapitre 5).

Ajoutons que les équations 9.2.4 et 9.2.5 contiennent la conservation du courant e.m. :

$$\partial_\mu j^\mu = 0 \quad (9.2.10)$$

On peut suspecter que la conservation du courant e.m. (et en particulier la conservation de la charge, j^0 , en l'absence d'une source) soit d'une façon ou d'une autre connectée à l'invariance de jauge ; toutefois cette connexion n'est pas immédiate.

Mentionnons le raisonnement de E. P. Wigner (1949) pour montrer que la charge électrique est conservée. Supposons qu'on crée une charge q en échangeant un travail W . Pour annihiler cette charge il faut échanger un travail $-W$ par conservation de l'énergie. Si la charge q est créée en \mathbf{x}_1 et déplacée en \mathbf{x}_2 et s'il existe une d.d.p. V entre \mathbf{x}_1 et \mathbf{x}_2 , le système gagne une énergie qV . Au total :

$$E = +W + qV - W = qV$$

Le principe de la conservation de l'énergie et l'existence de "potentiels" amènent à la conclusion que la charge q ne peut pas être créée ; elle ne peut être que conservée.

Q. : peut-on contourner ce raisonnement ?

Pour mettre en évidence l'effet de l' $\mathbf{I}\mathbf{J}$, plaçons-nous dans l'approximation non relativiste. L'équation de Schrödinger en présence d'un champ e.m. est :

$$\left[\frac{1}{2m}(-i\nabla + q\mathbf{A})^2 + qV \right] \psi(\mathbf{x}, t) = i\frac{\partial\psi}{\partial t}(\mathbf{x}, t) \quad (9.2.11)$$

Considérons la transformation de jauge :

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}' &= \mathbf{A} + \nabla f \\ V \rightarrow V' &= V - \frac{\partial f}{\partial t} \quad \text{où :} \end{aligned} \quad (9.2.12)$$

$f = f(\mathbf{x}, t)$.

Si l'on insère 9.2.12 dans 9.2.11, l'équation de Schrödinger a pour solution la fonction ψ' telle que :

$$|\psi'(\mathbf{x}, t)| = |\psi(\mathbf{x}, t)|, \quad (9.2.13)$$

car on veut que la densité de probabilité soit conservée. Donc ψ' et ψ ne diffèrent que par leur phase. On vérifie (exercice) que cette phase vaut $\exp\{iqf\}$. La transformation de jauge complète est donc :

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}' &= \mathbf{A} + \nabla f \\ V \rightarrow V' &= V - \frac{\partial f}{\partial t} \\ \psi \rightarrow \psi' &= \exp\{iqf\}\psi \end{aligned} \quad (9.2.14)$$

Remarquez que $f = f(\mathbf{x}, t)$, donc la transformation de jauge est **locale**. Sous forme "covariante", la transformation 9.2.14 s'écrit :

$$\begin{aligned} A^\mu \rightarrow A'^\mu &= A^\mu - \partial^\mu f \\ \psi \rightarrow \psi' &= \exp\{iqf\}\psi \end{aligned} \quad (9.2.15)$$

L'extension au traitement relativiste sera examinée au § 9.5.

9.3 L'invariance de jauge comme "programme" de construction de la théorie de l' e.m..

Dans le paragraphe précédent l' équation de Schrödinger, est prise comme point de départ. Nous avons vérifié que la dynamique contenue dans cette équation est invariante sous la transformation de jauge 9.2.14. La fonction d'onde est modifiée par le changement de la phase locale (fonction du lieu) :

$$\psi(\mathbf{x}, t) \rightarrow \psi'(\mathbf{x}, t) = \exp\{iqf(\mathbf{x}, t)\}\psi(\mathbf{x}, t) \quad (9.3.1)$$

Au § 9.5 on inversera ce raisonnement :

1) on demandera que la théorie soit invariante sous la transformation de jauge (\cong phase) locale, 9.3.1 ;

2) on en déduira que le système décrit est forcément en interaction, le système étant affecté par un champ (\mathbf{A}, V) . Les équations de propagation avec interaction e.m. en découleront.

On conçoit intuitivement qu'un changement de la phase locale de la fonction d'onde $\psi \rightarrow \psi e^{i\alpha(\mathbf{x})}$ est incompatible avec la description d'un système libre. Considérez le cas de l'expérience d'Young avec un écran à deux trous (voir figure 9.3.1).

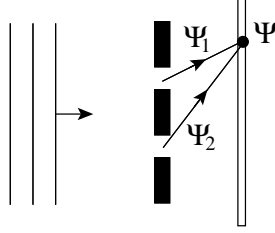


FIG. 9.3.1 – Schéma de l'expérience d'Young.

La fonction ψ sur l'écran est la superposition "cohérente" des deux contributions ψ_1 et ψ_2 . L'intensité de la tache sur l'écran est proportionnelle à $|\psi|^2$:

$$\begin{aligned} |\psi|^2 &= |\psi_1 + \psi_2|^2 = |\psi_1|^2 + |\psi_2|^2 + 2\text{Re}\psi_1^*\psi_2 \\ &= |\psi_1|^2 + |\psi_2|^2 + 2|\psi_1||\psi_2|\cos\delta \end{aligned}$$

où δ est la différence de phase entre ψ_1 et ψ_2 . Il est clair qu'on peut multiplier simultanément ψ_1 et ψ_2 par un facteur de phase commun $e^{i\alpha}$, où $\alpha \in \mathbb{R} =$ constante, sans altérer le résultat physique. Par contre il est exclu d'introduire dans ce système "libre" un déphasage local $e^{i\alpha(\mathbf{x},t)}$ sans affecter la cohérence entre ψ_1 et ψ_2 ; l'invariance de jauge locale 9.3.1 n'est pas une symétrie du système "libre". Il faut nécessairement introduire un champ qui agisse sur la particule :

$$\text{invariance de jauge locale} \iff \text{champ d'interaction}$$

Autrement dit en terme de l'**IJ** locale il s'avère impossible de distinguer l'effet d'un champ de forces de celui d'un changement de phase de ψ .

Avant de considérer la situation d'une symétrie de jauge locale, on va examiner le cas d'une symétrie globale, ce qui nous permettra de définir les outils mathématiques. La symétrie globale est d'ailleurs intéressante en elle-même.

9.4 Transformation de jauge globale.

Soit la transformation de jauge globale :

$$\psi \rightarrow \psi' = e^{i\alpha}\psi \quad \text{avec} \quad \alpha = \text{constante} \quad (9.4.1)$$

On introduit communément la charge de la particule q dans le facteur de phase en posant $\alpha = q\theta$, d'où :

$$\psi \rightarrow \psi' = e^{iq\theta}\psi \quad \text{avec} \quad \theta = \text{constante} \quad (9.4.2)$$

Cette transformation de jauge est applicable aux équations de Dirac libre et de Klein-Gordon libre.

Considérons de façon générale la transformation continue à 1 paramètre :

$$\begin{aligned}
 U_\theta &\equiv e^{iq1\theta} && \text{où : } q = \text{charge} \\
 & && \theta = \text{paramètre} \\
 & && 1 = \text{générateur} \\
 U_\theta &\in \text{ groupe } U(1) \\
 U_\theta &: \psi \rightarrow \psi' = U_\theta\psi
 \end{aligned}$$

On a aussi la transformation infinitésimale :

$$\psi \rightarrow (1 + iq\theta)\psi \quad (9.4.3)$$

L'invariance de l'hamiltonien du système : $\langle \psi | H | \psi \rangle = \langle \psi' | H | \psi' \rangle$ implique la commutativité de q et H :

$$[H, q] = 0, \quad (9.4.4)$$

ce qui est équivalent à dire que la "charge" q est conservée. q est une constante du mouvement¹⁶².

Plus communément on exploite l'**IJ** globale du Lagrangien :

$$L(\mathbf{x}, t) \equiv L(x) = L(\psi(x), \partial^\mu \psi(x)) \quad (9.4.5)$$

On requiert que $L(\mathbf{x}, t)$ soit invariant sous la transformation $\psi \rightarrow \psi + iq\theta\psi = \psi + \delta\psi$:

$$0 = \delta L = \frac{\partial L}{\partial \psi} \delta\psi + \frac{\partial L}{\partial (\partial^\mu \psi)} \delta(\partial^\mu \psi) \quad (9.4.6)$$

$$\text{mais : } \delta(\partial^\mu \psi) = iq\theta \partial_\mu \psi \quad \text{car : } \partial_\mu \theta = 0 \quad \text{d'où :}$$

$$0 = \frac{\partial L}{\partial \psi} iq\theta \psi + \frac{\partial L}{\partial (\partial^\mu \psi)} iq\theta \partial_\mu \psi \quad (9.4.7)$$

Remplaçons $\frac{\partial L}{\partial \psi}$ par son expression tirée de l'éq. d'Euler-Lagrange :

$$0 = i\theta \left[\frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial L}{\partial (\partial^\mu \psi)} q\psi + \frac{\partial L}{\partial (\partial^\mu \psi)} q \partial_\mu \psi \right] \quad (9.4.8)$$

$$0 = i\theta \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left[\frac{\partial L}{\partial (\partial^\mu \psi)} q\psi \right] \quad (9.4.9)$$

¹⁶² q peut être une charge e.m. ou tout autre nombre quantique additif à conserver : nombre baryonique, hypercharge.... Pour SU(N) on aura une situation semblable, par ex. SU(3)_{couleur}, voir § 9.6.

On définit le courant associé à la transformation de jauge :

$$j^\mu = iq \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu \psi)} \psi \quad (9.4.10)$$

La relation 9.4.9 exprime que la divergence 4-dimensionnelle :

$$\partial_\mu j^\mu = 0 \quad (9.4.11)$$

c'est-à-dire que le courant j^μ est conservé. Ce fait est associé à la symétrie $U(1)$.

On a ici une application du théorème de Noether :

$$\begin{array}{c} \exists \text{ une symétrie continue globale} \\ \Updownarrow \\ \exists \text{ un courant conservé} \end{array}$$

Le Lagrangien d'une particule de Dirac libre $L = \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi$ par exemple est invariant sous la transformation $\psi \rightarrow e^{iq\theta}\psi$. Appliquons dans ce cas la définition du courant 9.4.10 :

$$j^\mu = iq \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu \psi)} \psi = iq(\bar{\psi}i\gamma^\mu)\psi = -q\bar{\psi}\gamma^\mu\psi \quad (9.4.12)$$

On obtient le "courant de Dirac" conservé associé à q .

9.5 Transformation de jauge locale.

On va maintenant réaliser le programme annoncé au § 9.3. La transformation de jauge locale est :

$$\psi(x)' \rightarrow e^{iq\theta(x)}\psi(x) = e^{iq\theta(x)}\psi(x) \quad (9.5.1)$$

Le gradient de ψ est affecté par le changement de phase :

$$\partial_\mu \psi'(x) \rightarrow e^{iq\theta(x)} \left[\partial_\mu \psi(x) + \underbrace{iq\psi(x)\partial_\mu \theta(x)}_E \right]$$

On voit que $\partial_\mu \psi' \neq e^{iq\theta(x)}\partial_\mu \psi$ ce qui est incompatible avec les équations de Dirac ou Klein-Gordon libres. Pour rétablir cette compatibilité, il faut trouver une forme de dérivée D_μ telle que :

$$(D_\mu \psi)' \rightarrow e^{iq\theta(x)} D_\mu \psi \quad (9.5.2)$$

On l'obtient en définissant la **dérivée covariante** :

$$D_\mu = \partial_\mu + iqA_\mu \quad (9.5.3)$$

où A_μ est un champ de jauge tel que :

$$A_\mu(x) \rightarrow A'_\mu(x) = A_\mu(x) - \partial_\mu \theta(x) \quad (9.5.4)$$

Effectivement :

$$\begin{aligned} D_\mu \rightarrow (D_\mu \psi)' &= D'_\mu \psi' \\ &= (\partial_\mu + iqA'_\mu) \psi' = (\partial_\mu + iqA_\mu - iq\partial_\mu \theta) e^{iq\theta} \psi \\ &= \partial_\mu (e^{iq\theta} \psi) + iqA_\mu e^{iq\theta} \psi - iq\partial_\mu \theta e^{iq\theta} \psi \\ &= e^{iq\theta} \partial_\mu \psi + iq\partial_\mu \theta e^{iq\theta} \psi + iqA_\mu e^{iq\theta} \psi - iq\partial_\mu \theta e^{iq\theta} \psi \\ &= e^{iq\theta} (\partial_\mu + iqA_\mu) \psi \\ &= e^{iq\theta} D_\mu \psi \end{aligned}$$

comme désiré.

