

# Master Physique et Matériaux M1 Physique

## Option PHYS.206

### Physique subatomique

Groupe M

Bertrand Berche

Laboratoire de Physique des Matériaux

Université Henri Poincaré, Nancy 1

# Physique subatomique

## Sommaire

<b>Introduction</b> . . . . .	1
1 : Interactions, particules, ordres de grandeur . . . . .	3
<b>Covariance relativiste</b> . . . . .	13
2 : Notions de relativité . . . . .	15
3 : Théories quantiques relativistes . . . . .	25
<b>Symétries, lois de conservation</b> . . . . .	37
4 : Symétries de l'espace-temps . . . . .	39
5 : Invariance de jauge . . . . .	59
6 : Symétries internes . . . . .	67
<b>Perturbations</b> . . . . .	79
7 : Transitions quantiques sous l'influence d'une perturbation externe . . . . .	81
8 : Perturbations oscillante et adiabatique . . . . .	85
9 : Règle d'or de Fermi . . . . .	89
<b>Diffusion</b> . . . . .	91
10 : Sections efficaces et règle d'or . . . . .	93
11 : Equation intégrale de la diffusion . . . . .	97
12 : Approximation de Born . . . . .	101
13 : Règle d'or de Fermi et approximation de Born . . . . .	107
14 : Méthode des ondes partielles . . . . .	109

<b>Supersymétrie</b> . . . . .	117
15 : Applications de la supersymétrie en mécanique quantique . . . . .	119
16 : Supersymétrie et invariance de forme . . . . .	137

**1****Interactions, particules, ordres de grandeur**

*Les attractions de la gravité, du magnétisme et de l'électricité, s'étendent jusqu'à des distances fort sensibles ; c'est pour cela qu'elles ont été observées par des yeux vulgaires : il peut y avoir d'autres attractions qui s'étendent à de si petites distances qu'elles ont échappé jusqu'ici à nos observations.*

Isaac Newton, *Traité d'optique*, 1675

Dans la nature, quatre interactions fondamentales suffisent pour décrire à l'heure actuelle l'ensemble des phénomènes physiques observables (parmi ceux qui sont compris, bien entendu ! Il reste heureusement encore de nombreux mystères en physique.). Elles opèrent à des échelles très diverses et font intervenir des quantités fondamentales, les charges, qui ne sont pas clairement définies, mais dont on admet la pertinence en raison de leurs vertus explicatives. On donnera une description qualitative de ces interactions dans ce qui suit.

**Interactions fondamentales et composants élémentaires**

▷ *Schéma simplifié de la physique du XIX<sup>ème</sup> siècle.* La MÉCANIQUE (Newton, 1687) est une théorie de la *dynamique* qui régit l'évolution temporelle des degrés de liberté décrivant un système. On peut en formuler l'objet de manière assez générale sous la forme :

*Étant donnés des conditions initiales et des champs de forces, trouver les trajectoires des points matériels.*

Avec cette définition restrictive de la mécanique, la donnée des champs de forces provient d'une autre théorie, en dehors du contexte strict de la mécanique (exemples :

# 4

Mis à jour le 23 Mai 2006

gravitation ou force de Coulomb). L'équation d'évolution temporelle est le principe fondamental de la dynamique

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F}.$$

L'ÉLECTROMAGNÉTISME (Maxwell, 1864) est une théorie des *champs* (et de leur évolution dans l'espace et le temps) créés par des sources appelées charges électriques. Son objet peut s'exprimer sous la forme

*Étant donnée une distribution de charges,  $q_i$ , (et leurs positions,  $\mathbf{r}_i$ , et vitesses,  $\mathbf{v}_i$ ), trouver les champs électrique  $\mathbf{E}$  et magnétique  $\mathbf{B}$  qu'elles produisent.*

Les équations fondamentales sont celles de Maxwell :

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0}, & \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \\ \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0, & \operatorname{rot} \mathbf{B} &= \mu_0 \left( \mathbf{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right). \end{aligned}$$

Ces équations entraînent une équation de propagation des champs à la vitesse  $c = \sqrt{1/\epsilon_0\mu_0}$ , l'électromagnétisme est donc aussi une théorie des ondes électromagnétiques. Pour connaître l'effet des champs sur des systèmes de particules chargées et suivre l'évolution temporelle de ces particules par la mécanique, il est nécessaire d'introduire un COUPLAGE entre les deux théories. Dans le cas de l'électromagnétisme, le couplage est fourni par l'équation de Lorentz (1920)

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \wedge \mathbf{B}).$$

On peut donc proposer un schéma assez général d'une théorie physique, valable dans un contexte donné (déterminé par les échelles de longueur par exemple) qui dépend de la nature du problème étudié :

*Une THÉORIE DES CHAMPS définit des sources et les champs qu'elles créent. Une théorie DYNAMIQUE régit l'évolution temporelle des degrés de liberté des particules soumises à des champs de forces. Un cadre complet est assuré dès lors que l'on sait coupler les deux théories par une INTERACTION, les forces étant définies à partir des champs créés par les sources.*

**Tableau 1.1** Une esquisse d'une théorie classique de la dynamique de systèmes de particules chargées en interaction.

Maxwell	Lorentz	Newton
Électromagnétisme	Couplage	Mécanique
$q_i, \mathbf{j}_i$	$\mathbf{F}_i = q_i(\mathbf{E} + \mathbf{v}_i \wedge \mathbf{B})$	$\frac{d\mathbf{p}_i}{dt} = \mathbf{F}_i$
↓		↓
$\mathbf{E}, \mathbf{B}$	↔	$\mathbf{r}_i(t), \mathbf{v}_i(t)$

On pourrait bien entendu proposer un schéma analogue en choisissant la gravitation comme théorie des champs dont les sources sont les distributions de masses qui créent les champs de forces de gravitation.

▷ *Évolution des théories des champs, interactions fondamentales.* En dépit de l'extrême complexité des phénomènes physiques observables, quatre *interactions fondamentales* et les théories des champs qui leur sont associées permettent d'expliquer la grande majorité des phénomènes physiques sur des échelles de longueur aussi variées que  $10^{-16} - 10^{-15}$  m (taille caractéristique du noyau) à  $10^{26} - 10^{27}$  m (taille caractéristique de l'Univers). Dans une description élémentaire, les concepts-clés intervenant dans ces théories sont

- i) La source  $g$ ,
- ii) Le potentiel (champ scalaire) et le champ (champ vectoriel) créés par les sources, soit  $V_g(r)$  et  $\mathbf{E}_g(r)$ ,
- iii) Le couplage avec une théorie dynamique est possible lorsque l'on sait définir l'énergie potentielle d'une source test  $g$  dans un champ donné créé par un système de sources  $\Omega$ ,  $\mathcal{U}_{\Omega \rightarrow g}(r) = gV_{\Omega}(r)$ .
- iv) Une constante caractérisant l'intensité de l'interaction. Sa valeur est ajustée pour rendre compte des résultats expérimentaux et dépend du choix du système d'unités choisi.

Un bon paramètre pour mettre en évidence la manifestation des différentes interactions est celui de l'échelle de longueur caractéristique du phénomène étudié : chaque interaction se manifeste plus particulièrement dans une certaine gamme d'échelles de longueur <sup>(1)</sup>. Par exemple à l'échelle de l'atome ou de la molécule, l'interaction électrique domine très largement l'interaction gravitationnelle qui est alors négligeable. A l'échelle du système solaire en revanche, les objets macroscopiques étant neutres électriquement, l'interaction électrique est négligeable devant la gravitation que des effets cumulatifs rendent prépondérante. Aux échelles de longueur "frontière", les deux interactions doivent être prises en compte pour expliquer certains phénomènes. La hauteur typique d'une montagne sur une planète résulte par exemple de la compétition entre interactions électrique et gravitationnelle sur la planète en question. Plus une planète est légère, plus une montagne peut être élevée car sa hauteur maximale est atteinte lorsque la gravitation parvient à compenser la cohésion du solide essentiellement dictée par des effets électriques.

- Interaction gravitationnelle :

Le mouvement de la chute des corps fut étudié expérimentalement de manière rationnelle par Galilée dans le *De motu gravium*, dès la fin du XVI<sup>ème</sup> siècle, mais la notion de causalité n'apparaît que postérieurement. En 1687, dans les *Principia mathematica*, Newton élabore les fondements de la dynamique et de la gravitation. "Tous" les corps possèdent une caractéristique fondamentale appelée masse gravitationnelle<sup>(2)</sup>. C'est une quantité positive et extensive qui s'exprime en kg. Un corps de masse  $m$  crée en tout point de l'espace un potentiel gravitationnel  $\phi_m(r)$  appelé potentiel newtonien :

$$\phi_m(r) = -G \frac{m}{r}.$$

Il est lié à l'énergie gravitationnelle que possède une particule test de masse  $m'$  située dans le voisinage de  $m$  :

$$V_{m \rightarrow m'}(r) = m' \phi_m(r) = -G \frac{mm'}{r}.$$

<sup>(1)</sup> Cela ne signifie pas nécessairement qu'elle n'existe pas en dehors de ce domaine, mais plutôt qu'elle y est masquée pour diverses raisons.

<sup>(2)</sup> L'égalité entre la masse gravitationnelle et la masse inertielle, résultat qui découle de l'observation expérimentale mais n'admet pas d'interprétation simple, constitue le principe d'équivalence qui fonde la théorie de la relativité générale.

## 6

Mis à jour le 23 Mai 2006

Entre ces deux masses  $m$  et  $m'$  s'exerce une force gravitationnelle qui est toujours attractive. Elle dérive de l'énergie potentielle gravitationnelle. La constante universelle de la gravitation vaut

$$G = 6.67259(85) \times 10^{-11} \text{ m}^3\text{kg}^{-1}\text{s}^{-2}.$$

L'intensité d'une interaction est caractérisée par sa constante de structure, quantité sans dimension (dont la valeur numérique reste donc inchangée quel que soit le système d'unités choisi). Dans le cas de la gravitation la constante de structure vaut

$$\alpha_m = \frac{Gm_p^2}{\hbar c} = 10^{-42},$$

avec la masse du proton  $m_p = 1.6726231(10) \times 10^{-27}$  kg, la constante de Planck  $\hbar = 1.05457266(63) \times 10^{-34}$  J.s et la vitesse de la lumière  $c \equiv 2.99792458 \times 10^8$  m.s<sup>-1</sup>. Etant donnée la valeur très faible de  $\alpha_m$  (on note aussi  $\alpha_G$ ), la gravitation est une interaction de faible intensité, mais qui domine à l'échelle du système solaire et de l'univers (astronomie, cosmologie).

- Interaction électrique :

Il existe dans la nature des corps qui possèdent une propriété appelée charge électrique, notée  $q$ , et exprimée en coulombs (C). Les charges électriques peuvent être positives ou négatives. Elles créent un potentiel électrostatique  $\phi_q(r)$  appelé potentiel coulombien :

$$\phi_q(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}.$$

Celui-ci détermine l'énergie potentielle d'une charge test  $q'$  au voisinage de  $q$  :

$$V_{q \rightarrow q'}(r) = q'\phi_q(r) = \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0 r}.$$

Entre les deux charges électriques  $q$  et  $q'$  s'exerce une force dérivant de l'énergie potentielle, découverte en 1785 par Coulomb, attractive si  $q$  et  $q'$  sont de signes opposés et répulsive dans le cas contraire, d'où la nécessité de deux types de charges électriques.

La constante  $\epsilon_0$  est appelée permittivité du vide

$$\epsilon_0 \equiv 8.854187817 \times 10^{-12} \text{ F.m}^{-1}, \quad \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \equiv 9.10^9 \text{ F}^{-1}\text{m}.$$

L'interaction électrique domine tous les phénomènes physiques de l'échelle de l'atome à celle de l'homme (physique atomique, physique du solide, chimie, biologie. . .). On caractérise son intensité par la constante de structure fine :

$$\alpha_q = \frac{q_e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar c} = \frac{e^2}{\hbar c} \simeq 1/137,$$

où  $q_e = -1.60217733(49) \times 10^{-9}$  C est la charge de l'électron. La contrepartie magnétique de cette interaction a été tout d'abord étudiée par Oersted en 1820.

- Interaction forte :

Pour la description des phénomènes subatomiques (physique nucléaire et physique des particules), Heisenberg et Yukawa ont initié vers 1930 la théorie de l'interaction forte. On postule pour cela l'existence d'une quantité fondamentale appelée charge forte (ou charge hadronique), notée  $g_S$  (l'indice  $S$  est pour *strong*), qui crée un potentiel phénoménologique appelé potentiel de Yukawa :

$$\phi_{g_S}(r) = -\frac{g_S e^{-r/\lambda}}{r} \quad (1.1)$$

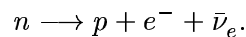
où  $\lambda = \hbar/m_\pi c \simeq 1.3 \times 10^{-15}$  m mesure la portée de l'interaction forte, avec  $m_\pi \simeq 2.48 \times 10^{-28}$  kg la masse des particules appelées mésons  $\pi$ . Un second nucléon de charge forte  $g'_S$ , placé à proximité du premier, possède une énergie potentielle

$$V_{g_S \rightarrow g'_S}(r) = g'_S \phi_{g_S}(r) = -\frac{g_S g'_S e^{-r/\lambda}}{r}.$$

La valeur approximative de  $g_S$  pour les nucléons est de  $g_S \simeq 9.5 \times 10^{-14}$  U.S.I. La constante de structure de l'interaction forte est assez mal connue. Elle est de l'ordre de  $\alpha_{g_S} = \frac{g_S^2}{\hbar c} \simeq 0.116$  d'où la valeur approximative de  $g_S$  pour les nucléons. L'interaction forte est en particulier responsable de la cohésion des noyaux atomiques. Elle agit en fait déjà à l'échelle des quarks à l'intérieur des nucléons.