En appliquant la définition 9.5.3 au Lagrangien :

$$L = \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi \quad (9.5.5)$$

on obtient la forme avec interaction e.m. :

$$\begin{aligned} L &= \bar{\psi}(i\gamma^\mu (\partial_\mu + iqA_\mu) - m)\psi \\ &= \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi - q\bar{\psi}\gamma^\mu \psi A_\mu \end{aligned} \quad (9.5.6)$$

La partie “interaction” est :

$$L_{\text{int}} = -q\bar{\psi}\gamma^\mu \psi A_\mu = j^\mu A_\mu \quad (9.5.7)$$

où j^μ est le courant qui vient de la symétrie $U(1)$ du Lagrangien.

• En résumé, demander l’invariance de jauge locale 9.5.1 impose la modification de l’Hamiltonien et du Lagrangien libres par l’introduction d’un “champ de jauge” A^μ . Cela peut se faire par la substitution :

$$\partial^\mu \rightarrow \partial^\mu + iqA^\mu \equiv D^\mu \quad (9.5.8)$$

où D^μ est la **dérivée covariante**. (N.B. : l’**IJ** implique le “couplage minimal” 2.2.41).

• Si on ajoute dans 9.5.6 le terme qui décrit la propagation des photons libres : $-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$, on obtient le Lagrangien total :

$$L = \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi + j^\mu A_\mu - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \quad (9.5.9)$$

L’application de l’équation d’Euler-Lagrange amène à l’équation d’onde d’un champ sans masse :

$$\square A^\mu - \partial^\mu (\partial_\nu A^\nu) = j^\mu \quad (9.5.10)$$

Remarquez que dans le cas d'un champ massif on aurait un terme $(\square + m^2)A^\mu$ qui n'est pas invariant de jauge.

La description du système d'un fermion plus un champ de jauge en interaction est ainsi complète.

Un raisonnement similaire s'applique dans la description du système d'un boson plus un champ de jauge, en partant du Lagrangien approprié.

9.6 Généralisation des transformations de jauge globales.

On a déjà fait usage (chapitre 8) de transformations globales de type $SU(N)$, où $SU(N)$ est un groupe à $N^2 - 1$ paramètres. Dans la représentation fondamentale, la base engendre un espace à N dimensions. Rappelons-en deux exemples :

$$\text{exemple 1 :} \quad SU(2)_{\text{isospin}} : \psi = \begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix}$$

transformation : $\psi' = U\psi$ avec $U = \exp(i\theta^i \tau_i/2)$, où les τ_i sont les matrices de Pauli,

$$\boldsymbol{\theta} \equiv \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{pmatrix} \text{ sont les paramètres de transformation.}$$

Si U est une symétrie du système, alors l'isospin $\mathbf{I} \equiv \frac{\boldsymbol{\tau}}{2}$ est conservé (I^2 et I_3 sont conservés).

$$\text{exemple 2 :} \quad SU(3)_{\text{saveur}} : \psi \equiv \begin{pmatrix} u \\ d \\ s \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad SU(3)_{\text{couleur}} : \psi \equiv \begin{pmatrix} r \\ g \\ b \end{pmatrix}$$

transformation : $\psi' = U\psi$ avec $U = \exp(i\alpha^i \lambda_i/2)$, où les λ_i sont les matrices de Gell-Mann et $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_8)$ sont les paramètres de la transformation.

9.7 Généralisation des transformations de jauge locales ; théories de Yang et Mills.

- Considérons le cas d'une symétrie $SU(2)$:

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \rightarrow \psi' = \exp\left(i\boldsymbol{\alpha} \frac{\boldsymbol{\tau}}{2}\right) \psi = \exp(i\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{T}) \psi = \begin{pmatrix} \psi'_1 \\ \psi'_2 \end{pmatrix} \quad (9.7.1)$$

Admettons que les paramètres $\boldsymbol{\alpha}$ dépendent de la position x dans l'espace-temps et introduisons une "charge" g telle que : $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}(x) = g\boldsymbol{\theta}(x)$; la transformation s'écrit :

$$\psi' = \exp(ig\boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{T}) \psi \quad (9.7.2)$$

S'inspirant du raisonnement développé pour la symétrie $U(1)$ (§ 9.3), on impose à la théorie d'être invariante sous 9.7.2. Introduisons la dérivée covariante (cfr 9.5.3) :

$$D_\mu = \partial_\mu + ig\mathbf{T} \cdot \mathbf{W}^\mu(\mathbf{x}), \quad \text{où} \quad (9.7.3)$$

les \mathbf{W}^μ sont 3 champs de jauge sans masse :

$$\mathbf{W}^\mu \equiv (W_1^\mu, W_2^\mu, W_3^\mu) \quad (9.7.4)$$

Si l'on demande que $D_\mu\psi \rightarrow \exp(ig\mathbf{T} \cdot \boldsymbol{\theta})D_\mu\psi$, on trouve¹⁶³ l'analogue de 9.5.4 :

$$\mathbf{W}^\mu \rightarrow (\mathbf{W}^\mu(x) - \partial^\mu\boldsymbol{\theta}(x) - g\boldsymbol{\theta}(x) \cdot \mathbf{W}^\mu(x)) \quad (9.7.5)$$

Le facteur multiplicatif de g est dû au fait que le groupe $SU(2)$ est **non-Abélien**. D'une façon générale, les générateurs d' $SU(N)$ où $N > 1$ ne commutent pas. En conséquence, l'introduction de la dérivée covariante D^μ dans l'équation de Dirac :

$$(i\gamma_\mu D^\mu - m)\psi = 0$$

ou dans le Lagrangien :

$$L = [-i(D_\mu\bar{\psi})\gamma^\mu - m\bar{\psi}]\psi$$

va produire des termes en $(g\bar{\psi}\gamma^\mu\mathbf{T}\psi) \cdot \mathbf{W}_\mu$ qui représentent l'interaction des champs \mathbf{W}^μ et du courant $j^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\mathbf{T}\psi$ avec un couplage unique g . On a ici l'analogue de $q\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu$ de l'interaction e.m. (cfr. 9.5.7). On trouve de plus des termes d'auto-interaction du type WWW et $WWWW$ (voir la figure 9.7.1).

Q. : établir l'expression des termes d'auto-interaction.

- On peut être tenté d'appliquer sans autre la procédure à l'interaction faible en faisant l'association $\{W_1 W_2 W_3\} \Rightarrow \{W^\pm, Z\}$. Toutefois on se heurte à un problème du fait que le terme de la masse dans le Lagrangien $\sim m^2 W^\mu W_\mu$ (m de l'ordre de 100 GeV) est incompatible avec l'invariance de jauge. On verra ultérieurement comment remédier à cela.
- Considérons le cas de la symétrie $SU(3)_{\text{couleur}}$.

Rappelons que la fonction d'onde ψ d'un quark comporte une partie dépendant de la charge de couleur :

$$|\text{couleur}\rangle = \begin{pmatrix} r \\ g \\ b \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \end{pmatrix}$$

¹⁶³voir par ex. ref.7 § 2.3.4

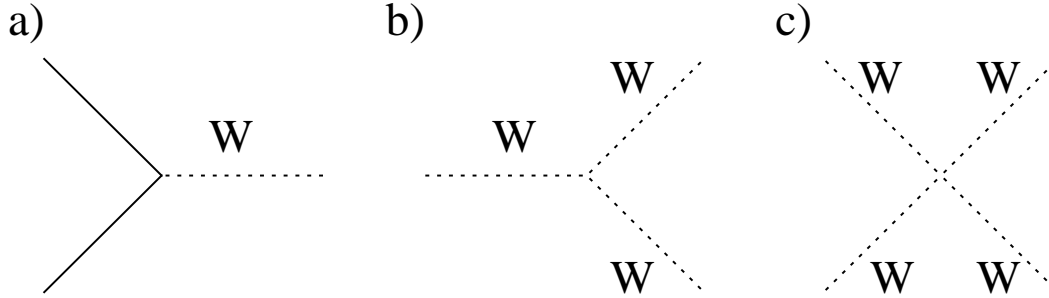


FIG. 9.7.1 – Diagrammes d’interactions avec le champ \mathbf{W} ; **a)** interaction avec un courant de fermion ; **b** et **c)** auto-interactions.

L’ **IJ** nous conduit à introduire 8 champs de jauge sans masse A^α , $\alpha = 1, \dots, 8$ (les gluons), qui interagissent avec les charges de couleur des quarks. Les termes d’interaction sont de la forme¹⁶⁴ :

$$g_s \bar{\psi} \gamma^\mu \frac{\lambda^\alpha}{2} \psi A_\alpha = g_s j^\alpha A_\alpha$$

De plus on a des termes d’interaction du champ de jauge avec lui-même, typiques d’un groupe non-Abélien. Ce sont les interactions à 3 et 4 gluons (§ 8.17).

En résumé :

- Dans l’hypothèse d’une symétrie de jauge locale $SU(N)$, on obtient N^2-1 champs de jauge dont les quanta sont des bosons sans masse. Ces bosons interagissent avec les fermions et entre eux si $N > 1$.
- La version globale de la même symétrie de jauge $SU(N)$ garantit que les charges sont conservées. Les courants (e.m., de couleur, ..) satisfont à l’équation de continuité $\partial^\mu j_\mu^\alpha \equiv 0$ (α est associé aux charges en question).

9.8 Effet d’écran par champ scalaire ; bosons de Higgs et bosons de Goldstone.

Est-il possible d’avoir des champs de jauge massifs sans détruire l’invariance de jauge de la théorie et par conséquent la validité de la procédure ?

Un raisonnement heuristique amène de prime abord à une réponse négative. En effet, on a introduit ces champs pour “connecter” des points de l’espace-temps où les fonctions d’onde ont des phases différentes. Ces points pouvant se trouver à des distances arbitrairement grandes, le vecteur de la connexion doit avoir une portée infinie, d’où un champ de jauge de masse nulle.

¹⁶⁴Rappel : $g_s = \sqrt{4\pi\alpha_s}$, $\alpha_s =$ constante de couplage fort.

Toutefois, on a des exemples en physique du solide où le photon prend une masse effective lors du passage dans un milieu où des courants peuvent s'établir. C'est un effet d'écran dû à l'excitation du milieu qui s'oppose au changement. Le cas limite est celui du supraconducteur qui expulse le champ \mathbf{B} de son intérieur (donc $M_{\text{photon}} \rightarrow \infty$).