- Interaction faible :

L'interaction faible est plus subtile. Elle joue sur une portée plus courte encore que l'interaction forte et ne produit pas d'états liés entre particules (elle n'est pas responsable de phénomènes de cohésion car dans son domaine d'action (l'intérieur du noyau), les interactions forte et électromagnétique l'emportent très nettement et les particules ne portant ni charge électrique, ni charge forte (les neutrinos) sont excessivement fugaces et très peu interactives), mais intervient dans la radioactivité  $\beta$ , par exemple dans la désintégration du neutron<sup>(3)</sup> :



Elle a été élaborée vers 1934 par Fermi. On la caractérise par une constante de structure de Fermi :

$$\alpha_{g_W} = \frac{g_W^2}{\hbar c} \simeq 10^{-5}.$$

La valeur de  $g_W$ , la charge faible, est de l'ordre de  $5.5 \cdot 10^{-16}$  U.S.I. (l'indice  $W$  est pour *weak*, mais aussi pour Weinberg !). Cette interaction étant à très courte portée et de très faible intensité, elle est difficile à mettre en évidence et n'intervient qu'à l'échelle des processus entre particules élémentaires.

---

<sup>(3)</sup> C'est Pauli qui a émis l'hypothèse de l'existence d'une particule neutre, le neutrino, de masse très faible, pour interpréter le caractère continu des spectres d'émission  $\beta$ , très différents des spectres discrets observés dans les désintégrations  $\alpha$ . L'existence de spectre continu ne pouvant s'expliquer dans le contexte d'un problème à deux corps avec conservation de l'énergie et de la quantité de mouvement, il fallait supposer qu'un troisième corps permettait une redistribution de l'énergie de manière continue entre les deux particules observables.



Les propriétés essentielles des quatre interactions sont résumées dans le tableau ci-dessous.

**Tableau 1.2** Les quatre interactions fondamentales.

	Interactions			
	gravitationnelle	électrique	forte	faible
Repères	Newton 1687	Coulomb 1785 Oersted 1820 Maxwell 1864	Yukawa 1930 Heisenberg 1932	Fermi 1934
Source	masse	charge électrique	charge forte	charge faible
$g$	$m$	$q$	$g_S$	$g_W$
Potentiel $\phi_g(r)$	$-G \frac{m}{r}$	$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}$	$-\frac{g_S}{r} e^{-r/\lambda}$	
Énergie potentielle	$-G \frac{mm'}{r}$	$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq'}{r}$	$-\frac{g_S g'_S}{r} e^{-r/\lambda}$	
Constante (U.S.I.) <sup>(a)</sup>	$G = 6.67 \cdot 10^{-11}$	$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \cdot 10^9$	$g_S = 9.5 \cdot 10^{-14}$	$g_W = 5.5 \cdot 10^{-16}$
Échelle de longueur (m) <sup>(b)</sup>	$> 10^0$	$10^{-10} - 10^0$	$10^{-15} - 10^{-14}$	$< 10^{-15}$ ou jamais
Constante de structure	$10^{-42}$	1/137	0.116	$10^{-5}$

<sup>(a)</sup> Ces constantes n'ont pas toutes la même signification. Pour comparer les interactions, il faut utiliser les constantes de structure.

<sup>(b)</sup> Les échelles de longueur indiquées sont celles où prévaut grossièrement l'une des interactions. Cela ne signifie pas par exemple qu'au dessous de la taille de l'atome l'interaction électromagnétique cesse d'agir, mais simplement qu'elle est alors dominée par l'interaction forte.

▷ *Évolution des théories dynamiques.* Les échelles de longueur gouvernent également les théories dynamiques. Historiquement, la mécanique classique est la première théorie dynamique. Elle a connu de très grands succès, appliquée notamment au système solaire et à l'astronomie en général. Aux très grandes échelles de longueur, elle peut être appliquée à l'univers et contient en ce sens la cosmologie (newtonienne) qui a pour but d'établir des modèles d'évolution de l'univers.

Aux très petites échelles de longueur en revanche, elle est incapable de décrire le comportement et la structure des atomes et des molécules par exemple. Au XX<sup>ème</sup> siècle, l'émergence de la MÉCANIQUE QUANTIQUE (Bohr 1913, de Broglie 1923, Schrödinger 1925, Born, Heisenberg, Pauli 1925, ...) a surmonté cette difficulté. La mécanique quantique est une théorie dynamique au sens où elle repose sur une équation d'évolution appelée équation de Schrödinger.

A ces très petites échelles de longueur, les particules exhibent dans certaines circonstances un comportement ondulatoire (la notion classique de trajectoire perd alors son sens car il n'est plus possible de suivre individuellement une particule) qui peut donner lieu à des phénomènes d'interférences comme avec les ondes. Cela a pour effet de modifier radicalement les lois de la physique qui, si elles sont valables à l'échelle macroscopique, doivent être corrigées à l'échelle des systèmes mésoscopiques ou nanométriques. Ces relations nouvelles font le plus souvent apparaître une quantification des grandeurs physiques (quantification des niveaux d'énergie de l'atome, quantification de la résistance d'éléments de circuits à l'échelle de quelques nanomètres, ...). Plus généralement, on parle de PHYSIQUE QUANTIQUE lorsque l'on inclut à ce cadre dynamique les processus d'interaction, par exemple électromagnétique. La mécanique quantique est caractérisée par la constante de Planck,  $\hbar = 1.05457266(63) \times 10^{-34}$  J.s, et redonne la mécanique classique à la limite  $\hbar \rightarrow 0$ . Elle est plus générale que la mécanique classique qu'elle inclut.

De même aux très grandes vitesses, la mécanique classique (ou quantique) est

incapable de rendre compte des phénomènes physiques. Un nouveau cadre conceptuel a été élaboré par Einstein (1905). Il s'agit de la RELATIVITÉ RESTREINTE qui amène une nouvelle conception de l'espace et du temps (formulée notamment par Minkowski) et modifie complètement la dynamique. La relativité repose sur la constante  $c \equiv 2.99792458 \times 10^8 \text{ m.s}^{-1}$  et redonne la physique classique à la limite  $c \rightarrow \infty$ . Elle contient donc la physique classique, mais reste indépendante de la physique quantique.

Une généralisation, construite en 1915 par Einstein, combine les prescriptions de la relativité à celles de la gravitation. Il s'agit de la RELATIVITÉ GÉNÉRALE qui inclut la relativité restreinte et qui est indispensable pour aborder les problèmes liés aux champs de gravitation intenses. Cette théorie est en particulier célèbre par la solution de Schwarzschild conduisant à l'existence de trous noirs aux masses très élevées.

Une théorie décrivant à la fois les phénomènes aux petites échelles de longueur et aux grandes vitesses est fournie par la PHYSIQUE QUANTIQUE RELATIVISTE (Dirac 1928) et constitue sous ses formes les plus élaborées (THÉORIES QUANTIQUES RELATIVISTES DES CHAMPS élaborées notamment par Feynman, Schwinger, Tomonaga et Dyson) le cadre théorique le plus achevé à l'heure actuelle, malgré son incapacité à décrire correctement les phénomènes liés à la gravitation.

Pour une description correcte de l'atome ( $10^{-10} \text{ m}$ ), il est indispensable de disposer de l'électromagnétisme et de la mécanique quantique. Si des effets liés à des vitesses élevées interviennent, il faut dépasser la mécanique quantique et travailler en mécanique quantique relativiste. Pour étudier le système solaire ( $10^{12} \text{ m}$ ), la gravitation et la mécanique classique suffisent, alors que pour travailler sur les trous noirs, gravitation et relativité sont indispensables et la relativité générale s'impose.

Une fois déterminées les théories nécessaires, on identifie les paramètres pertinents, indispensables à la description des phénomènes physiques considérés et des arguments dimensionnels (on parle souvent d'arguments d'échelle) permettent de quantifier quelques ordres de grandeur.

### Ordres de grandeur

▷ *Physique atomique.* De nombreux ordres de grandeur sont accessibles simplement par analyse dimensionnelle une fois identifiés les paramètres fondamentaux du problème. Par exemple en physique atomique on peut estimer l'ordre de grandeur de l'énergie de l'état fondamental de l'atome d'hydrogène à l'aide des inégalités de Heisenberg une fois établi que la combinaison  $\hbar^2/me^2 = a_0$  est la longueur caractéristique (on utilise la notation fréquente en physique atomique selon laquelle  $e^2 = |q_e|^2/4\pi\epsilon_0$ ). On estime ensuite l'énergie cinétique par l'amplitude typique des fluctuations  $\Delta p$  de quantité de mouvement,  $T \simeq \frac{\Delta p^2}{2m}$ , où  $\Delta p$  se mesure en notant que l'électron dans l'atome est confiné à une échelle  $\Delta r \simeq a_0$ . La relation  $\Delta p \Delta r \simeq \hbar$  donne alors  $\Delta p \simeq \hbar/a_0$ , soit  $T \simeq \hbar^2/2ma_0^2$ . Cette énergie vient s'ajouter à l'énergie potentielle, dont on estime la profondeur par  $V \simeq -e^2/a_0$  et finalement

$$E_0 = T + V \simeq -\frac{\hbar^2}{2ma_0^2} = -\frac{e^2}{2a_0} = -\frac{1}{2}\alpha^2 mc^2 = -13.6 \text{ eV}$$

où  $\alpha$  est ici la constante de structure fine  $\alpha_q$  et  $m$  la masse de l'électron.

▷ *Physique nucléaire.* Ce raisonnement très simplifié nous donne l'ordre de grandeur de l'énergie de l'état fondamental de l'atome à un électron, l'atome d'hydrogène. On peut appliquer le même type de raisonnement pour traiter l'état fondamental du deuton. En négligeant la coupure exponentielle du potentiel

# 10

Mis à jour le 23 Mai 2006

d'interaction forte à l'intérieur du noyau, on doit obtenir

$$E_{\text{deuton}} = -\frac{1}{2}\alpha_S^2\mu c^2 = -13.6 \text{ eV} \times \frac{\mu}{m_e} \left(\frac{\alpha_S}{\alpha}\right)^2$$

où  $\alpha_S$  est ici la constante de structure de l'interaction forte cette fois et  $\mu = \frac{1}{2}M_p$  la masse réduite du système proton-neutron. L'application numérique donne  $E_{\text{deuton}} \simeq -3.15 \text{ MeV}$ , mais ce résultat est certainement surestimé car le potentiel est moins attractif qu'un terme purement coulombien à cause de l'exponentielle. Cela fournit en tout cas l'ordre de grandeur, le MeV, des énergies dans le noyau. Dans le cas d'un noyau plus complexe, on doit tenir compte de l'effet de nombre. S'il y a  $A$  nucléons dans le noyau dont  $Z$  protons, l'énergie cinétique totale vaut

$$T_{\text{tot}} \simeq \sum_{i=1}^A \frac{\Delta p_i^2}{2M_P} \simeq A \frac{\hbar^2}{2M_P a^2},$$

où  $a$  est la taille typique dans laquelle un nucléon est confiné. Les nucléons sont des fermions, de sorte que le volume total du noyau  $\sim R^3$  peut être considéré comme divisé en  $A$  cellules de volume moindre,  $\sim a^3$ , i.e.  $R^3 = Aa^3$ . Cela permet de considérer que les nucléons sont dans des états quantiques (spatiaux) distincts et donc de satisfaire au principe de Pauli. On en déduit  $\Delta p \simeq A^{1/3}\hbar/R$ , c'est-à-dire que l'effet du confinement augmente la quantité de mouvement typique et donc l'énergie cinétique de façon considérable,

$$T_{\text{tot}} \simeq A^{5/3} \frac{\hbar^2}{2M_P R^2}.$$

L'énergie potentielle due à l'interaction forte s'écrit

$$V_S \simeq - \sum_{\substack{i,j=1 \\ j>i}}^N \frac{g_S^2}{r_{ij}} \simeq -\frac{1}{2}A(A-1) \frac{g_S^2}{R} \simeq -\frac{1}{2}A^2 \frac{g_S^2}{R}.$$

On a utilisé ici le fait que la distance moyenne  $r_{ij}$  entre nucléons est de l'ordre du rayon  $R$  du noyau (plutôt que la moyenne de l'inverse de la distance entre nucléons est de l'ordre de  $R^{-1}$ ). En effet, quelle que soit la distribution  $n(r_{ij})$  normée des nucléons (et supposée sphérique, soit telle que  $\int_0^R r^2 dr n(r) = 1$ , par exemple  $n(r) = (4\pi R^3/3)^{-1}$ ), on a en moyenne

$$\langle r_{ij}^{-1} \rangle = \int_0^R r^2 dr r^{-1} n(r) = R^{-1} \times O(1).$$

L'énergie totale est donnée par

$$E(R) \simeq \frac{\hbar^2 A^{5/3}}{2M_P R^2} - \frac{A^2 g_S^2}{2R},$$

elle est minimale pour

$$R_0 = 2a_N A^{-1/3}$$

où la distance typique de l'interaction forte est donnée par  $a_N = \hbar^2/M_P g_S^2 \simeq 1.81 \text{ fm}$  <sup>(4)</sup>. L'énergie de l'état fondamental du noyau à cette valeur de  $R$  vaut

$$E(R_0) = -\frac{1}{8} \frac{M_P g_S^4}{\hbar^2} A^{7/3} = -\frac{1}{8} A^{7/3} \alpha_S^2 M_P c^2.$$

Cette énergie considérable est surestimée dans la mesure où l'on n'a pas pris en compte la coupure dans le potentiel de Yukawa, par ailleurs il conviendrait d'ajouter une correction électrostatique positive due à la répulsion protons-protons, de l'ordre de  $+\frac{Z^2 e^2}{2R_0}$ , c'est-à-dire une correction dans le rapport des constantes de structures de deux interactions. Notons également que la croissance très rapide en  $A^{7/3}$  de l'énergie totale est une conséquence du principe de Pauli qui exagère encore le confinement des nucléons.

---

<sup>(4)</sup> Cette valeur très faible explique qu'on ne puisse pas trouver d'électrons dans le noyau. Dans le cas contraire, leur énergie cinétique, de l'ordre de  $\hbar^2/2ma_N^2$ , serait incroyablement élevée et ne pourrait être compensée par aucune interaction connue pour en faire un état lié.

## Covariance relativiste

**2****Notions de relativité****Quadrivecteurs**

La théorie de la relativité repose sur l'expression d'un invariant quadridimensionnel,

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2,$$

analogue à l'expression du théorème de Pythagore qui donne la distance (ici infinitésimale) entre deux points de l'espace euclidien. Les signes  $-$  qui apparaissent traduisent la nature un peu différente de l'espace-temps de la relativité (on parle de métrique de Minkowski). Pour permettre une généralisation de cet invariant à des espaces quelconques (ou simplement en restant dans l'espace de Minkowski, mais en travaillant avec les coordonnées locales et non plus cartésiennes), on introduit la notion de tenseur ou plus simplement d'abord de quadrivecteur contravariant (ou tenseur de rang 1 contravariant). En coordonnées cartésiennes, les composantes contravariantes du quadrivecteur sont simplement les composantes ordinaires, par exemple  $dx^\mu = (c dt, dx, dy, dz)$  et le jeu de 4 composantes <sup>(5)</sup>  $x^\mu$ ,  $\mu = 0, 1, 2, 3$  forme un quadrivecteur si ces 4 composantes obéissent par changement de référentiel inertiel <sup>(6)</sup> à la transformation de Lorentz :

$$x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu,$$

---

<sup>(5)</sup> Un indice grec,  $\mu$  par exemple, court sur quatre valeurs, de 0 à 3. La composante 0 est aussi appelée composante temporelle et les trois autres composantes sont les composantes spatiales (on utilise parfois un indice latin,  $i$  par exemple, qui court alors de 1 à 3, ou bien la notation vectorielle).

<sup>(6)</sup> Par défaut, le changement de référentiel inertiel est toujours tel que le référentiel  $\mathcal{R}'$  se déplace à la vitesse  $\mathbf{u} = \beta c$  parallèlement à l'axe 1 (axe  $Ox$ , commun à  $Ox'$ ) par rapport au référentiel  $\mathcal{R}$ .

où la matrice de transformation de Lorentz est définie par

$$[\Lambda^\mu{}_\nu] = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Il est très important de noter quelques règles de lecture de la transformation ci-dessus : Lorsqu'un même indice apparaît comme c'est la cas ici en position haute et basse (on parle de positions contravariante et covariante), cela signifie qu'une somme sur les quatre valeurs permises pour cet indice est sous-entendue. C'est la convention de sommation des indices muets d'Einstein qui allège considérablement l'écriture. On dit que l'indice est contracté, il a donc explicitement disparu de l'expression considérée après sommation. Pour le reste, on doit voir apparaître des deux côtés de l'égalité les mêmes indices non contractés dans les mêmes positions, contravariantes ou covariantes. L'introduction de la matrice de transformation  $\Lambda^\mu{}_\nu$  est une commodité d'écriture. Si l'on note de manière très générale qu'un quadrivecteur  $x^\nu$  exprimé dans  $\mathcal{R}$ , il correspond un quadrivecteur  $x'^\mu$  exprimé dans  $\mathcal{R}'$ , et que celui-ci est une fonction de  $x^\nu$ , alors, si la transformation de l'un à l'autre est linéaire, le développement de Taylor de  $x'^\mu(x^\nu)$  ne laisse subsister que le terme du premier ordre,

$$x'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} x^\nu.$$

Pour que l'indice  $\nu$  soit en bonne position (covariante), on écrit aussi

$$\frac{\partial}{\partial x^\nu} = \partial_\nu,$$

ce qui définit la dérivée covariante,  $\partial_\nu = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \vec{\nabla}\right)$ . La justification d'un indice "en bas" est la suivante : une grandeur scalaire  $Q$  fonction des coordonnées d'espace-temps varie d'une quantité  $\delta Q = \frac{\partial Q}{\partial x^\mu} \delta x^\mu$  si les coordonnées varient. Pour assurer que  $\delta Q$  soit un scalaire, il faut contracter l'indice  $\mu$  et donc le terme  $\frac{\partial Q}{\partial x^\mu}$  doit avoir un indice covariant, c'est-à-dire s'écrire comme  $\partial_\mu Q$ .

L'origine de la transformation de Lorentz est à chercher dans la nécessité de trouver une loi de transformation des composantes spatio-temporelles qui généralise celle de Galilée,

$$\begin{aligned} ct' &= ct \\ x' &= -\beta ct + x \\ y' &= y \\ z' &= z \end{aligned}$$

devenue inacceptable car elle ne préserve pas la forme des équations de Maxwell et n'assure donc pas l'invariance des phénomènes liés à l'électromagnétisme par changement de référentiel inertiel. La généralisation cherchée doit être linéaire afin d'assurer que si le principe d'inertie est satisfait dans un référentiel donné, il le soit

automatiquement dans tout autre référentiel en translation uniforme par rapport au premier. De plus les composantes transverses doivent être inchangées dans la transformation <sup>(7)</sup>, on écrit donc en toute généralité

$$\begin{aligned} ct' &= Dct - Ex \\ x' &= -A\beta ct + Bx \end{aligned}$$

ce qui conduit à la transformation des vitesses sous la forme  $v'/c = \frac{Bv - A\beta c}{Dc - Ev}$ . Appliquée à l'origine de  $\mathcal{R}'$  ( $v' = 0$  et  $v = u$ ), à l'origine de  $\mathcal{R}$  ( $v' = -u$  et  $v = 0$ ) et à la lumière ( $v' = v = c$ ), on obtient trois contraintes soit,

$$\begin{aligned} ct' &= A(u)(ct - \beta x) \\ x' &= A(u)(-\beta ct + x) \end{aligned}$$

La quatrième contrainte est assurée par la condition  $A(-u) = A(u)$  (le signe de la vitesse est pris en compte dans  $\beta$ ), ce qui fait qu'en combinant cette transformation à la transformation inverse on obtient

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} &= A(u) \begin{pmatrix} 1 & -\beta \\ -\beta & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} \\ &= A(u)A(-u) \begin{pmatrix} 1 & -\beta \\ -\beta & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ \beta & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

qui impose  $A(u) = \gamma \equiv (1 - \beta^2)^{-1/2}$ .

Ayant maintenant défini un quadrivecteur contravariant comme la donnée de 4 composantes qui se transforment par changement de référentiel inertiel conformément à la transformation linéaire de Lorentz, on peut construire une norme à ce quadrivecteur, qui s'avère invariante par changement de référentiel inertiel, ce qui lui confère un rôle privilégié dans la théorie de la relativité. Reprenons le cas de l'intervalle. On a défini  $dx^\mu = (c dt, \mathbf{dr})$  et  $ds^2 = (c dt)^2 - |\mathbf{dr}|^2$ . Introduisant les composantes covariantes associées à  $dx^\mu$ , soit

$$dx_\mu = (c dt, -\mathbf{dr}),$$

on peut écrire

$$ds^2 = dx_\mu dx^\mu = (c dt)^2 - |\mathbf{dr}|^2.$$

On introduit encore le tenseur métrique qui fait passer des composantes contravariantes aux composantes covariantes,

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu} dx^\mu &= dx_\nu, \\ ds^2 &= g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \\ [g_{\mu\nu}] &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

<sup>(7)</sup> On note  $\mathbf{r}_\perp$  les coordonnées transverses à  $\mathbf{u}$ . La seule transformation acceptable est de la forme  $\mathbf{r}'_\perp = K(u)\mathbf{r}_\perp$  avec  $K(0) = 1$  et  $K(-u) = K(u)$  (ce sont des coordonnées transverses). On a donc  $\mathbf{r}'_\perp = K(u)\mathbf{r}_\perp = K(-u)K(u)\mathbf{r}'_\perp$ , soit  $K(-u)K(u) = K^2(u) = 1$ , ou en définitive  $K(u) = 1$ .



en coordonnées cartésiennes. On joue avec  $g_{\mu\nu}$  ou  $g^{\mu\nu}$  pour élever ou abaisser des indices, par exemple pour transformer les composantes covariantes

$$x'_\mu = \Lambda_\mu^\nu x_\nu = \frac{\partial x'_\mu}{\partial x_\nu} x_\nu$$

avec  $\Lambda_\mu^\nu = g_{\mu\sigma} g^{\tau\nu} \Lambda^\sigma_\tau$ , ce qui revient à préserver la composante si l'on élève ou l'on abaisse une composante temporelle et à changer le signe s'il s'agit d'une composante spatiale. Il est clair que toute contraction (norme) d'un quadrivecteur,  $A_\mu A^\mu$  définit un scalaire invariant par transformation de Lorentz.

### Tenseurs

On généralise les notions précédentes à des objets ayant davantage de composantes. Ainsi par exemple, le jeu de 16 composantes  $A^{\mu\nu}$  obéissant par changement de référentiel inertiel à la transformation

$$A'^{\mu\nu} = \Lambda^\mu_\sigma \Lambda^\nu_\tau A^{\sigma\tau}$$

définit un tenseur de rang 2 deux fois contravariant. De manière équivalente, le tenseur deux fois covariant associé se transforme comme

$$A'_{\mu\nu} = \Lambda_\mu^\sigma \Lambda_\nu^\tau A_{\sigma\tau}$$

et un tenseur mixte, comme

$$A'^\mu_\nu = \Lambda_\mu^\sigma \Lambda^\nu_\tau A^\sigma_\tau.$$

Il est bon de noter que tout objet muni d'indices ne forme pas nécessairement un tenseur. Par exemple  $\Lambda^\mu_\nu$  caractérise un changement de référentiel, mais pas une quantité physique dans un référentiel donné. De même, la loi de transformation étant linéaire si un objet n'a que des composantes nulles dans un référentiel inertiel, il doit en être de même dans tous s'il s'agit d'un tenseur.

### Définition des grandeurs physiques et expression covariante des lois physiques

Pour définir une quantité physique dans le formalisme tensoriel, il est naturel de partir d'une expression classique, par exemple vectorielle, puis d'en chercher la généralisation évidente sous forme de quadrivecteur. On peut ensuite écrire explicitement les composantes du quadrivecteur pour leur donner un sens. On obtient du même coup la loi de transformation des composantes et des invariants (par contraction) qui peuvent s'avérer très utiles. Prenons le cas de la vitesse,

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \quad \longrightarrow \quad v^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}.$$

Le temps n'étant plus un invariant, on a choisi de paramétrer la trajectoire (on parle de ligne d'univers) par le temps propre, tel qu'il s'écoule dans le référentiel propre de l'objet d'étude, défini par

$$ds^2 = dx_\mu dx^\mu = c^2 d\tau^2, \quad d\tau = dt \sqrt{1 - |\mathbf{v}|^2/c^2}$$

La quadrivitesse  $v^\mu$  est bien un tenseur de rang 1 car  $x^\mu$  en est un et  $\tau$  est un invariant. Ses composantes,  $c \frac{dt}{d\tau}$  et  $\frac{dx^\mu}{d\tau}$  ou encore

$$v^\mu = (\gamma c, \gamma \mathbf{v}), \quad \gamma \equiv (1 - |\mathbf{v}|^2/c^2)^{-1/2}$$

se transforment comme  $v'^\mu = \Lambda^\mu_\nu v^\nu$ , ce qui conduit notamment à la loi habituelle de composition des vitesses qui remplace celle de Galilée. L'invariant associé est  $v_\mu v^\mu = \frac{dx_\mu}{d\tau} \frac{dx^\mu}{d\tau} = c^2$ .

On peut maintenant généraliser  $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$  pour définir le quadrivecteur énergie-impulsion,

$$p^\mu = mv^\mu = (\gamma mc, \gamma m\mathbf{v})$$

dont la première composante est homogène à une énergie divisée par  $c$ ,  $p^0 = E/c$  et de sorte que l'on ait d'une part la loi de transformation,  $p'^\mu = \Lambda^\mu_\nu p^\nu$  et d'autre part l'invariant très important <sup>(8)</sup>,

$$p_\mu p^\mu \equiv E^2/c^2 - |\mathbf{p}|^2 = m^2 c^2.$$

Cette quantité est utile en particulier dans l'étude des collisions, où la quadri-impulsion totale se conserve. Traitons l'exemple de l'effet Compton. Un photon incident <sup>(9)</sup>,  $p^\mu = (|\mathbf{p}|, \mathbf{p})$ , arrive sur un électron au repos dans le référentiel de travail,  $q^\mu = (mc, \vec{0})$ . Après collision, le photon a une impulsion  $P^\mu = (|\mathbf{P}|, \mathbf{P})$  et l'électron  $Q^\mu = (\gamma mc, \gamma m\mathbf{v})$ . L'équation de conservation  $p^\mu + q^\mu = P^\mu + Q^\mu$  s'écrit aussi  $Q^\mu = p^\mu + q^\mu - P^\mu$  et l'invariant associé vaut

$$\underbrace{Q_\mu Q^\mu}_{m^2 c^2} = \underbrace{p_\mu p^\mu}_0 + \underbrace{q_\mu q^\mu}_{m^2 c^2} + \underbrace{P_\mu P^\mu}_0 + 2 \underbrace{p_\mu q^\mu}_{mc|\mathbf{p}|} - 2 \underbrace{p_\mu P^\mu}_{|\mathbf{p}| \cdot |\mathbf{P}| - \mathbf{p} \cdot \mathbf{P}} - 2 \underbrace{q_\mu P^\mu}_{mc|\mathbf{P}|}.$$

On en déduit

$$mc(|\mathbf{p}| - |\mathbf{P}|) = |\mathbf{p}| \cdot |\mathbf{P}| - \mathbf{p} \cdot \mathbf{P}$$

$$\frac{1}{|\mathbf{P}|} - \frac{1}{|\mathbf{p}|} = \frac{1}{mc} (1 - \cos(\mathbf{p}, \mathbf{P})).$$

Exprimées à l'aide des tenseurs, les lois physiques prennent une forme dite *manifestement covariante* car leur validité est assurée dans tout référentiel inertiel, moyennant les règles de transformation des tenseurs. Un exemple est fourni par la généralisation de la loi fondamentale de la dynamique que l'on écrit

$$m \frac{dv^\mu}{d\tau} = \Phi^\mu$$

où  $\Phi^\mu$  définit la quadri-force,  $\Phi^\mu = \gamma \frac{d}{dt} (E/c, \mathbf{p})$ , soit  $\Phi^0 = \frac{\gamma}{c} \frac{dE}{dt}$  et  $\vec{\Phi} = \gamma \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \gamma \mathbf{F}$ . La loi de transformation s'ensuit également,  $\Phi'^\mu = \Lambda^\mu_\nu \Phi^\nu$ .