L'interprétation de cet effet est la suivante. Dans la jauge de Lorentz on a $\square \mathbf{A} = \mathbf{j}$. Si le courant \mathbf{j} est créé par la présence d'un champ \mathbf{A} , disons $\mathbf{j} = -M^2 \mathbf{A}$, on obtient $\square \mathbf{A} = -M^2 \mathbf{A}$, ce qui est équivalent à l'équation de propagation d'un champ massif :

$$(\square + M^2)\mathbf{A} = 0 \quad (9.8.1)$$

Supposons qu'on cherche à faire pénétrer ce milieu par un champ \mathbf{B} . La réponse du milieu s'exprime par¹⁶⁵ :

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mathbf{j} = (-M^2 \mathbf{A}) \quad (9.8.2)$$

Si l'on prend le rotationnel de cette expression on obtient avec $\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B}$:

$$\nabla^2 \mathbf{B} = -M^2 \mathbf{B} \quad (9.8.3)$$

La solution de l'équation 9.8.3 est du type :

$$B = B_0 \exp^{-Mx} \quad (9.8.4)$$

caractérisée par la longueur de pénétration :

$$\lambda = 1/M \quad (9.8.5)$$

Un exemple de cette situation est celle d'un corps supraconducteur maintenu en dessous de sa température critique T_c . Les paires de Cooper constituent un gaz de bosons donnant lieu à un courant macroscopique (elles peuvent être toutes dans le même état quantique $|\mathbf{p}\rangle$) :

$$\mathbf{j} = (-Q^2/m) |\phi|^2 \mathbf{A} \quad (9.8.6)$$

Dans cette expression, $Q = 2$ (en unité de e), $m = 2m_e$ (en unité d' $\hbar c$), $|\phi|^2 = \frac{n_s}{2}$, où n_s est le nombre d' e^- supraconducteur par unité de volume. On obtient l'équation de London (1950) en prenant le rotationnel :

$$\nabla \times \mathbf{j} = -\frac{2^2}{2m_e} \frac{n_s}{2} \mathbf{B} \quad (9.8.7)$$

La longueur de pénétration est :

$$\lambda = M^{-1} = \sqrt{\frac{2m_e}{2^2} \frac{2}{n_s}} \quad (9.8.8)$$

Pour $n_s \simeq 4.10^{28} m^{-3}$, $2m_e \simeq 5.10^{14} m^{-1}$, on obtient $\lambda \simeq 10^{-8} m \simeq 100 \text{ \AA}$, ce qui correspond à une masse $M = \hbar c/\lambda \simeq 20 \text{ eV}$. Si la température du supraconducteur est élevée au-dessus de sa température critique T_c , n_s diminue brusquement et en conséquence la longueur de pénétration λ grandit ($M \simeq 0$) (voir figure 9.8.1).

¹⁶⁵On a posé : $\frac{4\pi}{c} = 1$.

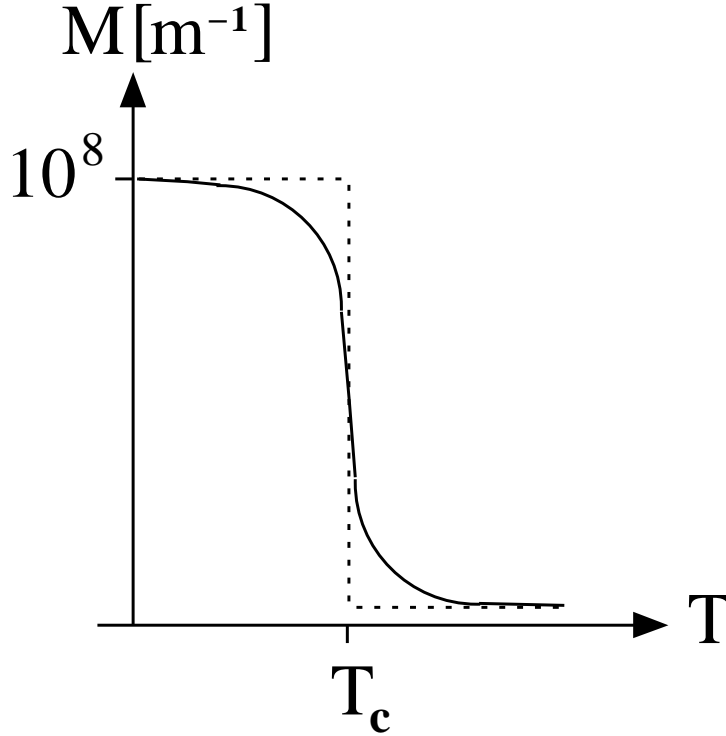


FIG. 9.8.1 – Evolution de la masse effective du photon en fonction de la température d’un milieu supraconducteur.

Pour transposer une telle situation dans le contexte d’une théorie de jauge, on est amené à postuler l’existence dans tout l’espace d’un champ scalaire (champ de bosons) susceptible d’engendrer un courant “d’écrantage”¹⁶⁶ à la façon des paires de Cooper. En conséquence les champs de jauge (et les champs de fermions) peuvent acquérir une masse.

Ce champ présente une caractéristique qu’on ne retrouve dans aucun autre champ rencontré en physique des particules, l’amplitude moyenne dans le vide est non nulle :

$$\langle 0 | \phi | 0 \rangle \neq 0 \quad (9.8.9)$$

La description théorique d’un tel champ a été élaborée à partir d’une suggestion de Y. Nambu et sur la base de la théorie de Ginzburg-Landau en supraconductivité¹⁶⁷.

¹⁶⁶Rappel de 5.2.11; le courant associé à un champ scalaire ϕ est donné par : $j^\mu(\phi) = iq[\phi^*(\partial^\mu\phi) - (\partial^\mu\phi^*)\phi]$.

¹⁶⁷Les expériences au LEP II du CERN ont fourni un signal ténu d’événements candidats comme quanta de ce champ; toutefois ces premiers résultats demandent à être confirmés; voir table PDG 2002, Gauge and Higgs Boson Particle Listings.

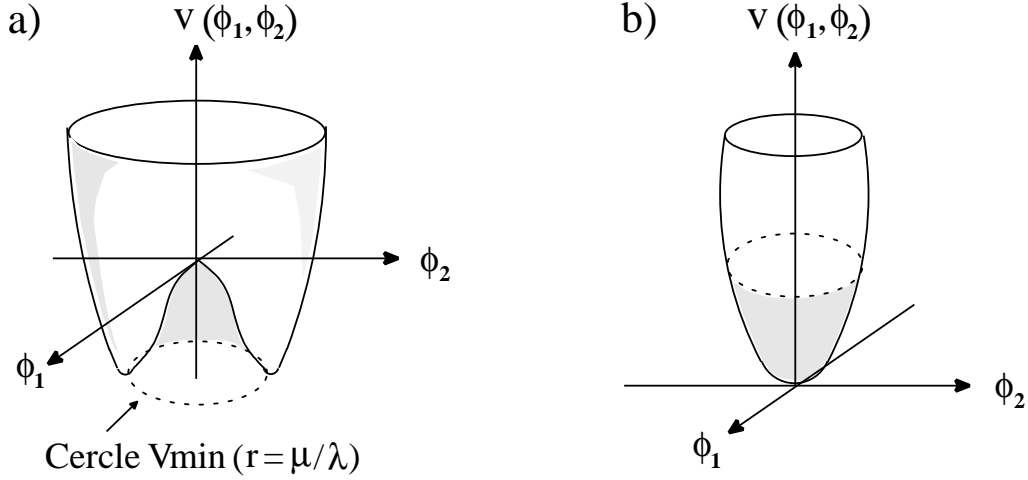


FIG. 9.8.2 – Allure du potentiel dû au champ complexe $\phi = \phi_1 + i\phi_2$; **a)** $V(\phi)$ pour $\mu^2 > 0$; **b)** $V(\phi)$ pour $\mu^2 < 0$.

Considérons le champ scalaire complexe $\phi \in \mathbb{C}$, $\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 + i\phi_2)$, les composantes ϕ_1 et ϕ_2 étant réelles. Le Lagrangien exprimé en fonction de ϕ , ϕ^* et de leurs dérivées s'écrit :

$$L = (\partial^\mu \phi)(\partial^\mu \phi)^* - V(\phi) \quad (9.8.10)$$

Le terme du potentiel peut être explicité sous la forme :

$$\begin{aligned} V(\phi) &= -\mu^2 \phi^* \phi + \lambda^2 (\phi^* \phi)^2 \\ &= -\frac{1}{2} \mu^2 (\phi_1^2 + \phi_2^2) + \frac{1}{4} \lambda^2 (\phi_1^2 + \phi_2^2)^2, \quad \text{où} \end{aligned} \quad (9.8.11)$$

μ et λ sont des constantes positives.

Dans le plan complexe ϕ_1, ϕ_2 , $V(\phi_1, \phi_2)$ a l'allure d'un fond de bouteille (voir figure 9.8.2 **a**). A l'origine $\phi_1 = \phi_2 = 0$, $V(\phi_1, \phi_2)$ a un maximum local correspondant à un état instable. Le lieu des minima de $V(\phi_1, \phi_2)$ se situe sur le cercle de rayon :

$$|\phi_{\min}| = \sqrt{\phi_1^2 + \phi_2^2} = \frac{\mu}{\lambda} \equiv \frac{f}{\sqrt{2}} \quad (9.8.12)$$

Il représente l'ensemble des états d'équilibre stable. Pour ces états, la relation (9.8.9) est satisfaite :

$$\langle 0 | \phi_{\min} | 0 \rangle = \frac{f}{\sqrt{2}} \neq 0$$

On peut passer d'un de ces états d'équilibre à l'autre par la transformation globale $U(1) = e^{i\alpha}$, où $\alpha \in \mathbb{R}$ est un paramètre réel ; ces états sont donc de la forme :

$$\phi_{\text{vide}} = \frac{f}{\sqrt{2}} e^{i\alpha} \quad (9.8.13)$$

Si l'on prend un de ces états d'équilibre au hasard, il apparaît dissymétrique alors que le potentiel (et le Lagrangien) est symétrique (invariant) sous la transformation $U(1)$. On a une situation de symétrie brisée (on dit aussi de symétrie cachée).

C'est intentionnellement qu'on a mis un signe négatif devant le terme en μ^2 de l'expression (9.8.11)¹⁶⁸. Si on avait mis un signe positif, $V(\phi_1, \phi_2)$ aurait eu l'allure d'un fond d'amphore (voir figure 9.8.2 **b**), avec un minimum en $\phi_1 = \phi_2 = 0$. L'état d'équilibre stable en question serait symétrique sous $U(1)$ ci-dessus. La valeur $\mu^2 = 0$ est donc un point critique où s'effectue la transition entre la solution d'un état d'équilibre symétrique et celle d'états d'équilibre dégénérés dissymétriques.

Revenons à une situation de symétrie brisée en considérant l'état :

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\mu}{\lambda} + \eta(x) + i\chi(x) \right) \quad (9.8.14)$$

où $\eta(x)$ et $\chi(x)$ sont des champs scalaires tels que :

$$\langle 0 | \eta_{\text{min}} | 0 \rangle = 0 \quad \text{et} \quad \langle 0 | \chi_{\text{min}} | 0 \rangle = 0 \quad (9.8.15)$$

On peut se représenter $\eta(x)$ comme une fluctuation radiale autour de $\phi_1 = \frac{\mu}{\lambda}$ et $\chi(x)$ comme une fluctuation azimutale autour de $\phi_2 = 0$. On se situe donc au voisinage d'un point de l'axe réel du plan (voir figure 9.8.3).