<sup>(8)</sup> Attention, ici  $\mathbf{p} = \gamma m\mathbf{v}$  et non pas  $m\mathbf{v}$ .

<sup>(9)</sup> Le photon ayant une masse nulle,  $p_\mu p^\mu = 0$  entraîne  $E = |\mathbf{p}|c$ .

**Formulation covariante de l'électromagnétisme**

▷ *Définition des objets physiques.* Les lois de l'électromagnétisme prennent également une forme plus élégante et compacte à l'aide de la notation tensorielle. Commençons par la loi de conservation de la charge,

$$\operatorname{div} \mathbf{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0.$$

Si elle vaut pour un système donné étudié dans un certain référentiel, on souhaite évidemment qu'elle soit vraie aussi pour tout autre observateur. La forme de cette équation suggère l'introduction du quadrivecteur  $j^\mu = (\rho c, \mathbf{j})$ , qui n'est rien d'autre que la généralisation de  $\mathbf{j} = \rho \mathbf{v}$  de sorte que

$$\partial_\mu j^\mu = \frac{1}{c} \frac{\partial \rho c}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j} = 0.$$

Le fait que cette expression soit une contraction nous assure de sa validité dans tous les référentiels inertiels. C'est une expression *manifestement covariante*. Pour les potentiels on procède de manière analogue. On sait que les équations de Maxwell dans le vide,

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{E} &= \rho / \epsilon_0 \\ \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0 \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \operatorname{rot} \mathbf{B} &= \mu_0 \mathbf{j} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \end{aligned}$$

et la relation entre champs et potentiels,

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= -\vec{\nabla} \phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \\ \mathbf{B} &= \operatorname{rot} \mathbf{A}. \end{aligned}$$

entraînent les équations de propagation des potentiels,

$$\begin{aligned} \vec{\nabla}^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} &= -\frac{1}{\epsilon_0 c^2} \mathbf{j} \\ \vec{\nabla}^2 \phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} &= -\rho / \epsilon_0. \end{aligned}$$

si l'on impose la jauge de Lorenz-Lorentz <sup>(10)</sup>

$$\operatorname{div} \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0.$$

<sup>(10)</sup> Cette relation, très importante puisqu'il s'agit d'une jauge covariante, est due au danois Ludvig Valentin Lorenz, mais elle fut popularisée par un quasi-homonyme, le physicien hollandais incontournable, Hendrik Antoon Lorentz, auquel l'usage en a attribué la paternité.

La forme même de la jauge de Lorenz suggère l'introduction d'un quadripotiel

$$A^\mu = (\phi/c, \mathbf{A})$$

de sorte qu'elle apparaisse comme une contraction invariante,

$$\partial_\mu A^\mu = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\phi}{c} \right) + \operatorname{div} \mathbf{A} = 0.$$

Les équations de propagation s'obtiennent de même de manière covariante au moyen de l'opérateur d'Alembertien,

$$\begin{aligned} \partial_\mu &= \left( \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \vec{\nabla} \right) \\ \partial^\mu &= \left( \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, -\vec{\nabla} \right) \\ \partial_\mu \partial^\mu &= \left( \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}, -\vec{\nabla}^2 \right) \end{aligned}$$

soit

$$\partial_\mu \partial^\mu A^\nu = \mu_0 j^\nu, \quad \mu_0 = 1/\varepsilon_0 c^2.$$

On cherche ensuite à définir un tenseur représentant le champ électromagnétique (qu'on appelle souvent tenseur de Faraday). On sait que  $A^\mu$  est un 4-vecteur. Par ailleurs la relation  $\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A}$  contient des termes de la forme

$$B_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}$$

qui suggèrent de définir un tenseur de rang 2 antisymétrique

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu.$$

On a trivialement des zéros sur la diagonale,  $F^{00} = F^{ii} = 0$  et  $F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu}$  ou encore  $F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu}$ . Les composantes non nulles du tenseur deux fois contravariant <sup>(11)</sup> s'expriment explicitement en fonction des champs  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{B}$ .

---

<sup>(11)</sup> Le tenseur deux fois covariant

$$F_{\mu\nu} = g_{\mu\sigma} g_{\nu\tau} F^{\sigma\tau}$$

s'en déduit en conservant le signe de  $F_{00} = F^{00}$  et des composantes purement spatiales,  $F_{ij} = F^{ij}$  et en changeant le signe des composantes mixtes  $F_{0j} = -F^{0j}$  :

$$[F_{\mu\nu}] = \begin{pmatrix} 0 & E_x/c & E_y/c & E_z/c \\ -E_x/c & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y/c & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z/c & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}.$$

Mis à jour le 23 Mai 2006

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu = \frac{\partial A^\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial A^\mu}{\partial x_\nu}.$$

$$[F^{\mu\nu}] = \begin{pmatrix} 0 & -E_x/c & -E_y/c & -E_z/c \\ E_x/c & 0 & -B_z & B_y \\ E_y/c & B_z & 0 & -B_x \\ E_z/c & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}.$$

On définit également un tenseur champ électromagnétique dual <sup>(12)</sup>.

Utilisant les règles de transformation des tenseurs, on obtient aisément les transformations des champs électromagnétiques par changement de référentiel inertiel.  $F^{\mu\nu}$  étant un tenseur de rang deux, deux fois contravariant, il se transforme par définition selon

$$F'^{\mu\nu} = \Lambda^\mu_\sigma \Lambda^\nu_\tau F^{\sigma\tau},$$

et sous forme condensée on écrit :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}'_{\parallel} &= \mathbf{E}_{\parallel}, \\ \mathbf{B}'_{\parallel} &= \mathbf{B}_{\parallel}, \\ \mathbf{E}'_{\perp} &= \gamma_{\mathbf{u}}(\mathbf{E}_{\perp} + \boldsymbol{\beta}_{\mathbf{u}}c \wedge \mathbf{B}_{\perp}) \\ \mathbf{B}'_{\perp} &= \gamma_{\mathbf{u}}(\mathbf{B}_{\perp} - (\boldsymbol{\beta}_{\mathbf{u}}/c) \wedge \mathbf{E}_{\perp}). \end{aligned}$$

En réalisant des contractions sur tous les indices, on obtient les invariants du champ électromagnétique :

$$-\frac{1}{2}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} = \mathbf{E}^2/c^2 - \mathbf{B}^2, \quad -\frac{1}{4}\bar{F}^{\mu\nu}F_{\mu\nu} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{B}/c.$$

---

<sup>(12)</sup> Celui-ci est formé au moyen du tenseur de Levi-Civita

$$\epsilon^{\mu\nu\sigma\tau} = \begin{cases} +1 & \text{si } \mu, \nu, \sigma, \tau = 0, 1, 2, 3 \text{ et permutations paires} \\ -1 & \text{si permutations impaires} \\ 0 & \text{si deux indices ou plus sont égaux} \end{cases}$$

En particulier on a  $\epsilon_{\mu\nu\sigma\tau} = -\epsilon^{\mu\nu\sigma\tau}$ . On définit le tenseur dual  $\bar{F}^{\mu\nu}$  par la contraction

$$\bar{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\sigma\tau}F_{\sigma\tau}.$$

Ses composantes s'obtiennent à partir de celles de  $F^{\mu\nu}$  en changeant  $\mathbf{E}/c$  en  $\mathbf{B}$  et  $\mathbf{B}$  en  $-\mathbf{E}/c$  :

$$[\bar{F}^{\mu\nu}] = \begin{pmatrix} 0 & -B_x & -B_y & -B_z \\ B_x & 0 & E_z/c & -E_y/c \\ B_y & -E_z/c & 0 & E_x/c \\ B_z & E_y/c & -E_x/c & 0 \end{pmatrix}$$

▷ *Equations de Maxwell covariantes.* Construisons les contractions du tenseur champ électromagnétique, par exemple  $\partial_\mu F^{\mu\nu}$ . Pour  $\nu = 0$ , on a

$$\begin{aligned}\partial_\mu F^{\mu 0} &= \partial_0 F^{00} + \partial_1 F^{10} + \partial_2 F^{20} + \partial_3 F^{30} \\ &= 0 + \frac{\partial}{\partial x}(E_x/c) + \frac{\partial}{\partial y}(E_y/c) + \frac{\partial}{\partial z}(E_z/c) \\ &= \frac{1}{c} \operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon_0 c^2} \rho c \\ &= \mu_0 j^0.\end{aligned}$$

Pour  $\nu = 1$ , on a de même

$$\begin{aligned}\partial_\mu F^{\mu 1} &= \partial_0 F^{01} + \partial_1 F^{11} + \partial_2 F^{21} + \partial_3 F^{31} \\ &= \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}(-E_x/c) + 0 + \frac{\partial}{\partial y} B_z + \frac{\partial}{\partial z}(-B_y) \\ &= -\frac{1}{c^2} \frac{\partial E_x}{\partial t} + (\operatorname{rot} \mathbf{B}) \mathbf{u}_x \\ &= \mu_0 j^1,\end{aligned}$$

et les deux dernières composantes spatiales s'en déduisent par permutation. On a donc

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \mu_0 j^\nu, \quad (2.1)$$

expression qui regroupe les deux équations de Maxwell avec sources,

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \mathbf{E} &= \frac{\rho}{\varepsilon_0} \\ \operatorname{rot} \mathbf{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} &= \mu_0 \mathbf{j}.\end{aligned} \quad (2.2)$$

Le second couple d'équations de Maxwell s'obtient plus aisément après l'introduction du tenseur champ électromagnétique dual. Examinons la contraction  $\partial_\mu \bar{F}^{\mu\nu}$ . Pour  $\nu = 0$ , on a

$$\begin{aligned}\partial_\mu \bar{F}^{\mu 0} &= \partial_0 \bar{F}^{00} + \partial_1 \bar{F}^{10} + \partial_2 \bar{F}^{20} + \partial_3 \bar{F}^{30} \\ &= 0 + \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} \\ &= \operatorname{div} \mathbf{B}.\end{aligned}$$

Pour  $\nu = 1$ , on a de même

$$\begin{aligned}\partial_\mu \bar{F}^{\mu 1} &= \partial_0 \bar{F}^{01} + \partial_1 \bar{F}^{11} + \partial_2 \bar{F}^{21} + \partial_3 \bar{F}^{31} \\ &= \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}(-B_x) + 0 + \frac{\partial}{\partial y}(-E_z/c) + \frac{\partial}{\partial z}(E_y/c) \\ &= -\frac{1}{c} \frac{\partial B_x}{\partial t} - \frac{1}{c} (\operatorname{rot} \mathbf{E}) \mathbf{u}_x.\end{aligned}$$

On en déduit l'expression unifiée du second couple d'équations de Maxwell, les équations sans second membre,

$$\partial_\mu \bar{F}^{\mu\nu} = 0. \quad (2.3)$$

Les équations de Maxwell manifestement covariantes s'écrivent donc :

$$\begin{aligned} \partial_\mu F^{\mu\nu} &= \mu_0 j^\nu, \\ \partial_\mu \bar{F}^{\mu\nu} &= \partial_\mu F^{\nu\lambda} + \partial_\nu F^{\lambda\mu} + \partial_\lambda F^{\mu\nu} = 0. \end{aligned} \quad (2.4)$$

**3****Théories quantiques relativistes****Equation de Schrödinger**

Guidés par la “dualité ondes-particules”, ancienne appellation donnée à une série de concepts dus entre autres à de Broglie <sup>(13)</sup> et résumés dans les relations

$$E = h\nu = \hbar\omega,$$

$$\mathbf{p} = \frac{hc}{\lambda} \hat{\mathbf{u}}_k = \hbar\mathbf{k},$$

nous cherchons une formulation ondulatoire de la mécanique.

Le cas le plus simple est celui de la particule libre, d'énergie  $H = \frac{\mathbf{p}^2}{2m}$ , que l'on peut logiquement représenter par une onde plane  $u_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}, t) = A_{\mathbf{k}} e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)}$  dans la mesure où une telle onde est totalement délocalisée et donc a priori à même de représenter une particule qui a une égale probabilité de se trouver en tout point de l'espace. A quelle équation obéit l'onde plane ? On pourrait bien entendu écrire l'équation des ondes,  $\vec{\nabla}^2 u_{\mathbf{k}} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u_{\mathbf{k}}}{\partial t^2} = 0$  (soit  $\omega = v|\mathbf{k}|$ ), mais on cherche ici une équation du premier ordre en dérivée temporelle pour satisfaire au déterminisme. Utilisant les correspondances rappelées ci-dessus, on écrit plutôt

$$u_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}, t) = A_{\mathbf{k}} e^{i(\frac{\mathbf{p}}{\hbar}\mathbf{r} - \frac{E}{\hbar}t)}$$

d'où on extrait  $E$  en faisant

$$Eu_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}, t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} u_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}, t)$$

<sup>(13)</sup> L. de Broglie, *La longueur d'onde associée à la matière*, CRAS **177**, 507-510 (1923), reproduit dans J. Leite-Lopes et B. Escoubès, *Sources et Evolutions de la Physique Quantique*, Masson, Paris 1995, p.92.



et  $\mathbf{p}$  de même

$$\mathbf{p}u_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}, t) = -i\hbar\vec{\nabla}u_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}, t).$$

L'équation  $E = \mathbf{p}^2/2m$  devient alors

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}u_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\hbar^2}{2m}\vec{\nabla}^2u_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}, t).$$

Pour une particule soumise à un potentiel  $V(\mathbf{r})$ , on généralise pour obtenir l'équation de Schrödinger pour la fonction d'onde  $\psi(\mathbf{r}, t)$ ,

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(\mathbf{r}, t) = \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\vec{\nabla}^2 + V(\mathbf{r})\right)\psi(\mathbf{r}, t). \quad (3.1)$$

Nous ne discuterons pas davantage ici les conséquences de cette équation qui constitue l'approche non relativiste traditionnelle de la mécanique quantique. Retenons simplement que la physique est décrite par une fonction d'onde  $\psi(\mathbf{r}, t)$  dont l'équation de Schrödinger régit la dynamique.

### Equation de Klein-Gordon

▷ *Etablissement de l'équation de Klein-Gordon.* Une généralisation immédiate de l'équation de Schrödinger a été proposée très rapidement (en 1926), indépendamment par Gordon, Fock, Klein, Kudar, de Donder et Van Dungen <sup>(14)</sup>. Il suffit d'effectuer les correspondances

$$\begin{aligned} E &\rightarrow i\hbar\frac{\partial}{\partial t} \\ \mathbf{p} &\rightarrow -i\hbar\vec{\nabla} \end{aligned}$$

dans l'expression relativiste donnant l'énergie cinétique (au terme  $mc^2$  près),

$$E^2 - |\mathbf{p}|^2c^2 = m^2c^4$$

pour obtenir l'équation de Klein-Gordon de la particule libre,

$$\vec{\nabla}^2\psi(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\psi(\mathbf{r}, t) = \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\psi(\mathbf{r}, t). \quad (3.2)$$

On retrouve l'équation des ondes habituelle, mais avec un terme de masse. Là encore, nous ne nous étendrons pas sur les conséquences cette équation (qui décrit les bosons massifs relativistes de spin zéro), mais indiquons seulement qu'il n'est pas possible de définir une densité de probabilité positive conservée au cours du temps, ce qui invalide en grande partie la théorie basée sur l'équation de Klein-Gordon.

▷ *Modèle de Yukawa de l'interaction forte.* Le modèle de Yukawa de l'interaction forte est aisément déduit de l'équation de Klein-Gordon. Rappelons que ce modèle, introduit par Yukawa en 1935, prédisait l'existence des mésons  $\pi$  (ou pions) comme bosons médiateurs de l'interaction forte entre nucléons. Cela repose sur l'idée

<sup>(14)</sup> Voir S. Schweber, *Relativistic quantum field theory*, Harper and Row, New-York 1961.

d'associer à une interaction une particule échangée entre les particules protagonistes pour assurer le transfert d'énergie et de quantité de mouvement lors du processus d'interaction. La particule échangée est qualifiée de virtuelle car dans ce processus elle est émise par une particule et absorbée par l'autre et par conséquent non observable. Si l'on considère que l'énergie échangée est de l'ordre de  $\Delta E \simeq mc^2$  ( $m$  est ici la masse du boson d'échange) et ce pendant une durée de l'ordre de  $\Delta t = \Delta r/c$  où  $\Delta r$  mesure la portée de l'interaction (typiquement  $10^{-15}$  m pour l'interaction forte), en écrivant que  $\Delta E \Delta t \sim \hbar$ , on obtient une estimation de la masse du pion  $mc^2 \simeq \hbar c / \Delta r \simeq 190$  MeV.

Ce résultat se retrouve également de la manière suivante : cherchons une solution statique à symétrie sphérique de l'équation de Klein-Gordon,  $\psi(\mathbf{r}, t) = \phi(r)$ ,

$$\frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2}(r\phi(r)) = \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \phi(r).$$

La solution est de la forme

$$\phi(r) = \frac{K}{r} e^{-mcr/\hbar}$$

Elle correspond à un "potentiel" écranté par une échelle de longueur typique  $\frac{\hbar}{mc}$ , c'est-à-dire que plus la particule échangée (dont le comportement est donc régi par l'équation de Klein-Gordon) est massive, plus la portée de l'interaction est courte. Dans le cas des bosons associés à l'interaction faible, la masse attendue est au moins deux ordres de grandeur de plus si l'on considère une portée de l'ordre de  $10^{-17}$  m. La découverte des bosons impliqués dans cette interaction ( $W^\pm$ ,  $Z^0$ ) a constitué un véritable succès pour la théorie *électrofaible*.

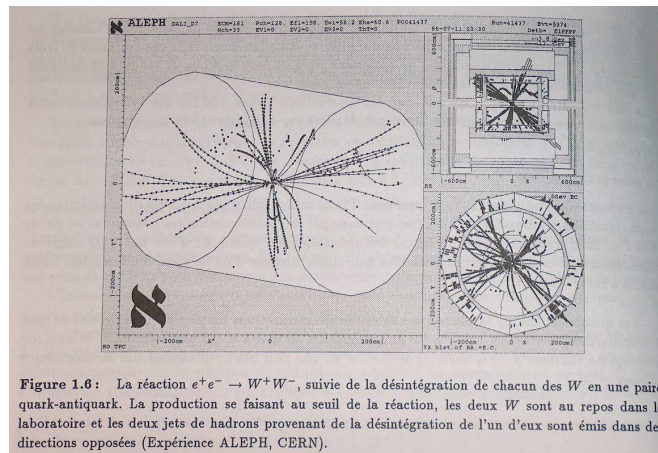


Figure 1.6 : La réaction  $e^+e^- \rightarrow W^+W^-$ , suivie de la désintégration de chacun des  $W$  en une paire quark-antiquark. La production se faisant au seuil de la réaction, les deux  $W$  sont au repos dans le laboratoire et les deux jets de hadrons provenant de la désintégration de l'un d'eux sont émis dans des directions opposées (Expérience ALEPH, CERN).

**Figure 3.1** Exemple d'événement mettant en jeu un  $W$  au CERN.

L'interaction électromagnétique est purement coulombienne, elle est associée à des bosons de masse nulle (les photons, et en effet, l'équation de Klein-Gordon redonne bien l'équation des ondes pour  $m = 0$ ) et il en est de même de la gravitation (et des gravitons).

### Equation de Pauli

L'étude de systèmes sous champ magnétique a mis en évidence de nouvelles particularités de la mécanique quantique. Outre la correspondance classique (qu'on appelle couplage minimal) qui fait passer de  $H$  à  $H + q\phi(\mathbf{r}, t)$  et de  $\mathbf{p}$  à  $\mathbf{p} - q\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$  sous un champ électromagnétique  $(\mathbf{A}(\mathbf{r}, t), \phi(\mathbf{r}, t))$  Pauli a proposé d'introduire un degré de liberté interne supplémentaire, appelé le spin, ayant dans le cas de l'électron des propriétés analogues à celles d'un moment cinétique  $\frac{1}{2}$ . La fonction d'onde  $\psi(\mathbf{r}, t)$  est remplacée par un spineur, objet à deux composantes (spineur de Pauli)

$$\chi = \begin{pmatrix} \psi_{\uparrow}(\mathbf{r}, t) \\ \psi_{\downarrow}(\mathbf{r}, t) \end{pmatrix}$$

pour décrire les degrés de liberté de spin en plus des degrés de liberté d'espace. On obtient alors l'équation de Pauli,

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \chi = \left( \frac{1}{2m} (-i\hbar \vec{\nabla} + q\mathbf{A}(\mathbf{r}, t))^2 + V(\mathbf{r}) + q\phi(\mathbf{r}, t) \right) \chi - \frac{q\hbar}{2m} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \chi,$$

ou sous forme développée,

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \psi_{\uparrow}(\mathbf{r}, t) \\ \psi_{\downarrow}(\mathbf{r}, t) \end{pmatrix} = \left( \frac{1}{2m} (-i\hbar \vec{\nabla} + q\mathbf{A}(\mathbf{r}, t))^2 + V(\mathbf{r}) + q\phi(\mathbf{r}, t) \right) \mathbb{1} \begin{pmatrix} \psi_{\uparrow}(\mathbf{r}, t) \\ \psi_{\downarrow}(\mathbf{r}, t) \end{pmatrix} - \frac{q\hbar}{2m} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \begin{pmatrix} \psi_{\uparrow}(\mathbf{r}, t) \\ \psi_{\downarrow}(\mathbf{r}, t) \end{pmatrix}, \quad (3.3)$$

où  $\boldsymbol{\sigma} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \sigma_x B_x + \sigma_y B_y + \sigma_z B_z$ , avec les matrices de Pauli

$$[\sigma_x] = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad [\sigma_y] = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad [\sigma_z] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

La quantité  $\mathbf{s} = \frac{1}{2}\hbar \boldsymbol{\sigma}$  est appelée spin. Dans le cas de l'électron, on a  $q = -|q_e|$  dans l'équation de Pauli. Les matrices de Pauli forment avec l'identité une base pour la représentation des matrices  $2 \times 2$ , car

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(a+d)\mathbb{1} + \frac{1}{2}(a-d)\sigma_z + \frac{1}{2}(b+c)\sigma_x + \frac{1}{2}i(b-c)\sigma_y.$$

Bien entendu, cette équation n'est pas relativiste, mais elle fait apparaître la nécessité, pour inclure le spin dans la théorie, de chercher une équation relativiste agissant sur des objets à plusieurs composantes.

### Equations de Weyl

▷ *Recherche des équations pour des particules sans masse de spin  $\frac{1}{2}$ .* On cherche maintenant une équation relativiste pour décrire des fermions sans masse de spin  $\frac{1}{2}$ . On doit s'attendre à retrouver l'équation des ondes sous la forme

$$\vec{\nabla}^2 \begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \end{pmatrix} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \end{pmatrix} = 0,$$

c'est-à-dire agissant sur des objets ayant a priori deux composantes, des spineurs.

On notera en général  $\chi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}$  un spineur à deux composantes. Il faut donc une équation matricielle (matrices  $2 \times 2$ ) comportant des dérivées du premier ordre, soit pour être compatible avec  $\partial_\mu = (\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \vec{\nabla})$ ,

$$\mathcal{D}_\pm \chi = \left( \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathbb{1}_{2 \times 2} \pm \boldsymbol{\sigma} \cdot \vec{\nabla} \right) \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}.$$

On a utilisé le fait mentionné plus haut que les matrices de Pauli, avec l'identité, permettent d'exprimer n'importe quelle matrice  $2 \times 2$ . Pour retrouver l'équation des ondes, formons

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_+ \mathcal{D}_- \chi &= \left( \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbb{1}_{2 \times 2} - \underbrace{(\boldsymbol{\sigma} \cdot \vec{\nabla})(\boldsymbol{\sigma} \cdot \vec{\nabla})}_{\vec{\nabla}^2 \mathbb{1}_{2 \times 2}} \right) \chi \\ &= \left( \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2 \right) \mathbb{1}_{2 \times 2} \chi = 0, \end{aligned}$$

ce qui est bien l'équation cherchée. On dispose donc de deux équations également valables,

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_+ \chi^{(+)} &= \left( \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathbb{1}_{2 \times 2} + \boldsymbol{\sigma} \cdot \vec{\nabla} \right) \chi^{(+)} = 0, \\ \mathcal{D}_- \chi^{(-)} &= \left( \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathbb{1}_{2 \times 2} - \boldsymbol{\sigma} \cdot \vec{\nabla} \right) \chi^{(-)} = 0. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Ce sont les équations de Weyl. Elles agissent sur des champs de spineurs  $\chi^{(+)}$  et  $\chi^{(-)}$  distincts que l'on interprétera un peu plus loin.