Si on insère (9.8.14) dans l'expression du Lagrangien (9.8.10) en tenant compte de (9.8.11), on obtient :

$$L = \left[\frac{1}{2} (\partial_\mu \eta) (\partial^\mu \eta) - \frac{1}{2} (2\mu^2) \eta^2 \right] + \left[\frac{1}{2} (\partial_\mu \chi) (\partial^\mu \chi) \right] + \dots \quad (9.8.16)$$

On n'a explicité ici que les termes significatifs pour la présente discussion.

Q. : construire l'expression complète du Lagrangien ; voir que $L(\eta)$ est effectivement dissymétrique, alors que $L(\phi)$ est symétrique.

Le terme en $\eta(x)$ représente la contribution d'un champ scalaire visiblement massique ($m_\eta = \sqrt{2\mu^2}$), c'est ce qu'on nomme le champ des bosons de Higgs. Le

¹⁶⁸Dans la littérature, on trouve plus souvent ce terme avec le signe positif, mais on choisit de définir $\mu^2 < 0$.

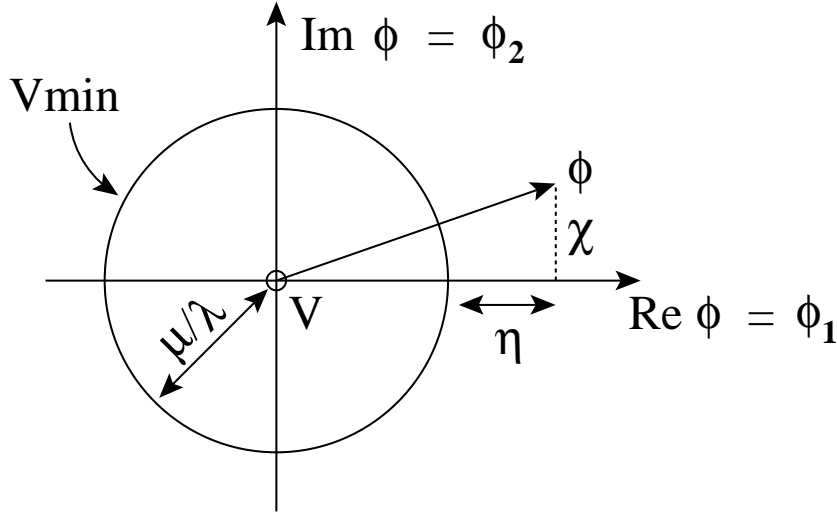


FIG. 9.8.3 - $V_{\min}(\text{Re}(\phi), \text{Im}(\phi)) = V_{\min}(\phi_1, \phi_2)$.

terme en $\chi(x)$ représente la contribution d'un champ scalaire sans masse, c'est ce qu'on appelle le champ de bosons de Goldstone¹⁶⁹.

On peut comprendre intuitivement ce résultat en imaginant un petit déplacement par rapport à la région V_{\min} (figure 9.8.3) ; se déplacer radialement coûte de l'énergie cinétique, d'où la présence d'un terme de masse, alors que se déplacer tangentielllement ne coûte rien.

Il faut maintenant examiner les conséquences de l'interaction entre ces champs de bosons et un champ de jauge ; c'est l'objet du paragraphe suivant.

9.9 Brisure de la symétrie de jauge locale ; mécanisme de Higgs.

Dans sa forme la plus simple, le mécanisme de Higgs¹⁷⁰ est essentiellement le modèle de Goldstone qu'on vient de présenter, avec l'addition d'une interaction électromagnétique. Celle-ci est amenée par l'application du principe de jauge exposé au § 9.5 : on requiert l'invariance du Lagrangien sous une transformation de jauge locale, ce qui impose l'introduction d'un champ de jauge A_μ via la substitution $\partial_\mu \rightarrow \partial_\mu + iqA_\mu$. En se bornant aux termes les plus significatifs pour le

¹⁶⁹Ce modèle est une illustration d'un théorème général dû à J. Goldstone, Nuovo Cimento 19 (1961) 154.

¹⁷⁰P.W.Higgs Phys. Lett.12 (1964) 132 et Phys.Rev.Lett. 13 (1964) 508

présent exposé, on obtient l'expression du Lagrangien suivante :

$$\begin{aligned}
L_{\eta,\chi,A_\mu} &= \left[\frac{1}{2}(\partial_\mu\eta)(\partial^\mu\eta) + \frac{1}{2}(2\mu^2)\eta^2 \right] + \left[\frac{1}{2}(\partial_\mu\chi)(\partial^\mu\chi) \right] \\
&+ \left[-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}\left(\frac{q\mu}{\lambda}\right)^2 A_\mu A^\mu \right] + \dots, \quad \text{où :} \\
F_{\mu\nu} &= \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu
\end{aligned} \tag{9.9.1}$$

Q. : construire l'expression complète du Lagrangien L_{η,χ,A_μ} .

On retrouve les contributions des champs “d'écrantage”, c'est-à-dire le champ massique $\eta(x)$ et le champ sans masse $\chi(x)$ (Goldstone); de plus, on trouve la contribution d'un champ de jauge massique A_μ (masse $\frac{q\mu}{\lambda}$). Cette situation nouvelle pose un problème touchant au nombre de degrés du système. En effet le champ A_μ purement transversal au départ, acquiert une polarisation longitudinale en devenant massique, donc un degré de liberté supplémentaire. Cet accroissement doit trouver une compensation par ailleurs. Elle peut être mise en évidence en redéfinissant le champ $\phi(x)$ en termes de son module et de sa phase, sous la forme :

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\frac{\mu}{\lambda} + H(x) \right] \exp \left(i \frac{\xi(x)}{\frac{\mu}{\lambda}} \right) \quad \text{où :} \tag{9.9.2}$$

$H(x)$ et $\xi(x)$ sont des scalaires réels aux moyennes dans le vide nulles.

Par une transformation de jauge adéquate sous $SU(2)_L$, on s'arrange à compenser le facteur de phase, ce qui entraîne l'élimination du champ $\xi(x)$ (Goldstone) dans l'expression du Lagrangien. C'est ce qu'on appelle le mécanisme de Higgs. Dans cette jauge particulière (appelée communément jauge unitaire), l'expression du champ $\phi(x)$ est :

$$\phi' = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\frac{\mu}{\lambda} + H(x) \right] \tag{9.9.3}$$

et celle du champ A_μ :

$$A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \frac{1}{q\frac{\mu}{\lambda}} \partial_\mu \xi(x) \tag{9.9.4}$$

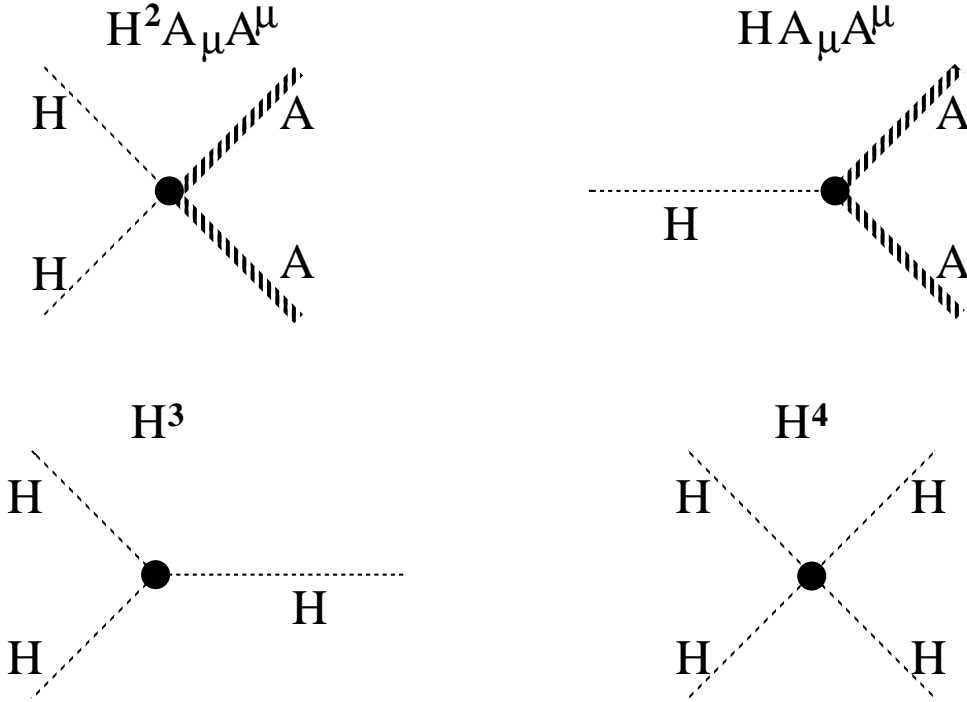


FIG. 9.9.1 – Diagrammes d'interaction entre champ de Higgs et champ A^μ et champ de Higgs avec lui-même.

Le Lagrangien (9.9.1) devient :

$$\begin{aligned}
 L_{H,A_\mu} = & \left[\frac{1}{2}(\partial_\mu H)(\partial^\mu H) + \frac{1}{2}(2\mu^2)H^2 \right] & (9.9.5) \\
 & + \left[-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}\left(\frac{q\mu}{\lambda}\right)^2 A_\mu A^\mu \right] \\
 & + \left(\frac{q^2\mu}{\lambda}\right) H A_\mu A^\mu + \frac{1}{2}q^2 H^2 A_\mu A^\mu - \lambda_\mu H^3 - \frac{1}{4}\lambda^2 H^4 + \frac{1}{4}\frac{\mu^4}{\lambda^2}
 \end{aligned}$$

Q. : construire l'expression du Lagrangien L_{H,A_μ} .

Le Lagrangien L_{H,A_μ} décrit correctement le spectre de masses attendu. Il représente deux particules massives interagissantes : le boson scalaire de Higgs (masse $m_H = \sqrt{2\mu^2}$) et le boson de jauge vectoriel A_μ (masse $m_{A_\mu} = \frac{q\mu}{\lambda}$). Les autres termes de la relation 9.9.5 décrivent (à la constante $\frac{1}{4}\frac{\mu^4}{\lambda^2}$ près) les interactions entre les champs (voir figure 9.9.1).

Cette analyse peut être étendue à d'autres symétries de jauge que $U(1)$; nous l'illustrons au § 9.10.

9.10 La théorie électrofaible (EW).

9.10.1 L'isospin et l'hypercharge faibles, la symétrie $SU(2)_L \times U(1)_Y$.

Le nom de la théorie électrofaible (modèle de **G**lashow, **W**einberg, **S**alam) a déjà été évoqué dans ce cours, en particulier au chapitre 7. Notre objectif ici est d'en exposer les bases et d'en rappeler les prédictions saillantes, sans entrer dans des détails de calcul.