▷ *Equation covariante.* on peut alors introduire un objet à quatre composantes (spineur de Dirac)

$$\psi = \begin{pmatrix} \chi^{(+)} \\ \chi^{(-)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix}$$

(un spineur à quatre composantes dont deux sont en fait associées aux particules et deux aux antiparticules comme on va le voir) et des matrices  $4 \times 4$  (appelées les matrices de Dirac, ici dans la représentation chirale)

$$\begin{aligned} \gamma^\mu &= (\gamma^0, \boldsymbol{\gamma}), \\ \gamma^0 &= \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1}_{2 \times 2} \\ \mathbb{1}_{2 \times 2} & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\gamma} = \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & -\boldsymbol{\sigma} \\ \boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

de sorte que les équations de Weyl se combinent sous une forme unique,

$$\gamma^\mu \partial_\mu \psi = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathbb{1}_{2 \times 2} \\ \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathbb{1}_{2 \times 2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi^{(+)} \\ \chi^{(-)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\boldsymbol{\sigma} \cdot \vec{\nabla} \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \vec{\nabla} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi^{(+)} \\ \chi^{(-)} \end{pmatrix} = 0.$$

# 30

Mis à jour le 23 Mai 2006

Les matrices de Dirac obéissent à <sup>(15)</sup>

$$\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}.$$

Si l'on fait agir sur la solution libre

$$\psi = \begin{pmatrix} \chi^{(+)} \\ \chi^{(-)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{pmatrix} e^{\frac{i}{\hbar} p_\mu x^\mu}$$

on obtient

$$i\hbar \gamma^\mu \partial_\mu \psi = \begin{pmatrix} 0 & \frac{E}{c} \mathbb{1}_{2 \times 2} - \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} \\ \frac{E}{c} \mathbb{1}_{2 \times 2} + \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} & 0 \end{pmatrix} \psi = 0. \quad (3.5)$$

L'équation est homogène ; pour avoir une solution non nulle il faut donc annuler le déterminant,

$$\begin{aligned} \text{Det} \begin{pmatrix} 0 & \frac{E}{c} \mathbb{1}_{2 \times 2} - \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} \\ \frac{E}{c} \mathbb{1}_{2 \times 2} + \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} & 0 \end{pmatrix} \\ = \left| \frac{E}{c} \mathbb{1}_{2 \times 2} - \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} \right| \times \left| \frac{E}{c} \mathbb{1}_{2 \times 2} + \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} \right| \\ = \begin{vmatrix} \frac{E}{c} - p^3 & -p^1 + ip^2 \\ -p^1 - ip^2 & \frac{E}{c} + p^3 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \frac{E}{c} - p^3 & +p^1 - ip^2 \\ p^1 + ip^2 & \frac{E}{c} + p^3 \end{vmatrix} \\ = [(E/c)^2 - (p^3)^2 - ((p^1)^2 + (p^2)^2)]^2 \\ = \left( \frac{E^2}{c^2} - \mathbf{p}^2 \right)^2 = 0, \end{aligned}$$

soit finalement

$$E = \pm |\mathbf{p}|c.$$

L'équation de Weyl pour la particule libre admet quatre solutions indépendantes, dont deux avec une énergie positive  $E = |\mathbf{p}|c$  (ce sont les deux composantes de spin de la particule non massive que nous souhaitons modéliser) et deux (associées aux deux composantes de spin de l'antiparticule) avec une énergie négative  $E = -|\mathbf{p}|c$ .

Il est instructif de pousser plus avant la forme covariante de l'équation de Weyl,  $i\hbar \gamma^\mu \partial_\mu \psi = 0$ , pour chercher à définir le carré invariant. Sur l'équation de Weyl, manifestement covariante,

$$i\hbar \gamma^\mu \frac{\partial \psi}{\partial x^\mu} = 0,$$

<sup>(15)</sup> Attention, dans cette expression, les  $\gamma^\mu$  sont des matrices  $4 \times 4$ , donc pour chaque valeur des indices  $\mu$  et  $\nu$ , le résultat est une matrice et on doit considérer que le second membre est en fait  $g^{\mu\nu} \mathbb{1}_{4 \times 4}$ .

faisons agir l'opérateur  $i\hbar\gamma^\nu\partial_\nu = i\hbar\gamma^\nu(\partial/\partial x^\nu)$  :

$$\begin{aligned} 0 &= -\hbar^2\gamma^\nu\gamma^\mu\frac{\partial^2}{\partial x^\nu\partial x^\mu}\psi \\ &= -\frac{1}{2}\hbar^2(\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu)\partial_\nu\partial_\mu\psi \\ &= -\hbar^2g^{\mu\nu}\partial_\nu\partial_\mu\psi \\ &= (i\hbar\partial^\mu)(i\hbar\partial_\mu)\psi \\ &= p^\mu p_\mu\psi \end{aligned}$$

où l'on a défini

$$p^\mu = i\hbar\frac{\partial}{\partial x_\mu} = i\hbar\partial^\mu. \quad (3.6)$$

On obtient ainsi une forme très satisfaisante,

$$p^\mu p_\mu\psi = \left(\frac{E^2}{c^2} - \mathbf{p}^2\right)\mathbb{1}_{4\times 4}\psi = 0. \quad (3.7)$$

Il est important de noter que l'équation de Weyl, sous sa forme manifestement covariante,

$$i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu\psi = 0$$

n'est pas un simple scalaire de Lorentz car  $\gamma^\mu$  est un objet à quatre composantes (comme un 4-vecteur), mais ces composantes sont des matrices  $4 \times 4$  et  $\partial_\mu\psi$  est un objet à 4 composantes scalaires, de sorte que la contraction donne au total un objet à 4 composantes scalaires. C'est le prix qu'il a fallu payer pour quantifier la théorie, puisqu'en physique quantique on travaille sur des objets qui en général ne commutent pas.

### Equation de Dirac

▷ *Equation covariante pour des fermions massifs de spin  $\frac{1}{2}$ .* Pour obtenir l'équation relativiste de l'électron <sup>(16)</sup> et plus généralement pour des fermions massifs de spin  $\frac{1}{2}$ , il suffit de généraliser l'équation de Weyl covariante. Partons de la contraction, ce qui est plus immédiat,

$$[p^\mu p_\mu - m^2 c^2 \mathbb{1}_{4\times 4}]\psi = \left(\frac{E^2}{c^2} - \mathbf{p}^2 - m^2 c^2\right)\mathbb{1}_{4\times 4}\psi = 0.$$

<sup>(16)</sup> P.A.M. Dirac, *L'équation d'onde relativiste de l'électron*, Proc. Roy. Soc. **A 117**, 610-624 (1928), traduit dans J. Leite-Lopes et B. Escoubès, op. cit., p.194.

Cela suggère de coupler les équations pour  $\chi^{(+)}$  et  $\chi^{(-)}$  par un terme de masse pour obtenir l'équation covariante de Dirac <sup>(17)</sup>

$$i\hbar\gamma^\mu \frac{\partial\psi}{\partial x^\mu} = \gamma^\mu p_\mu \psi = mc\psi, \quad (3.8)$$

(on omet l'opérateur identité), soit, sous forme développée,

$$i\hbar \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} - \boldsymbol{\sigma} \cdot \vec{\nabla} \\ \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} + \boldsymbol{\sigma} \cdot \vec{\nabla} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi^{(+)} \\ \chi^{(-)} \end{pmatrix} = mc \begin{pmatrix} \chi^{(+)} \\ \chi^{(-)} \end{pmatrix}.$$

Dans le cas d'une particule libre, on a

$$\begin{pmatrix} 0 & E - c\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} \\ E + c\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi^{(+)} \\ \chi^{(-)} \end{pmatrix} = mc \begin{pmatrix} \chi^{(+)} \\ \chi^{(-)} \end{pmatrix}.$$

Il existe d'autres représentations des matrices de Dirac, notamment la représentation de Dirac obtenue par transformation unitaire à partir de la représentation chirale,  $\gamma^\mu \rightarrow U\gamma^\mu U^\dagger$  où  $U = 2^{-1/2} \begin{pmatrix} \mathbb{1} & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & -\mathbb{1} \end{pmatrix}$ ,

$$\begin{aligned} \gamma^\mu &= (\gamma^0, \boldsymbol{\gamma}), \\ \gamma^0 &= \begin{pmatrix} \mathbb{1}_{2 \times 2} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1}_{2 \times 2} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\gamma} = \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \\ -\boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Cette fois on obtient dans le cas de la particule libre l'équation

$$\begin{pmatrix} E - mc^2 & -c\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} \\ c\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} & -E - mc^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = 0$$

avec  $\psi = 2^{-1/2} \begin{pmatrix} \chi^{(+)} + \chi^{(-)} \\ \chi^{(+)} - \chi^{(-)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ , où  $u$  et  $v$  sont des spineurs à deux composantes. L'équation aux valeurs propres conduit à

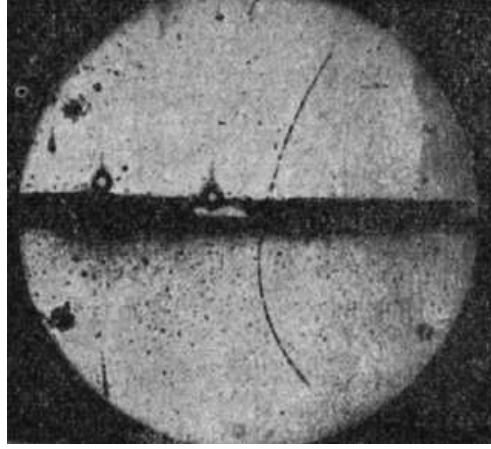
$$\text{Det} \begin{pmatrix} E - mc^2 & -c\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} \\ c\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} & -E - mc^2 \end{pmatrix} = c^2 \mathbf{p}^2 - (E^2 - m^2 c^4) = 0,$$

<sup>(17)</sup> Une notation "slash" a été introduite (par Feynman) pour simplifier légèrement l'écriture. On définit

$$\not{p} \equiv \gamma^\mu a_\mu,$$

ce qui permet d'écrire l'équation de Dirac par exemple comme

$$(i\hbar \not{p} - mc)\psi = (\not{p} - mc)\psi = 0.$$



**Figure 3.2** Cliché d'Anderson sur la découverte du positron.

ou encore pour les particules et les antiparticules,

$$E = \pm \sqrt{|\mathbf{p}|^2 c^2 + m^2 c^4}. \quad (3.9)$$

Le positron a été découvert en 1932 par Anderson.

▷ *Particule dans un potentiel.* Dans le cas d'une particule soumise à un potentiel externe  $V(x^\mu)$ ,  $E$  est remplacé par  $E - V$  (c'est l'énergie cinétique), et on a par exemple dans la représentation de Dirac,

$$\begin{pmatrix} E - V - mc^2 & -c\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} \\ c\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} & -E + V - mc^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = 0.$$

▷ *Equation de Dirac covariante sous champ.* L'équation de Dirac sous champ s'obtient par couplage minimal,

$$p_\mu \rightarrow p_\mu - qA_\mu,$$

soit  $i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu\psi = mc\psi$  qu'on écrit encore  $\gamma^\mu p_\mu\psi = mc\psi$ , que l'on transforme en

$$\gamma^\mu(p_\mu - qA_\mu)\psi = i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu\psi - q\gamma^\mu A_\mu\psi = mc\psi. \quad (3.10)$$

Pour comparer cette forme à l'équation de Klein-Gordon sous champ par exemple, on multiplie par  $\gamma^\nu(p_\nu - qA_\nu)$  :

$$\gamma^\mu\gamma^\nu(p_\mu - qA_\mu)(p_\nu - qA_\nu)\psi = m^2c^2\psi,$$

où l'on introduit les matrices

$$\begin{aligned} \sigma^{\mu\nu} &= \frac{1}{2}i(\gamma^\mu\gamma^\nu - \gamma^\nu\gamma^\mu), \\ \gamma^\mu\gamma^\nu &= g^{\mu\nu} - i\sigma^{\mu\nu}. \end{aligned}$$



L'opérateur de spin  $\sigma^{\mu\nu}$  est antisymétrique. Il faut faire attention au fait que les grandeurs en général ne commutent pas en mécanique quantique. On peut alors ré-écrire le premier membre de l'équation de Dirac au carré,

$$\begin{aligned} (g^{\mu\nu} - i\sigma^{\mu\nu})(p_\mu - qA_\mu)(p_\nu - qA_\nu) &= (p_\mu - qA_\mu)(p^\mu - qA^\mu) \\ &\quad - \frac{1}{2}i(\sigma^{\mu\nu} - \sigma^{\nu\mu})(p_\mu - qA_\mu)(p_\nu - qA_\nu) \\ &= (p_\mu - qA_\mu)(p^\mu - qA^\mu) \\ &\quad - \frac{1}{2}i\sigma^{\mu\nu}[p_\mu - qA_\mu, p_\nu - qA_\nu]. \end{aligned}$$

Le commutateur se développe  $[p_\mu - qA_\mu, p_\nu - qA_\nu] = q[p_\nu, A_\mu] - q[p_\mu, A_\nu] = -i\hbar q(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)$  et on obtient finalement

$$(p_\mu - qA_\mu)(p^\mu - qA^\mu)\psi + \frac{1}{2}q\hbar\sigma^{\mu\nu}F_{\mu\nu}\psi = m^2c^2\psi, \quad (3.11)$$

ce qui fait apparaître très naturellement le tenseur de Faraday, et où le spin est automatiquement inclus dans le couplage avec  $F_{\mu\nu}$ .

Formulation alternative : on trouve fréquemment dans la littérature une formulation alternative (ou plutôt des notations alternatives pour les matrices de Dirac). On définit les 4 matrices hermitiennes

$$\beta = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & \mathbb{1} \end{pmatrix}, \quad \alpha = \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \\ \boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix},$$

c'est-à-dire que l'on a  $\beta = \gamma^0$  et  $\beta\alpha = \boldsymbol{\gamma}$ ,  $\beta^\dagger = \beta$ ,  $\alpha^\dagger = \alpha$ . On a ensuite directement

$$\begin{aligned} i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi &= H\psi = (c\boldsymbol{\alpha}\frac{\hbar}{i}\vec{\nabla} + \beta mc^2)\psi \\ &= (c\boldsymbol{\alpha}\mathbf{p} + \beta mc^2)\psi \end{aligned} \quad (3.12)$$

ou encore, par action sur une onde plane,

$$(E - c\boldsymbol{\alpha}\mathbf{p})\psi = \beta mc^2\psi.$$

### Synthèse

On peut résumer les diverses équations obtenues qui sont compatibles avec la théorie de la relativité <sup>(18)</sup>. Le prototype en est finalement fourni par l'équation de Klein-Gordon,  $(\square + m^2c^2/\hbar^2)\phi = 0$ , équation du second ordre pour un champ scalaire massif, susceptible de décrire des bosons massifs de spin nul. Les autres équations, agissant sur des objets plus complexes, comme des spineurs, doivent redonner l'équation de Klein-Gordon pour chacune des composantes.

<sup>(18)</sup> L.H. Ryder, *Quantum field theory*, Cambridge University Press, Cambridge 1985.

Pour le champ de Maxwell dans le vide, décrivant des bosons non massifs de spin 1 (les photons), on a d'une part les équations de Maxwell

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0,$$

et d'autre part la définition de  $F^{\mu\nu}$  en fonction de  $A^\mu$  qui conduit à l'équation de propagation (en jauge de Lorenz),

$$\square A^\mu = 0$$

compatible avec l'équation de Klein-Gordon pour des particules sans masse. On peut généraliser au cas de bosons massifs de spin 1, avec l'équation de Proca,

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} A^\nu = 0,$$

équivalente à l'équation de propagation,

$$\left( \square + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \right) A^\mu = 0.$$

Dans le cas des fermions de spin  $\frac{1}{2}$ , on a tout d'abord le cas de particules non massives, décrit par l'équation de Weyl,

$$i\hbar\gamma^\mu \partial_\mu \chi = 0$$

$$\square \chi = 0.$$

Finalement, le cas massif est donné par l'équation de Dirac,

$$(i\hbar\gamma^\mu \partial_\mu - mc)\psi = 0$$

$$\left( \square + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \right) \psi = 0.$$

## **Symétries, lois de conservation**

**4****Symétries de l'espace-temps****Un exemple de loi de conservation**

Les lois de conservation sont très importantes en physique. Il existe des lois de conservation très générales, comme la conservation de l'énergie, celle de la quantité de mouvement ou celle du moment cinétique, valides bien entendu aussi bien en physique quantique qu'en physique classique. Nous allons illustrer un exemple de conséquence de la conservation du moment cinétique dans le contexte quantique. Il s'agit de déterminer le diagramme d'émission du proton dans la désintégration  $\Lambda^0 \rightarrow p + \pi^-$ . La particule  $\Lambda^0$  peut se désintégrer par interaction faible selon les deux modes principaux suivants :

$$\begin{array}{l} \Lambda^0 \rightarrow n + \pi^0 \\ \Lambda^0 \rightarrow p + \pi^- \end{array}$$

Le but est ici d'étudier les directions les plus probables prises par le proton issu de la désintégration, c'est-à-dire le diagramme d'émission du proton.

▷ *Position du problème.* La particule  $\Lambda^0$  est initialement immobile et son spin  $+\frac{1}{2}$  est dirigé suivant un axe de référence  $Oz$ . Le spin du pion est nul. Les lois de conservation du moment cinétique total et de sa projection sur  $Oz$  exigent que le produit de désintégration ( $\pi^- - p$ ) soit dans un état de moment cinétique total  $j = \frac{1}{2}$ ,  $m_j = +\frac{1}{2}$ . Or le système ( $\pi^- - p$ ) est caractérisé par un moment cinétique orbital relatif (c'est-à-dire du pion et du proton relativement l'un à l'autre)  $\hat{\mathbf{L}}$  et par un spin  $\hat{\mathbf{S}}$  qui se réduit en fait à celui du proton. Dans l'état final, les seuls états de moment cinétique total  $\hat{\mathbf{J}} = \hat{\mathbf{L}} + \hat{\mathbf{S}}$  caractérisés par la valeur  $j = \frac{1}{2}$  sont ceux qui proviennent des valeurs  $l = 0$  et  $l = 1$  du moment cinétique orbital relatif :

$$l = 0 \rightarrow j = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad l = 1 \rightarrow j = \frac{1}{2} \quad \text{ou} \quad j = \frac{3}{2}$$

Les états correspondant à  $l = 0$  sont évidents :

$$\begin{aligned} \left| 0 \frac{1}{2} \frac{1}{2} \right\rangle &= \left| 0 0 \frac{1}{2} \right\rangle, \\ \left| 0 \frac{1}{2} -\frac{1}{2} \right\rangle &= \left| 0 0 -\frac{1}{2} \right\rangle. \end{aligned}$$

Pour éviter tout risque de confusion, on note avec une parenthèse les états de base du moment cinétique total,  $|l, j, m_j\rangle$ , tels que  $\hat{\mathbf{J}}^2 |l, j, m_j\rangle = \hbar^2 j(j+1) |l, j, m_j\rangle$  et  $\hat{J}_z |l, j, m_j\rangle = \hbar m_j |l, j, m_j\rangle$  et avec un crochet les états  $|l, m_l, m_s\rangle$  exprimés dans la base  $\hat{\mathbf{L}} + \hat{\mathbf{S}}$ , c'est-à-dire tels que  $\hat{\mathbf{L}}^2 |l, m_l, m_s\rangle = \hbar^2 l(l+1) |l, m_l, m_s\rangle$ ,  $\hat{L}_z |l, m_l, m_s\rangle = \hbar m_l |l, m_l, m_s\rangle$  et  $\hat{\mathbf{S}}^2 |l, m_l, m_s\rangle = \hbar^2 \frac{3}{4} |l, m_l, m_s\rangle$ ,  $\hat{S}_z |l, m_l, m_s\rangle = \hbar m_s |l, m_l, m_s\rangle$ . Pour le doublet et le quadruplet provenant de  $l = 1$  on procède de même :

$$\begin{aligned} \left| 1 \frac{3}{2} \frac{3}{2} \right\rangle &= \left| 1 1 \frac{1}{2} \right\rangle, \\ \left| 1 \frac{3}{2} \frac{1}{2} \right\rangle &= \sqrt{\frac{2}{3}} \left| 1 0 \frac{1}{2} \right\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}} \left| 1 1 -\frac{1}{2} \right\rangle, \\ \left| 1 \frac{3}{2} -\frac{1}{2} \right\rangle &= \sqrt{\frac{2}{3}} \left| 1 0 -\frac{1}{2} \right\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}} \left| 1 -1 \frac{1}{2} \right\rangle, \\ \left| 1 \frac{3}{2} -\frac{3}{2} \right\rangle &= \left| 1 -1 -\frac{1}{2} \right\rangle. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left| 1 \frac{1}{2} \frac{1}{2} \right\rangle &= \sqrt{\frac{2}{3}} \left| 1 1 -\frac{1}{2} \right\rangle - \frac{1}{\sqrt{3}} \left| 1 0 \frac{1}{2} \right\rangle, \\ \left| 1 \frac{1}{2} -\frac{1}{2} \right\rangle &= \sqrt{\frac{2}{3}} \left| 1 -1 \frac{1}{2} \right\rangle - \frac{1}{\sqrt{3}} \left| 1 0 -\frac{1}{2} \right\rangle. \end{aligned}$$

▷ *Etats finals autorisés après la désintégration.* La conservation du moment cinétique total  $\hat{\mathbf{J}}$  impose que le système ( $\pi^- - p$ ) soit dans un état angulaire de type doublet ( $j = \frac{1}{2}$ ), celle de sa composante  $\hat{J}_z$  sélectionne les valeurs  $m_j = +\frac{1}{2}$ . Les deux états finals permis sont donc  $|0 \frac{1}{2} \frac{1}{2}\rangle$  et  $|1 \frac{1}{2} \frac{1}{2}\rangle$ . On note  $a_0$  et  $a_1$  les amplitudes de transition vers ces états.

▷ *Amplitude de transition  $\mathcal{A}_p(\theta, \varphi, \uparrow)$ .* L'état final s'écrit de manière générale :

$$|F\rangle = a_0 \left| 0 \frac{1}{2} \frac{1}{2} \right\rangle + a_1 \left| 1 \frac{1}{2} \frac{1}{2} \right\rangle,$$

les amplitudes de transition vers les deux états autorisés sont donc définies par les produits scalaires suivants :

$$a_0 = \left( 0 \frac{1}{2} \frac{1}{2} \left| F \right. \right) \quad \text{et} \quad a_1 = \left( 1 \frac{1}{2} \frac{1}{2} \left| F \right. \right).$$

L'amplitude d'observer le proton émis dans la direction  $(\theta, \varphi)$  avec un spin  $\uparrow$  est donnée par :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_p(\theta, \varphi, \uparrow) &= (\theta, \varphi, \uparrow | F) \\ &= a_0 (\theta, \varphi, \uparrow | 0 \frac{1}{2} \frac{1}{2}) + a_1 (\theta, \varphi, \uparrow | 1 \frac{1}{2} \frac{1}{2}) \\ &= a_0 \langle \theta, \varphi | 0 0 \rangle \langle \uparrow | \frac{1}{2} \rangle + a_1 \left( \sqrt{\frac{2}{3}} \langle \theta, \varphi | 1 1 \rangle \langle \uparrow | -\frac{1}{2} \rangle - \frac{1}{\sqrt{3}} \langle \theta, \varphi | 1 0 \rangle \langle \uparrow | \frac{1}{2} \rangle \right) \\ &= a_0 Y_0^0(\theta, \varphi) - \frac{1}{\sqrt{3}} a_1 Y_1^0(\theta, \varphi). \end{aligned}$$

où la définition des harmoniques sphériques a été utilisée. Un calcul analogue pour un spin down donne

$$\mathcal{A}_p(\theta, \varphi, \downarrow) = \sqrt{\frac{2}{3}} a_1 Y_1^1(\theta, \varphi).$$

▷ *Probabilités*  $\Pr(\theta, \varphi, \uparrow)$  et  $\Pr(\theta, \varphi, \downarrow)$ . Les probabilités correspondant aux deux processus se déduisent des amplitudes :

$$\Pr(\theta, \varphi, \uparrow) = |\mathcal{A}_p(\theta, \varphi, \uparrow)|^2$$

$$\Pr(\theta, \varphi, \downarrow) = |\mathcal{A}_p(\theta, \varphi, \downarrow)|^2$$

soit, en exprimant les harmoniques sphériques :

$$\begin{aligned} \Pr(\theta, \varphi, \uparrow) &= \frac{1}{4\pi} (a_0^2 - 2a_0 a_1 \cos \theta + a_1^2 \cos^2 \theta) \\ \Pr(\theta, \varphi, \downarrow) &= \frac{1}{4\pi} a_1^2 \sin^2 \theta \end{aligned}$$

On a supposé ici que les amplitudes  $a_0$  et  $a_1$  sont réelles.

Les probabilités intégrées sur l'angle  $\varphi$  s'obtiennent simplement en sommant les  $\Pr(\theta, \varphi, \uparrow\downarrow)$  puisque les observations dans des directions  $\varphi$  distinctes constituent des processus discernables. L'intégration conduit simplement ici à multiplier par un facteur  $2\pi$  :

$$\Pr(\theta, \uparrow\downarrow) = \int_0^{2\pi} \Pr(\theta, \varphi, \uparrow\downarrow) d\varphi = 2\pi \Pr(\theta, \varphi, \uparrow\downarrow)$$

soit finalement :

$$\begin{aligned} \Pr(\theta, \uparrow) &= \frac{1}{2} (a_0^2 - 2a_0 a_1 \cos \theta + a_1^2 \cos^2 \theta) \\ \Pr(\theta, \downarrow) &= \frac{1}{2} a_1^2 \sin^2 \theta \end{aligned}$$

Enfin, si l'on ne tient pas compte de l'orientation de spin du proton émis, la probabilité d'observer le proton dans une direction  $\theta$  est la somme (processus discernables) :  $\Pr(\theta) = \Pr(\theta, \uparrow) + \Pr(\theta, \downarrow) = \beta(1 + \alpha \cos \theta)$ , où  $\alpha$  et  $\beta$  sont donnés par :

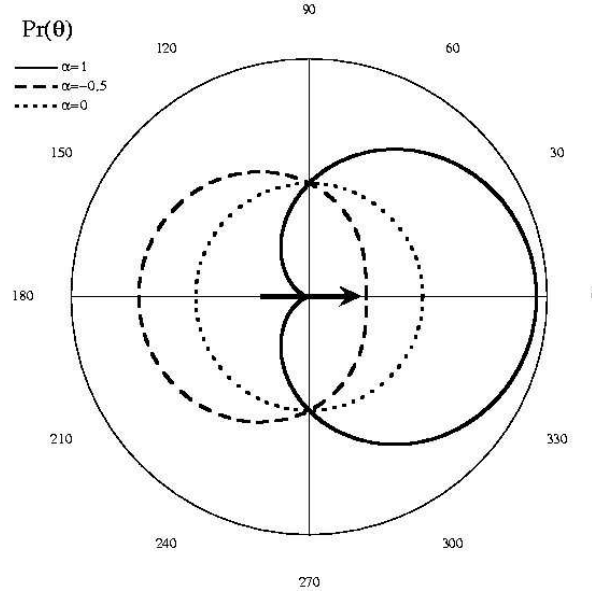
$$\beta = \frac{1}{2}(a_0^2 + a_1^2) \quad \text{et} \quad \alpha = -\frac{2a_0 a_1}{a_0^2 + a_1^2}.$$

▷ *Diagrammes d'émission.*

La figure suivante représente les diagrammes d'émission du proton,

$$\Pr(\theta) = \beta(1 + \alpha \cos \theta),$$

pour différentes valeurs de l'amplitude  $\alpha$ . Les directions d'émission préférentielles apparaissent clairement selon les valeurs de  $\alpha$ . La comparaison avec un diagramme



**Figure 4.1** Diagramme d'émission du proton  $\text{Pr}(\theta) = \beta(1 + \alpha \cos \theta)$ . Le spin du  $\Lambda^0$  sert de direction de référence ( $\theta = 0$ ). Les valeurs de  $\alpha$  sont indiquées sur la figure et  $\beta$  est arbitraire.

expérimental donnerait une estimation des coefficients  $a_0$  et  $a_1$ . On pourrait également étudier l'effet de l'orientation du spin du proton émis si l'état final était analysé en spin.

### Moments magnétiques des nucléons

On étudie une autre conséquence de la conservation du moment cinétique total, cette fois dans l'espace de spin. La composition de trois spins  $\frac{1}{2}$  permet de déterminer la structure en quarks des nucléons. Cela permet en particulier d'expliquer l'origine du moment magnétique du neutron.