L'invariance de jauge est une propriété centrale des théories de champs quantiques parce qu'elle garantit que les grandeurs calculées ont des valeurs finies¹⁷¹. La théorie QED en est un exemple ; on a vu (§ 9.2) que le Lagrangien L_{QED} est invariant sous la transformation de jauge :

$$U(1) = \exp[iq\alpha(x)] \quad (9.10.1)$$

On se pose dès lors la question : quel est le groupe de symétrie de jauge relevant dans le cas de l'interaction faible ? Une réponse a été suggérée par S.L. Glashow (1961) en se fondant sur l'observation que les courants faibles chargés n'affectent que la composante gauchère (hélicité -1) des fermions (leptons et quarks), alors que le courant faible neutre (de même que le courant e.m.) touche les composantes gauchère et droitère (hélicité ± 1).¹⁷² On introduit le concept d'isospin faible, défini par le vecteur-opérateur $\mathbf{T}(T_1, T_2, T_3)$ dont les composantes T_i sont les générateurs des transformations d'un groupe de symétrie $SU(2)_L$ dans l'espace d'isospin faible. Les T_i ne commutent pas : $[T_i, T_j] = i\varepsilon_{ijk}T_k$ (groupe non-Abélien). Les membres gauchers d'une famille de fermions sont considérés comme formant un doublet d'isospin faible, tel que¹⁷³ :

$$T = \frac{1}{2}, \quad T_3 = \begin{cases} +1/2 & \left(\begin{array}{c} \nu_e \\ e^- \end{array} \right)_L, \dots \\ -1/2 & \left(\begin{array}{c} u \\ d' \end{array} \right)_L, \dots \end{cases} \quad (9.10.2)$$

Ce doublet se transforme sous $SU(2)_L$ comme :

$$\chi'_L \Rightarrow \exp[ig\boldsymbol{\theta}(x) \cdot \mathbf{T}] \chi_L, \quad \text{où} \quad (9.10.3)$$

$$\chi_L = \left(\begin{array}{c} \nu_e \\ e^- \end{array} \right), \dots, \quad \text{ou} \quad \left(\begin{array}{c} u \\ d' \end{array} \right)_L, \dots$$

g est "une charge faible", par analogie avec la charge électrique unité e , $\mathbf{T} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\tau}$, où les τ_i sont les matrices de Pauli.

¹⁷¹Typiquement les amplitudes de transition dans le calcul des perturbations sont renormalisables (§ 5.15).

¹⁷²Rappelons que les composantes $f_{L,R}$ d'un fermions f s'obtiennent par l'opération de projection : $f_{L,R} = \frac{1}{2}(1 \mp \gamma_5)f$, avec L pour "left" et R pour "right".

¹⁷³Pour simplifier l'écriture, on s'est limité à la première famille, la description peut être étendue aux deux autres familles.

Les membres droitiers de la même famille de fermions sont considérés comme formant un singulet d'isospin faible, tel que¹⁷⁴ :

$$T = 0 \quad ; \quad T_3 = 0 : e_R^-, \dots, u_R, d_R', \dots \quad (9.10.4)$$

Ils se transforment sous $U(1)_{Y_W}$ comme :

$$\chi_R' \implies \exp[ig'\theta(x)\frac{Y_W}{2}]\chi_R, \quad \text{où} \quad (9.10.5)$$

$\chi_R = e_R^-, \dots$ ou u_R, d_R', \dots
 g' est "une autre charge faible",
 Y_W est l'hypercharge faible.

La grandeur Y_W est définie par analogie avec l'hypercharge introduite en interaction forte¹⁷⁵ (relation 4.10.6) :

$$\frac{Y_W}{2} = Q - T_3$$

On a consigné dans le tableau 9.10.1 les valeurs numériques des nombres quantiques (additifs) T , T_3 et Y_W assignés aux différents états de fermions.

Les transformations locales 9.10.3 et 9.10.5 impliquent l'existence de champs d'interaction. Le modèle de Glashow, Weinberg, Salam introduit trois champs de jauge associés au groupe $SU(2)_L$ et formant un triplet d'isospin faible¹⁷⁶ (vecteur) :

$$T = 1, \quad T_3 = \begin{cases} +1 \\ -1 \\ 0 \end{cases} : \begin{pmatrix} W_1^\mu \\ W_2^\mu \\ W_3^\mu \end{pmatrix} \quad (9.10.6)$$

et un champ de jauge associé au groupe $U(1)_{Y_W}$ formant un singulet d'isospin faible (scalaire) :

$$T = 0 \quad ; \quad T_3 = 0 : (B^\mu) \quad (9.10.7)$$

La symétrie combinée $SU(2)_L \times U(1)_{Y_W}$ étant supposée parfaite, ces champs sont sans masse.

On peut dès lors écrire les expressions des dérivées covariantes. Pour les fermions gauchers :

$$D^\mu = \partial^\mu + ig\frac{\boldsymbol{\tau}}{2} \cdot \mathbf{W}^\mu + ig'\frac{Y_W}{2} B^\mu \quad (9.10.8)$$

¹⁷⁴Jusqu'à preuve du contraire, il n'y a pas de transition faible faisant passer d'un membre droitier à l'autre dans une même famille de fermions. Rappelons par ailleurs que les neutrinos ne sont observés que dans l'état gaucher (§ 3.5).

¹⁷⁵Remarquons qu'il n'existe aucune connexion physique entre les concepts d'isospin et d'hypercharge d'une part et ceux d'isospin et d'hypercharge faibles d'autre part ; il n'y a entre eux qu'une similitude de construction formelle.

¹⁷⁶Notons que dans le modèle, le photon et le gluon n'ont pas d'attribut d'isospin faible.

	Q	T	T ₃	Y _W
états de fermion				
ν_e, ν_μ, ν_τ	0	$\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{2}$	-1
e_L^-, μ_L^-, τ_L^-	-1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	-1
e_R^-, μ_R^-, τ_R^-	-1	0	0	-2
u_L, c_L, t_L	$+\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{3}$
d_L', s_L', b_L'	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{3}$
u_R, c_R, t_R	$+\frac{2}{3}$	0	0	$+\frac{4}{3}$
d_R', s_R', b_R'	$-\frac{1}{3}$	0	0	$-\frac{2}{3}$

TAB. 9.10.1 – Valeurs des nombres quantiques d'isospin et d'hypercharge faibles attribuées aux différents états d'hélicité des fermions.

et pour les fermions droitiers, non affectés par $SU(2)_L$:

$$D^\mu = \partial^\mu + ig' \frac{Y_W}{2} B^\mu \quad (9.10.9)$$

Si l'on prend en compte les termes d'énergie cinétique des champs de jauge, l'expression du Lagrangien invariant prend la forme suivante :

$$\begin{aligned}
L = & \bar{\chi}_L \gamma_\mu \left[\partial^\mu - ig \frac{\boldsymbol{\tau}}{2} \cdot \mathbf{W}^\mu - ig' \frac{Y_W}{2} B^\mu \right] \chi_L \\
& + \bar{\chi}_R \gamma_\mu \left[\partial^\mu - ig' \frac{Y_W}{2} B^\mu \right] \chi_R - \frac{1}{4} \mathbf{W}_{\mu\nu} \cdot \mathbf{W}^{\mu\nu} - \frac{1}{4} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu}
\end{aligned} \quad (9.10.10)$$

L'examen des composantes d'interaction des fermions gauchers et droitiers avec les champs \mathbf{W}^μ et B^μ amène à d'intéressantes déductions. Celles avec le champ

\mathbf{W}^μ peuvent être écrites :

$$-ig\mathbf{j}_\mu \cdot \mathbf{W}^\mu = -ig \left[\frac{1}{\sqrt{2}}(j_\mu^+ W^{\mu+} + j_\mu^- W^{\mu-}) + j_\mu^3 W^{\mu3} \right], \quad \text{où :} \quad (9.10.11)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{j}_\mu &= \bar{\chi}_L \gamma_\mu \frac{\boldsymbol{\tau}}{2} \chi_L, \\ j_\mu^\pm &= j_\mu^1 \pm ij_\mu^2, \\ W^{\mu\pm} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(W^{\mu1} \mp iW^{\mu2}) \end{aligned}$$

Celles avec le champ B^μ ont la forme¹⁷⁷ :

$$-ig' \frac{j_\mu^{Y_W}}{2} B^\mu = -ig' [(j_\mu^{em} - j_\mu^3) B^\mu], \quad \text{où :} \quad (9.10.12)$$

$$j_\mu^{Y_W} = \bar{\chi}_L \gamma_\mu Y_W \chi_L + \bar{\chi}_R \gamma_\mu Y_W \chi_R,$$

$$j_\mu^{em} = e\bar{\chi}_L \gamma_\mu Q \chi_L + e\bar{\chi}_R \gamma_\mu Q \chi_R$$

On reconnaît dans la première partie du terme de droite de (9.10.11) la contribution à l'interaction provenant des courants faibles “chargés”. La seconde partie de ce terme, jointe à (9.10.12), représente les contributions de courants “neutres” ; toutefois, on ne distingue pas du premier coup d’œil ce qui peut provenir du courant faible “neutre” et du courant électromagnétique. Le modèle de GWS nous apporte l’éclairage nécessaire à ce propos ; il considère que les champs $W^{\mu3}, B^\mu$ sont des combinaisons linéaires (et orthogonales) des champs Z^μ, A^μ :

$$\begin{pmatrix} W^{\mu3} \\ B^\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_W & \sin \theta_W \\ -\sin \theta_W & \cos \theta_W \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z^\mu \\ A^\mu \end{pmatrix}, \quad \text{où :} \quad (9.10.13)$$

θ_W est l’angle de mélange électrofaible, appelé communément l’angle de Weinberg (voir § 7.4).

En substituant les expressions de $W^{\mu3}$ et B^μ en termes de A^μ, Z^μ dans (9.10.11) et (9.10.12), et en regroupant les dépendances en A^μ, Z^μ , on obtient pour les contributions de courant “neutres” :

$$\begin{aligned} &-i[(g \sin \theta_W - g' \cos \theta_W) j_\mu^3 + g' \cos \theta_W j_\mu^{em}] A^\mu \\ &-i[(g \cos \theta_W + g' \sin \theta_W) j_\mu^3 - g' \sin \theta_W j_\mu^{em}] Z^\mu \end{aligned} \quad (9.10.14)$$

On reconnaît maintenant dans (9.10.14) la forme usuelle du couplage e.m. $-iej_\mu^{em} A^\mu$ si l’on pose¹⁷⁸ :

$$g = \frac{e}{\sin \theta_W} \quad ; \quad g' = \frac{e}{\cos \theta_W} \quad (9.10.15)$$

¹⁷⁷ On fait usage de la relation : $\frac{Y_W}{2} = Q + T_3$, en tenant compte du fait que $T_3 = 0$ pour le fermion droitier.

¹⁷⁸ Si l’on se rapporte aux notations du § 7.4, on a : $g_\gamma = e$, $g = g_{W^\pm}$, $g' = g_Z \sin \theta_W$.

et par conséquent¹⁷⁹ :

$$\frac{g'}{g} = \tan \theta_W \quad (9.10.16)$$

$$\frac{1}{g^2} + \frac{1}{g'^2} = \frac{1}{e^2} \quad (9.10.17)$$

Tenant compte de (9.10.16), le terme de couplage faible “neutre” peut s’écrire sous la forme :

$$-i \frac{g}{\cos \theta_W} (j_\mu^3 - \sin^2 \theta_W j_\mu^{em}) Z^\mu = -i \frac{g}{\cos \theta_W} j_\mu^{NC} Z^\mu, \quad \text{où :} \quad (9.10.18)$$

$$j_\mu^{NC} = j_\mu^3 - \sin^2 \theta_W j_\mu^{em}$$

On voit apparaître ainsi des connexions intimes entre le courant faible “neutre” j_μ^{NC} et le courant électromagnétique j_μ^{em} , ainsi qu’entre les constantes de couplage faibles et e.m.. Ces prédictions du modèle GWS ont été testées avec succès, hormis que les quanta des champs faibles (bosons W^\pm et Z) ont été trouvés massifs (voir chapitre 7). Toutefois, on sait, au moins en principe, comment remédier à ce défaut du modèle en s’inspirant de la procédure décrite aux § 9.8 et 9.9. Cette seconde étape fait l’objet du paragraphe suivant.

9.10.2 Symétrie locale brisée $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$; implication du mécanisme de Higgs.

On a quatre champs de jauge dont trois doivent être rendus massifs, soit les bosons W^\pm associés aux courants faibles chargés et le boson Z associé au courant faible neutre. Il faut donc introduire un champ scalaire avec au moins trois degrés de liberté, et s’assurer de plus qu’une symétrie de jauge reste non brisée de telle sorte qu’un champ de jauge sans masse subsiste pour représenter le photon. Dans le modèle GWS, on introduit un champ scalaire complexe se transformant comme un doublet d’ $SU(2)_L$ ¹⁸⁰ :

$$T = \frac{1}{2}, \quad T_3 = \begin{cases} +1/2 \\ -1/2 \end{cases} \quad \phi = \begin{cases} \phi^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 + i\phi_2) \\ \phi^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_3 + i\phi_4) \end{cases}, \quad \text{où :} \quad (9.10.19)$$

ϕ_1, \dots, ϕ_4 sont des scalaires réels, ϕ^+, ϕ^0 ont des charges électriques +1 et 0 respectivement ; leur hypercharge faible vaut donc $Y_W = +1$.

¹⁷⁹ g^2 et g'^2 sont sans dimension ; e^2 est exprimé en unité d’ $\varepsilon_0 \hbar c$; numériquement, on a : $g^2/4\pi \simeq 1/30$; $g'^2/4\pi \simeq 1/100$; $e^2/4\pi \simeq 1/137$; $\sin^2 \theta_W \simeq 0.231$, (pour l’énergie équivalente à $M_Z \simeq 90$ GeV).

¹⁸⁰Notons que ce champ est supposé former un singulet de couleur.

Ce champ est supposé avoir une moyenne non nulle dans le vide, et on fait le choix $\phi_1 = \phi_2 = \phi_4 = 0$; $\phi_3 = \frac{\mu}{\lambda}$ ¹⁸¹ :

$$\langle 0|\phi|0\rangle = \phi_{\text{vide}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\mu}{\lambda} \end{pmatrix} \quad (9.10.20)$$

En suivant la procédure décrite au § 9.9, on développe $\phi(x)$ autour de l'état de vide choisi, et on redéfinit l'isodoublet en termes de son module et de sa phase :

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\mu}{\lambda} + H(x) \end{pmatrix} \exp \left(\frac{i\xi(x) \cdot \tau}{2\frac{\mu}{\lambda}} \right), \quad \text{où :} \quad (9.10.21)$$

$H(x)$ et $[\xi_1(x), \xi_2(x), \xi_3(x)]$ sont des champs réels, de moyennes nulles dans le vide,

(τ_1, τ_2, τ_3) sont les matrices de Pauli.

Par un choix de jauge adéquat (jauge unitaire), le facteur de phase est compensé de façon à éliminer les trois composantes $\xi_1(x)$, $\xi_2(x)$, $\xi_3(x)$ (bosons de Goldstone). Les trois degrés de liberté ainsi libérés se retrouvent dans les composantes de polarisation longitudinale des champs W^\pm et Z . Dans cette jauge, le Lagrangien est de la forme :

$$\begin{aligned} L_{H,W^\pm\mu,Z^\mu,A^\mu} &= \left[\frac{1}{2}(\partial_\mu H)(\partial^\mu H) + \frac{1}{2}(2\mu^2)H^2 \right] \\ &+ \left[-\frac{1}{2}(F_{W^-})_{\mu\nu}(F_{W^+})^{\mu\nu} + \frac{1}{2} \left(g\frac{\mu}{\lambda} \right)^2 (W_-)_\mu(W_+)^{\nu} \right] \\ &+ \left[-\frac{1}{4}Z_{\mu\nu}Z^{\mu\nu} + \frac{1}{2} \left(\frac{\mu}{2\lambda} \right)^2 (g^2 + g'^2)Z_\mu Z^\mu \right] \\ &+ \left[-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F'^{\mu\nu} \right] + \dots, \quad \text{où :} \end{aligned} \quad (9.10.22)$$

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu} &= \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \\ F_{W^\mp})_{\mu\nu} &= \partial_\mu(W_\mp)_\nu - \partial_\nu(W_\mp)_\mu \\ Z_{\mu\nu} &= \partial_\mu Z_\nu - \partial_\nu Z_\mu \end{aligned}$$

On n'a conservé dans (9.10.22) que les termes d'énergies cinétiques et d'énergies de masse concernant le boson de Higgs et les bosons de jauge¹⁸². En ce qui concerne le spectre de masses, les prédictions du modèle sont¹⁸³ :

$$M_{W^\pm} = \frac{1}{2}g\frac{\mu}{\lambda} \quad ; \quad M_Z = \frac{1}{2}(g^2 + g'^2)^{\frac{1}{2}}\frac{\mu}{\lambda} \quad ; \quad \text{d'où :} \quad (9.10.23)$$

¹⁸¹Ce choix est en rapport avec la conservation de la charge électrique.

¹⁸²L'expression complète du Lagrangien peut se trouver dans la littérature spécialisée, voir par ex. ref. 2, 6, 7, ou "Electroweak interactions" P. Renton Ed. Cambridge Univ. Press.

¹⁸³Le facteur $\frac{1}{2}$ dans l'expression de M_{W^\pm} se comprend si on développe en terme des composantes W_i^μ dans 9.10.22.

$$\frac{M_{W^\pm}}{M_Z} = \frac{g}{(g_2+g'^2)^{1/2}} = \cos \theta_W$$

$$M_H = (2\mu^2)^{1/2}$$

En combinant (9.10.23) et (7.3.29) et en utilisant (7.3.5), on obtient :

$$\frac{\mu}{\lambda} = (\sqrt{2} G_F)^{-\frac{1}{2}} = (\sqrt{2} \cdot 1.166 \cdot 10^{-5})^{-\frac{1}{2}}$$

$$\simeq 246 \text{ GeV}$$

Le modèle ne fait par contre aucune prédiction sur les valeurs de μ et de λ prises séparément, et en conséquence sur la masse ($\sqrt{2\mu^2}$) du boson de Higgs.

Observons par ailleurs que le champ électromagnétique n'est présent dans 9.10.22 que par sa composante d'énergie critique ($M_\gamma = 0$).

L'existence du photon sans masse est une conséquence du choix (9.10.20). L'état du vide neutre ainsi défini est tel que ($T_3 = -\frac{1}{2}$, $Y_W = +1$) :

$$Q\phi_{\text{vide}} = \left(T_3 + \frac{Y_W}{2}\right)\phi_{\text{vide}} = 0 \quad (9.10.24)$$

Il est invariant sous la transformation :

$$U(1)_{\text{e.m.}}\phi_{\text{vide}} = \exp(i e Q \alpha(x))\phi_{\text{vide}} = \phi_{\text{vide}} \quad (9.10.25)$$

pour toute valeur de $\alpha(x)$.

$U(1)_{\text{e.m.}}$ est en fait un sous groupe de $SU(2)_L \times U(1)_{Y_W}$. Des quatre générateurs T, Y_W , seule la combinaison Q de (9.10.24) satisfait à (9.10.25), impliquant que le photon reste sans masse. Les trois autres générateurs brisent la symétrie et les bosons associés deviennent massifs.

9.10.3 Couplage entre champ de Higgs et champs de fermion.

Considérons tout d'abord le cas des leptons. Rappelons (§ 9.10.1) que les membres de chacune des trois familles de leptons constituent un doublet d'isospin faible gaucher $\chi_L = \begin{pmatrix} \nu_\ell \\ \ell^- \end{pmatrix}_L$ et un singulet d'isospin faible droitier $\chi_R = \ell^-_R$, où $\ell^- = e^-, \mu^-$ ou τ^- . Le couplage au champ de Higgs apporte une contribution au Lagrangien de :

$$L_{H,\text{lepton}} = -g_\ell [(\bar{\chi}_L \phi_{\text{vide}} \chi_R) + (\bar{\chi}_R \bar{\phi}_{\text{vide}} \chi_L)] \quad (9.10.26)$$

$$= -\frac{g_\ell}{\sqrt{2}} \left[\frac{\mu}{\lambda} (\bar{\chi}_L \chi_R + \bar{\chi}_R \chi_L) + H (\bar{\chi}_L \chi_R + \bar{\chi}_R \chi_L) \right], \quad \text{où :}$$

$$g_\ell = \text{constante de couplage (arbitraire),}$$

$$\phi_{\text{vide}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\mu}{\lambda} + H(x) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \bar{\phi}_{\text{vide}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(0 \quad \frac{\mu}{\lambda} + H(x) \right)$$

Le lepton chargé acquiert une masse de :

$$m_{\ell^-} = \frac{g_\ell}{\sqrt{2}} \frac{\mu}{\lambda} \quad (9.10.27)$$

De plus, il présente un couplage au boson de Higgs dont l'intensité vaut $\frac{g_\ell}{\sqrt{2}} = \frac{m_{\ell^-}}{\frac{\mu}{\lambda}}$. La valeur de $\frac{\mu}{\lambda}$ étant connue, on voit que la constante g_ℓ peut être déterminée à partir des masses mesurées des leptons chargés.

Remarquons que le neutrino ν_ℓ , qui n'a pas de composante d'isospin faible droitère, reste sans masse.

La situation est plus compliquée dans le cas des quarks, car rappelons que les deux membres de chacune des trois familles de quarks sont présents dans l'isodoublet faible gaucher et dans l'isosingulet faible droitier¹⁸⁴. Afin d'engendrer des termes de masse pour le membre supérieur, on est amené à postuler l'existence d'un champ de Higgs conjugué, dont la forme dans le vide est :

$$\tilde{\phi}_{\text{vide}} = i\tau_2 \phi_{\text{vide}}^* = \begin{pmatrix} \frac{\mu}{\lambda} + H(x) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (9.10.28)$$

Cette construction garantit que ϕ_{vide} et $\tilde{\phi}_{\text{vide}}$ se transforment de la même façon sous $SU(2)_L$. De plus on attribue à $\tilde{\phi}$ une hypercharge $Y_W = -1$ de telle sorte que la relation $Q = T_3 + \frac{Y_W}{2}$ est encore satisfaite.

La contribution au Lagrangien due au couplage entre quarks et champ de Higgs devient (on s'est limité ici à la famille des quarks légers) :

$$\begin{aligned} L_{H,\text{quark}} = & - \frac{g_d}{\sqrt{2}} \left[\frac{\mu}{\lambda} (\bar{\chi}_L d'_R + \bar{d}'_R \chi_L) + H (\bar{\chi}_L d'_R + \bar{d}'_R \chi_L) \right] \\ & - \frac{g_u}{\sqrt{2}} \left[\frac{\mu}{\lambda} (\bar{\chi}_L u_R + \bar{u}_R \chi_L) + H (\bar{\chi}_L u_R + \bar{u}_R \chi_L) \right] \\ & + \dots\dots, \quad \text{où :} \end{aligned} \quad (9.10.29)$$

g_d et g_u sont des constantes de couplage,

$$\chi_L = \begin{pmatrix} u \\ d' \end{pmatrix}_L.$$

Les termes de masse et de couplage au boson de Higgs ont des caractéristiques comparables à celles trouvées dans le secteur des leptons.

Remarquons que le formalisme conçu pour les familles de quarks peut être utilisé pour les familles de leptons si l'on admet que les neutrinos ont une masse¹⁸⁵.

¹⁸⁴Expérimentalement les deux membres des familles de quarks sont trouvés massifs.

¹⁸⁵Des expériences récentes indiquent effectivement que c'est le cas ; voir § 1.4 et la table PDG 2002 sous Lepton Particle Listings, Neutrino mixing.

9.11 Le Modèle Standard. Théories de grande unification (GUT).

Le modèle de Glashow, Weinberg, Salam donne une interprétation cohérente et unifiée des interactions électromagnétique et faible (EW), basée sur le groupe de jauge $SU(2)_L \otimes U(1)_{Y_W}$, qui contient implicitement le groupe $U(1)_{e.m.}$.

Le Modèle Standard (**S.M.**) est un mariage du modèle GWS et de la théorie QCD décrivant l'interaction forte. Il est basé sur le groupe de jauge combiné :

$$\text{S.M.} \supset \underbrace{SU(3)_{\text{couleur}}}_{\substack{\text{QCD} \\ \text{couplage } g_s}} \otimes \underbrace{SU(2)_L \otimes U(1)_{Y_W}}_{\substack{\text{EW} \\ \text{couplages } g, g'}} \quad (9.11.1)$$

Le principe d'invariance de jauge est applicable. La brisure de symétrie spontanée (**BSS**) n'affecte que la partie $SU(2)_L \otimes U(1)_{Y_W}$. On admet que cette brisure de symétrie se désactive lorsqu'on se situe à une énergie dépassant un certain seuil. Formellement, la restauration de la symétrie peut être représentée par l'adjonction dans l'expression du potentiel (9.8.13) d'un terme dépendant de la température et de la forme :

$$V(\phi_1, \phi_2, T) = V(\phi_1, \phi_2) + \frac{\lambda^2}{8} T^2 (\phi_1^2 + \phi_2^2) \quad (9.11.2)$$

Quand T augmente, la moyenne $\langle 0 | \phi_{\min} | 0 \rangle$ diminue et s'annule en :

$$T_C = 2 \frac{\mu}{\lambda} \simeq 500 \text{ GeV}$$

Le mariage des théories EW et QCD semble arbitraire a priori. Il s'avère toutefois que la théorie EW n'est renormalisable que si l'on prend en compte à la fois les 3 charges de couleur et les 3×2 saveurs de quarks. On a là une indication en faveur de la recherche d'une unification des théories. Néanmoins le Modèle Standard laisse beaucoup de questions en suspens telles que : pourquoi la nature a-t-elle fait le choix particulier des symétries $SU(3)_C$, $SU(2)_L$ et $U(1)_{Y_W}$? Quelle est l'origine de la violation de CP ? Le champ de Higgs existe-t-il vraiment ? Comment réduire le nombre des paramètres (18) du modèle ? En bref, bien que les tests expérimentaux effectués à ce jour aient fournis des vérifications remarquables des prédictions du Modèle Standard, on a encore de multiples raisons de chercher à approfondir les connaissances de ce sujet. C'est l'objectif poursuivi par les théories de grande unification (**GUT** = Grant Unified Theories).

L'idée de base consiste à postuler l'existence d'un groupe de jauge étendu G , dont les groupes $SU(3)_C$, $SU(2)_L$, $U(1)_{Y_W}$, ... seraient des sous-groupes :

$$G \supset SU(3)_C \otimes SU(2)_L \otimes U(1)_{Y_W} \quad (9.11.3)$$

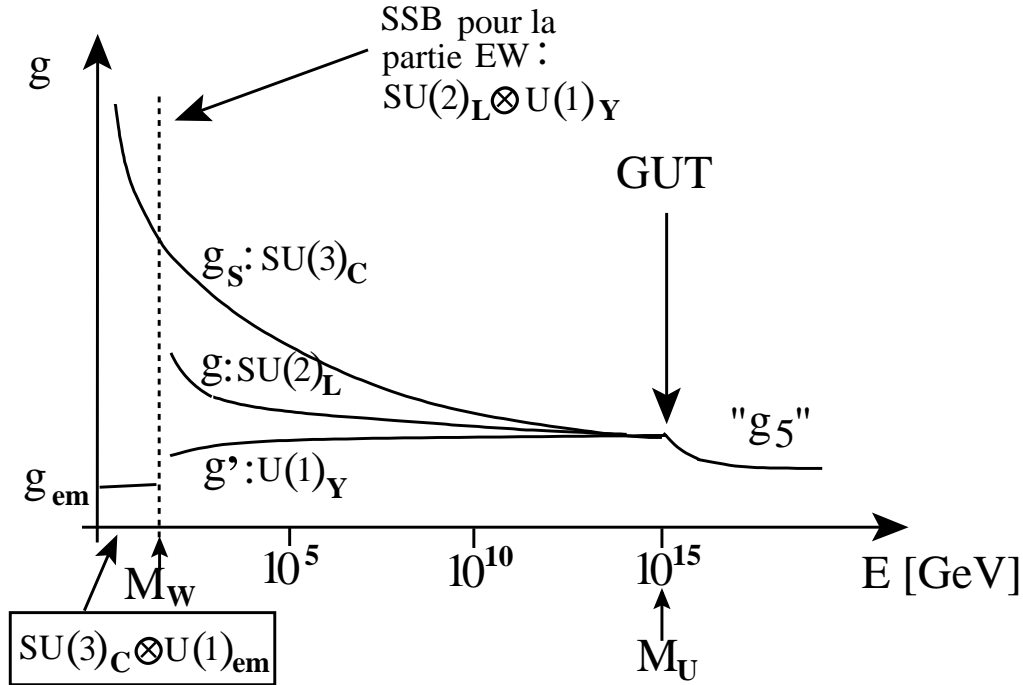


FIG. 9.11.1 – Evolution des constantes de couplage dans le schéma de grande unification. Au-dessus de la température (l'énergie) critique, toutes les constantes coïncident (g_5).

Il serait dès lors possible de prédire les relations entre les paramètres de ces sous-groupes, typiquement entre les constantes de couplage g_s , e , g et g' ¹⁸⁶.

De nombreuses propositions ont été faites en vue d'une formulation concrète de ce schéma de base; le premier modèle proposé et le plus simple¹⁸⁷ est fondé sur le groupe de jauge $SU(5)$, comprenant 25 générateurs dont 4 générateurs commutables¹⁸⁸. Dans ce modèle, on définit une température critique $T_C \simeq M_U$ en-dessous de laquelle la brisure de symétrie se manifeste et en-dessus de laquelle la symétrie $SU(5)$ est restaurée. Dans la figure 9.11.1, cette transition est représentée en terme des constantes de couplage effectives des sous-groupes (g_s , e , g et g') et d'une constante de couplage effective (g_5) du groupe $SU(5)$. Lorsqu'on descend dans l'échelle des énergies, on observe la séquence :

$$SU(5) \xrightarrow{\sim 10^{15} \text{ GeV}} SU(3)_C \otimes SU(2)_L \otimes U(1)_{Y_W} \xrightarrow{\sim 10^2 \text{ GeV}} SU(3)_C \otimes U(1)_{e.m.}$$

Parmi les prédictions du modèle, citons :

¹⁸⁶Notons que dans le modèle GWS, les relations entre e , g et g' font intervenir l'angle de Weinberg θ_W , dont la valeur n'est pas prédite.

¹⁸⁷H. Georgi and S.L. Glashow Phys. Rev. Lett. 32 (1974) 438.

¹⁸⁸Ce sont ceux des sous-groupes, soient I_3 , Y pour $SU(3)_C$ et T_3 , Y_W pour $SU(2)_L$ et $U(1)_{Y_W}$.

- la valeur de $\theta_W(E)$; en $M_U \simeq 10^{15}$ GeV : $\sin^2 \theta_W = 3/8$; en $M_W \simeq 80$ GeV : $\sin^2 \theta_W \simeq 0.205$;
- la quantification des charges (charge électrique, nombres quantiques internes, ...), en rapport avec le caractère non commutatif de $SU(N)$, pour $N > 1$;
- l'existence d'un mode de désintégration du proton en $p \rightarrow e^+ \pi^0$, $\tau_p \simeq 10^{34} a$, en rapport avec la prédiction de nouveaux bosons de jauge X susceptibles d'engendrer des transitions quark \longleftrightarrow lepton (voir figure 9.11.2); cette valeur de τ_p est compatible avec la limite inférieure observée.

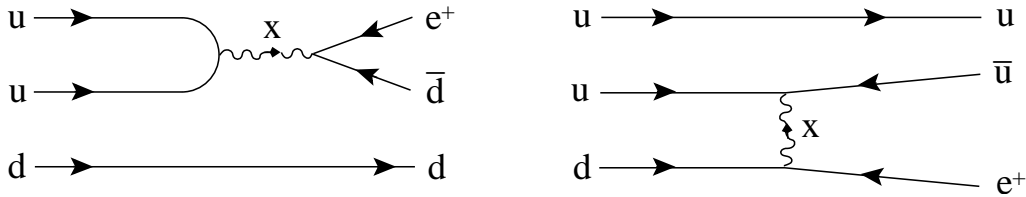


FIG. 9.11.2 – Diagrammes de la désintégration du proton dans $SU(5)$ GUT.

Les modèles GUT actuels les plus élaborés sont encore peu satisfaisants à différents points de vue. Par exemple, la gravitation n'est pas incluse dans ces schémas d'unification. Le problème réside dans le fait que la relativité générale n'incorpore pas d'effets quantiques alors que le Modèle Standard est fondamentalement dépendant de la description quantique.

Un autre problème (appelé communément problème de la hiérarchie) concerne l'énorme écart d'énergies séparant l'échelle d'unification électrofaible ($\simeq 10^2$ GeV) et l'échelle de grande unification ($\simeq 10^{15}$ GeV). Une troisième échelle encore plus éloignée est représentée par la masse de Planck :

$$M_{\text{Planck}} \simeq \sqrt{\hbar c / G_{\text{Newton}}} \simeq 1.2 \cdot 10^{19} \text{ GeV}$$

où la constante de gravitation G_{Newton} approche de l'unité.

Citons parmi les tentatives d'unification de l'ensemble des interactions connues dans la nature les théories de supercordes et entre autre un sous-produit de celles-ci : les théories de la supersymétrie (SUSY).

Dans les théories SUZY, on introduit une transformation de supersymétrie permettant de relier une champ de fermion ψ à un champ de boson ϕ (et vice et versa) :

$$Q_\alpha |\psi\rangle = |\phi\rangle, \quad \text{où :}$$

$\alpha=1, \dots, 4$ est un index de spineur.

L'opérateur Q_α obéit à des relations de commutation et d'anticommutation :

$$\begin{aligned} [Q_\alpha, p^\mu] &= 0 \\ [Q_\alpha, M^{\mu\nu}] &= \frac{1}{2}(\sigma^{\mu\nu}Q)_\alpha \\ \{Q_\alpha, \bar{Q}_\beta\} &= -2(\gamma_\mu)_{\alpha\beta}p^\mu, \quad \text{où :} \end{aligned} \tag{9.11.4}$$

$$\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]$$

$$\bar{Q}_\beta = Q_\beta^T \gamma^0 \quad (T \text{ pour transposé}).$$

Ainsi toute particule fondamentale est supposée posséder un superpartenaire ; le tableau 9.11.1 donne un échantillon du vocabulaire utilisé dans les théories SUZY. Particule et superpartenaire se voient attribuer un nouveau nombre quantique (multiplicatif) appelé parité R et défini comme suit :

$$R = (-1)^{2J+3B+L}, \quad \text{où :} \tag{9.11.5}$$

$J(\hbar)$ est le spin,

B la charge baryonique,

L la charge leptonique.

Conventionnellement on choisit $R = +1$ pour la particule ordinaire et -1 pour son superpartenaire.

Usuellement, la parité R est supposée conservée¹⁸⁹. Il s'ensuit par exemple que les particules supersymétriques doivent être générées par paires dans les collisions entre particules ordinaires. De plus, dans cette condition, la particule supersymétrique la plus légère doit être stable puisqu'elle ne peut pas se désintégrer en particules ordinaires¹⁹⁰.

Les théories SUZY apportent un certain nombre de réponses aux problèmes mentionnés ci-dessus. En ce qui concerne le problème de la hiérarchie, des prédictions numériques fiables sont rendues possibles sur le spectre de masse des bosons de Higgs impliqués dans la brisure de symétrie GUT et la brisure de symétrie électrofaible¹⁹¹. D'autre part, l'algèbre représenté dans (9.11.4) fait apparaître une connexion entre les générateurs Q_α de la supersymétrie et les générateurs de

¹⁸⁹Ce n'est pas une condition nécessaire a priori.

¹⁹⁰Les recherches conduites jusqu'ici auprès des collisionneurs e^+e^- , $\bar{p}p$ et ep n'ont pas permis la découverte de particule supersymétrique avec les caractéristiques prévues par la théorie.

¹⁹¹Il s'avère que les termes de corrections radiatives (dans le calcul des masses) dus aux boucles de particules et de leurs partenaires supersymétriques sont de signes opposés et se compensent, d'où l'élimination des divergences dans la procédure de renormalisation. Les masses attendues des bosons de Higgs H_X et H_W devraient être de l'ordre de grandeur des masses des bosons de jauge correspondants (respectivement $\simeq 10^{15}$ GeV et 10^2 GeV).

particule	spin (\hbar)	superparticule	spin (\hbar)
lepton	1/2	slepton	0
quark	1/2	squark	0
photon	1	photino	1/2
gluon	1	gluino	1/2
W^\pm	1	wino	1/2
Z	1	zino	1/2
Higgs	0	Higgsino	1/2
graviton	2	gravitino	3/2

TAB. 9.11.1 – Particules et leurs partenaires supersymétriques.

transformations dans l'espace-temps. La supersymétrie implique donc la structure de l'espace-temps, ce qui laisse entrevoir sa relation avec la relativité générale et la perspective d'une unification des interactions forte, électrofaible et gravifique¹⁹².

¹⁹²Voir par ex. "Introduction to supersymmetry and supergravity" P. West Ed. World Scientific (1990).

Table des matières

1	Introduction	3
1.1	Motivations et historique	3
1.2	Sources radioactives ¹⁹³	10
1.3	Les particules cosmiques	12
1.4	Particules et Astrophysique (les astroparticules)	18
1.5	Les accélérateurs	22
1.6	Les détecteurs	25
1.7	Interaction des particules avec la matière	30
1.7.1	Photons et électrons	30
1.7.2	Gerbes électromagnétiques	32
1.7.3	Gerbes hadroniques	34
2	Relativité et mécanique quantique	37
2.1	Relativité restreinte	37
2.1.1	Invariants et tenseurs	37
2.1.2	Les transformations de Lorentz	40
2.1.3	Espace et temps en relativité	43
2.1.4	Quadrivecteur énergie-impulsion	44
2.1.5	Covariance en électrodynamique	46
2.2	Les équations de Klein-Gordon et de Dirac ¹⁹⁴	47
2.2.1	Le courant pour les particules de Dirac	51
2.2.2	Les solutions de l'équation de Dirac	51
2.3	Les unités naturelles	57
2.4	Propriétés ¹⁹⁵ des matrices γ	57
2.5	L'équation de Dirac pour $m = 0$	57
3	Les propriétés des particules	59
3.1	Introduction	59
3.2	La masse	59
3.2.1	La mesure de la masse à partir de la profondeur de pénétration dans un milieu	61
3.2.2	La mesure par les contraintes cinématiques	61
3.3	La charge électrique	70
3.4	Le temps de vie des particules	70
3.5	Le spin	72
3.5.1	L'hélicité du neutrino	74
3.6	Le moment magnétique dipolaire	77
3.6.1	Mesure du rapport gyromagnétique du proton γ_p	77

¹⁹³Voir cours d'introduction, notice des TP3 et cours sur les modèles nucléaires.

¹⁹⁴Voir ref. : 6, 8 et 9.

¹⁹⁵Pour des informations plus complètes, voir par ex. Ref. 10 Appendix C.

3.6.2	Détermination des anomalies de l'électron et du muon	78
4	Symétries et lois de conservation	82
4.1	Introduction	82
4.2	Etats, opérateurs et symétries	84
4.3	Invariance par translation dans l'espace, par translation dans le temps et par rotation dans l'espace	85
4.3.1	La translation dans l'espace	85
4.3.2	La translation dans le temps	87
4.3.3	La rotation dans l'espace	87
4.4	La parité	88
4.4.1	Parité des leptons	91
4.4.2	Parité des quarks	92
4.4.3	Parité des hadrons	92
4.4.4	Parité du photon	92
4.4.5	Parité du pion	92
4.4.6	Violation de la parité	94
4.4.7	L'expérience de Wu et al.	96
4.5	La Conjugaison de charge	98
4.5.1	La parité C du photon	101
4.5.2	La parité C du π^0	101
4.5.3	Parité C du η	102
4.5.4	Non conservation de C dans l'interaction faible	103
4.6	Le renversement du temps	103
4.7	Violation de CP et le système des Kaons neutres	107
4.7.1	Le système des Kaons neutres	107
4.7.2	Observation de la violation de CP	111
4.7.3	La régénération du K_S^0	114
4.7.4	L'oscillation d'étrangeté	115
4.8	Le théorème CPT.	117
4.9	L'Isospin.	118
4.10	Conservation de l'isospin.	122
4.11	L'isospin, SU(2) et les quarks.	125
4.12	La parité G.	129
4.13	Le théorème spin et statistique	130
5	L'interaction électromagnétique (e.m.)	134
5.1	Introduction	134
5.2	L'interaction e.m. au premier ordre de perturbation	136
5.3	Le diagramme de Feynman pour l'amplitude de diffusion e.m. $\pi^+K^+ \rightarrow \pi^+K^+$	140
5.4	Section efficace différentielle de $\pi^+K^+ \rightarrow \pi^+K^+$ dans le c.m. de la réaction	142

5.5	Section efficace différentielle sous forme “invariante”	143
5.6	Amplitudes de diffusion e.m. de $\pi^+\pi^+ \rightarrow \pi^+\pi^+$ et de $\pi^+\pi^- \rightarrow \pi^+\pi^-$	144
5.7	Photons réels et “massifs”	146
5.8	La particule massive de spin 1	148
5.9	La particule de masse nulle et de spin 1 (le photon)	148
5.10	La particule de spin 1/2	150
5.11	Le propagateur d’une particule massive	151
5.12	Calcul de quelques sections efficaces $d\sigma/d\Omega$	153
5.13	Le concept du facteur de forme	156
5.14	Facteur de forme et symétrie	157
5.15	Graphes d’ordres supérieurs; le problème des infinis (di- vergence ultraviolette); la procédure de renormalisation .	159
5.16	Graphes d’ordres supérieurs; autres problèmes d’infinis (divergence infrarouge)	162
6	Partons et quarks.	164
6.1	La diffusion électron-nucléon.	164
6.2	Section efficace différentielle angulaire de diffusion élastique électron-proton et électron-neutron.	166
6.3	La diffusion inélastique électron-proton.	171
6.4	La structure du proton.	181
6.5	L’annihilation $e^+e^- \rightarrow \gamma^* \rightarrow \bar{q}q$	185
6.6	Production de jets hadroniques dans l’annihilation e^+e^-	188
7	L’interaction faible.	198
7.1	Introduction.	198
7.2	Premières observations des bosons W^\pm et Z	201
7.3	Les processus à courants chargés.	204
7.3.1	La Théorie de Fermi.	204
7.3.2	Retour à la violation de la parité.	207
7.3.3	L’interaction $V-A$	209
7.3.4	Amplitude avec propagateur de boson W ; compor- tement à basse énergie.	211
7.3.5	Désintégration du pion chargé en modes purement leptoniques.	214
7.3.6	La théorie de Cabibbo ¹⁹⁶	215
7.4	Les processus à courants neutres.	218
7.5	Le mécanisme de GIM; prédiction du quark charmé. . . .	225
7.6	Extension à la troisième famille de fermions. Le modèle standard.	227

¹⁹⁶N. Cabibbo Phys. Rev. Lett. 10 (1963) 531.

8	L'interaction forte ; modèle des quarks et éléments de chromodynamique quantique (QCD).	230
8.1	Introduction.	230
8.2	$SU(2)_{\text{isospin}}$: la symétrie d'isospin.	230
8.3	Représentations 2 et $\bar{2}$.	233
8.4	La brisure de $SU(2)_{\text{isospin}}$.	233
8.5	Représentation de dimension 3 de $SU(2)_{\text{isospin}}$.	237
8.6	$SU(3)$: la symétrie unitaire.	239
8.7	Les représentations d' $SU(3)$.	243
8.8	Le modèle statique des quarks.	251
8.9	Les systèmes liés $\bar{q}q$ (mésons).	251
8.10	Les systèmes liés qqq et $\bar{q}\bar{q}\bar{q}$ (baryons et antibaryons).	258
8.11	$SU(3)_{\text{saveur}} \otimes SU(2)_{\text{spin}}$.	264
8.12	Applications numériques du modèle statique des quarks.	266
8.12.1	Chromomagnétisme dans les mésons pseudoscalaires ($J^P = 0^-$) et les mésons vecteurs ($J^P = 1^-$).	266
8.12.2	Chromomagnétisme dans les baryons du décuplet ($J^P = \frac{3}{2}^+$) et de l'octet ($J^P = \frac{1}{2}^+$).	268
8.12.3	Moments (électro)magnétiques dipolaires de l'hypéron $\Omega(J^P = \frac{3}{2}^+)$ et des baryons de l'octet ($J^P = \frac{1}{2}^+$).	270
8.13	Extension aux nouvelles saveurs de quark.	273
8.13.1	Extension au charme ; $SU(4)_{\text{saveur}}$.	274
8.13.2	Extension à la "bottomness" : $SU(5)_{\text{saveur}}$.	278
8.13.3	Extension au top.	279
8.14	Les quarkonia.	279
8.15	La charge de couleur : $SU(3)_{\text{couleur}}$.	286
8.16	Dépendance en énergie des constantes de couplage.	292
8.17	Exemples de construction d'amplitudes de transition en QCD.	296
8.17.1	Diffusion (forte) d'un quark sur un autre quark de saveur différente.	296
8.17.2	Diffusion (forte) d'un quark sur un antiquark de saveur différente.	299
8.17.3	Annihilation (forte) d'un antiquark et d'un quark de même saveur.	300
9	Les théories de jauge ; la théorie électrofaible (EW).	303
9.1	Introduction : concept d'invariance de jauge.	303
9.2	Invariance de jauge en théorie QED.	304
9.3	L'invariance de jauge comme "programme" de construction de la théorie de l' e.m..	306
9.4	Transformation de jauge <u>globale</u> .	307

9.5	Transformation de jauge <u>locale</u>	309
9.6	Généralisation des transformations de jauge globales. . . .	311
9.7	Généralisation des transformations de jauge locales ; théories de Yang et Mills.	311
9.8	Effet d'écran par champ scalaire ; bosons de Higgs et bosons de Goldstone.	313
9.9	Brisure de la symétrie de jauge locale ; mécanisme de Higgs.	318
9.10	La théorie électrofaible (EW).	321
9.10.1	L'isospin et l'hypercharge faibles, la symétrie $SU(2)_L \times U(1)_Y$	321
9.10.2	Symétrie locale brisée $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$; implication du mécanisme de Higgs.	325
9.10.3	Couplage entre champ de Higgs et champs de fermion.	327
9.11	Le Modèle Standard. Théories de grande unification (GUT).	329