▷ *Composition de trois spins  $\frac{1}{2}$ .* On se propose de composer trois spins  $1/2$ , soit  $\mathbf{S} = \mathbf{s}_1 + \mathbf{s}_2 + \mathbf{s}_3$ , ce qui conduit pour le moment cinétique de spin total à un quadruplet et deux doublets (les notations vectorielles sont à comprendre au sens des opérateurs). Les opérateurs  $\mathbf{s}_1$ ,  $\mathbf{s}_2$  et  $\mathbf{s}_3$  se rapportent aux spins  $1/2$  de trois particules distinctes. Un état de spin de ces trois particules avec par exemple  $m_{s_1} = +1/2$ ,  $m_{s_2} = -1/2$ ,  $m_{s_3} = -1/2$  sera noté  $|\uparrow, \downarrow, \downarrow\rangle$ .

Notons  $\mathbf{S}_{12} = \mathbf{s}_1 + \mathbf{s}_2$ . Les états propres  $|S_{12}, m_{12}\rangle$  des opérateurs  $\hat{\mathbf{S}}_{12}^2$  et  $\hat{S}_{12}^z$  s'écrivent en fonction des états propres  $|\uparrow\downarrow, \uparrow\downarrow\rangle$  des opérateurs  $\hat{\mathbf{s}}_1^2, \hat{s}_1^z, \hat{\mathbf{s}}_2^2, \hat{s}_2^z$ ,

$$S_{12} = 1 \quad \begin{cases} |1\ 1\rangle & = |\uparrow\uparrow\rangle, \\ |1\ 0\rangle & = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle), \\ |1\ -1\rangle & = |\downarrow\downarrow\rangle. \end{cases}$$

$$S_{12} = 0 \quad |1\ 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle).$$

On construit maintenant l'opérateur  $\mathbf{S} = \mathbf{S}_{12} + \mathbf{s}_3$ . Les états propres de  $\hat{\mathbf{S}}^2$  et  $\hat{S}^z$  seront notés  $|S_{12}, S, m_s\rangle$  où  $S_{12}$  prend les valeurs 1 ou 0 et  $S$  peut valoir  $3/2$ ,

1/2, 1/2. Lorsque l'on ajoute le troisième spin  $\frac{1}{2}$ , à partir du triplet on obtient un quadruplet  $1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$  et un doublet  $1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ , alors qu'avec le singulet on construit le second doublet  $0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ .

- Un état évident du quadruplet est donné par :

$$\left| 1 \frac{3}{2} \frac{3}{2} \right\rangle = |\uparrow \uparrow \uparrow\rangle,$$

et l'action de l'opérateur échelle  $\hat{S}^-$  conduit aux autres états de ce multiplet :  $\hat{S}^- \left| 1 \frac{3}{2} \frac{3}{2} \right\rangle = \sqrt{3} \left| 1 \frac{3}{2} \frac{1}{2} \right\rangle$  et  $(\hat{S}_{12}^- + \hat{s}_3^-) |\uparrow \uparrow \uparrow\rangle = |\downarrow \uparrow \uparrow\rangle + |\uparrow \downarrow \uparrow\rangle + |\uparrow \uparrow \downarrow\rangle$  d'où l'on déduit :

$$\left| 1 \frac{3}{2} \frac{1}{2} \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} (|\downarrow \uparrow \uparrow\rangle + |\uparrow \downarrow \uparrow\rangle + |\uparrow \uparrow \downarrow\rangle).$$

puis, par symétrie :

$$\left| 1 \frac{3}{2} -\frac{1}{2} \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} (|\uparrow \downarrow \downarrow\rangle + |\downarrow \uparrow \downarrow\rangle + |\downarrow \downarrow \uparrow\rangle),$$

$$\left| 1 \frac{3}{2} -\frac{3}{2} \right\rangle = |\downarrow \downarrow \downarrow\rangle.$$

- Le doublet  $|0 \frac{1}{2} m_s\rangle$  est simplement donné par :

$$\left| 0 \frac{1}{2} \frac{1}{2} \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow \downarrow\rangle - |\downarrow \uparrow\rangle) \otimes |\uparrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow \downarrow \uparrow\rangle - |\downarrow \uparrow \uparrow\rangle),$$

$$\left| 0 \frac{1}{2} -\frac{1}{2} \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow \downarrow\rangle - |\downarrow \uparrow\rangle) \otimes |\downarrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow \downarrow \downarrow\rangle - |\downarrow \uparrow \downarrow\rangle).$$

• Le dernier doublet enfin est construit par orthogonalisation avec les deux états précédents. Les combinaisons linéaires permises parmi les 8 états de départ impliquent les états  $|\uparrow \uparrow \downarrow\rangle$ ,  $|\uparrow \downarrow \uparrow\rangle$  et  $|\downarrow \uparrow \uparrow\rangle$  car ce sont les seuls à pouvoir contribuer à un état de projection  $m_s = +\frac{1}{2}$ . De même 3 états peuvent contribuer à un état de projection  $m_s = -\frac{1}{2}$ . On peut donc poser

$$\left| 1 \frac{1}{2} \frac{1}{2} \right\rangle = a_+ |\uparrow \uparrow \downarrow\rangle + b_+ |\uparrow \downarrow \uparrow\rangle + c_+ |\downarrow \uparrow \uparrow\rangle,$$

$$\left| 1 \frac{1}{2} -\frac{1}{2} \right\rangle = a_- |\downarrow \downarrow \uparrow\rangle + b_- |\downarrow \uparrow \downarrow\rangle + c_- |\uparrow \downarrow \downarrow\rangle.$$

Les conditions d'orthogonalisation s'écrivent :

$$\left( 0 \frac{1}{2} \frac{1}{2} \left| 1 \frac{1}{2} \frac{1}{2} \right. \right) = 0 = \frac{1}{\sqrt{2}} (b_+ - c_+),$$



$$\left( 1 \frac{3}{2} \frac{1}{2} \left| 1 \frac{1}{2} \frac{1}{2} \right. \right) = 0 = \frac{1}{\sqrt{3}}(c_+ + b_+ + a_+),$$

et celle de normation :

$$\left( 1 \frac{1}{2} \frac{1}{2} \left| 1 \frac{1}{2} \frac{1}{2} \right. \right) = 1 = a_+^2 + b_+^2 + c_+^2.$$

On peut finalement faire le choix :

$$a_+ = -\sqrt{\frac{2}{3}}, \quad b_+ = \frac{1}{\sqrt{6}}, \quad c_+ = \frac{1}{\sqrt{6}}.$$

Un résultat identique est obtenu pour les coefficients  $a_- \dots$

$$\begin{aligned} \left| 1 \frac{1}{2} \frac{1}{2} \right\rangle &= -\sqrt{\frac{2}{3}} |\uparrow \uparrow \downarrow\rangle + \frac{1}{\sqrt{6}} |\uparrow \downarrow \uparrow\rangle + \frac{1}{\sqrt{6}} |\downarrow \uparrow \uparrow\rangle, \\ \left| 1 \frac{1}{2} -\frac{1}{2} \right\rangle &= -\sqrt{\frac{2}{3}} |\downarrow \downarrow \uparrow\rangle + \frac{1}{\sqrt{6}} |\downarrow \uparrow \downarrow\rangle + \frac{1}{\sqrt{6}} |\uparrow \downarrow \downarrow\rangle. \end{aligned}$$

Notons que ces états ne sont en général ni symétriques ni antisymétriques par l'échange de deux particules. On pourrait les rendre par exemple symétriques (ou antisymétriques) si c'était nécessaire en appliquant un opérateur de symétrisation qui opère toutes les permutations possibles entre particules. Cela n'est pas indispensable ici, et rien ne nous indique que la partie dépendant du spin de la fonction d'onde des nucléons doit être de symétrie définie.

▷ *Moments magnétiques des nucléons.* Vers les années 1970 a été proposé un modèle de *quarks constituants* rendant compte de certaines propriétés des nucléons. Dans ce modèle, le proton et le neutron sont tous deux constitués de trois quarks ( $p = uud$ ,  $n = udd$ ). Les quarks sont des fermions ponctuels de spin  $1/2$ . Leurs charges électriques valent  $q_u = +\frac{2}{3} |q_e|$  et  $q_d = -\frac{1}{3} |q_e|$  et leurs masses sont approximativement égales  $m_u \simeq m_d \simeq \frac{1}{3} m_N$  où  $m_N$  est la masse du nucléon ( $m_p \simeq m_n \simeq m_N$ ). On admet que les moments magnétiques des quarks sont donnés par la formule de Dirac :  $\mu_z = 2 \frac{q}{2m} s_z$  ( $q$ ,  $m$  et  $s_z$  sont respectivement la charge, la masse et la composante du spin du fermion dans la "direction" de mesure). On se propose de déterminer la structure en quarks du proton et du neutron à partir de la donnée expérimentale des moments magnétiques de ces deux particules :

$$\mu_p = 2.79 \frac{|q_e| \hbar}{2m_N}, \quad \mu_n = -1.91 \frac{|q_e| \hbar}{2m_N}$$

que l'on peut comparer aux valeurs propres de l'opérateur  $\hat{\mu}^z = \sum_{i=1}^3 \hat{\mu}_i^z$ , l'indice  $i$  se référant aux différents quarks.

Un proton de spin  $\uparrow$ ,  $|p \uparrow\rangle$ , peut être décrit par l'un des deux états  $|0, 1/2, 1/2\rangle$  ou  $|1, 1/2, 1/2\rangle$ . Le "difermion" de spin  $S_{12}$  peut de plus être du type  $uu$  ou  $ud$ . Il existe donc quatre combinaisons possibles parmi lesquelles une seule est à retenir. On calcule le moment magnétique correspondant à chacune de ces combinaisons dans le tableau ci-dessous :

**Tableau 4.1** Structure en quarks a priori possibles pour le proton et moments magnétiques associés.

proton $ p \uparrow\rangle$	$ 0, 1/2, 1/2\rangle$	$ 1, 1/2, 1/2\rangle$
$S_{12} = uu$	$\mu_d$	$\frac{4}{3}\mu_u - \frac{1}{3}\mu_d$
$S_{12} = ud$	$\mu_u$	$\frac{1}{3}\mu_u + \frac{2}{3}\mu_d$

La première case par exemple signifie que le proton est supposé de la forme

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|u \uparrow, u \downarrow, d \uparrow\rangle - |u \downarrow, u \uparrow, d \uparrow\rangle)$$

et que son moment magnétique est par conséquent

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(\langle u \uparrow, u \downarrow, d \uparrow | \hat{\mu}^z | u \uparrow, u \downarrow, d \uparrow\rangle + \langle u \downarrow, u \uparrow, d \uparrow | \hat{\mu}^z | u \downarrow, u \uparrow, d \uparrow\rangle) \\ = \frac{1}{2}(\mu_u - \mu_u + \mu_d + (-\mu_u) + \mu_u + \mu_d) \\ = \mu_d \end{aligned}$$

Les autres cases se calculent de manière analogue. La valeur expérimentale +2.79 permet de sélectionner la valeur la plus proche, soit +3 et le proton est donc de la forme

$$\begin{aligned} |p \uparrow\rangle &= -\sqrt{\frac{2}{3}}|u \uparrow, u \uparrow, d \downarrow\rangle + \frac{1}{\sqrt{6}}|u \uparrow, u \downarrow, d \uparrow\rangle + \frac{1}{\sqrt{6}}|u \downarrow, u \uparrow, d \uparrow\rangle, \\ |p \downarrow\rangle &= -\sqrt{\frac{2}{3}}|u \downarrow, u \downarrow, d \uparrow\rangle + \frac{1}{\sqrt{6}}|u \downarrow, u \uparrow, d \downarrow\rangle + \frac{1}{\sqrt{6}}|u \uparrow, u \downarrow, d \downarrow\rangle. \end{aligned}$$

On peut procéder de même pour le neutron  $|n \uparrow\rangle$  :

**Tableau 4.2** Structure en quarks a priori possibles pour le neutron et moments magnétiques associés.

proton $ p \uparrow\rangle$	$ 0, 1/2, 1/2\rangle$	$ 1, 1/2, 1/2\rangle$
$S_{12} = uu$	$\mu_u$	$\frac{4}{3}\mu_d - \frac{1}{3}\mu_u$
$S_{12} = ud$	$\mu_d$	$\frac{2}{3}\mu_u + \frac{1}{3}\mu_d$

et de nouveau la valeur expérimentale -1.91, proche de -2, sélectionne les états de la case en haut à droite du tableau :

$$\begin{aligned} |n \uparrow\rangle &= -\sqrt{\frac{2}{3}}|d \uparrow, d \uparrow, u \downarrow\rangle + \frac{1}{\sqrt{6}}|d \uparrow, d \downarrow, u \uparrow\rangle + \frac{1}{\sqrt{6}}|d \downarrow, d \uparrow, u \uparrow\rangle, \\ |n \downarrow\rangle &= -\sqrt{\frac{2}{3}}|d \downarrow, d \downarrow, u \uparrow\rangle + \frac{1}{\sqrt{6}}|d \downarrow, d \uparrow, u \downarrow\rangle + \frac{1}{\sqrt{6}}|d \uparrow, d \downarrow, u \downarrow\rangle. \end{aligned}$$

### Symétries continues de l'espace-temps

Une symétrie de l'espace-temps est une transformation des coordonnées spatio-temporelles, par exemple une translation ou une rotation. Lorsqu'un système (appareillage + système étudié) est invariant par une telle transformation, les résultats de mesure sont inchangés. En mécanique quantique, la transformation  $\hat{U}$  agissant sur l'espace des états,

$$|\psi'\rangle = \hat{U}|\psi\rangle$$

doit être unitaire afin de conserver la probabilité de présence. Un élément de matrice quelconque de l'hamiltonien est invariant sous l'action de  $\hat{U}$ ,

$$\langle f'|\hat{H}|i'\rangle = \langle f|\hat{U}^\dagger\hat{H}\hat{U}|i\rangle = \langle f|\hat{H}|i\rangle$$

ce qui impose la relation de commutation

$$[\hat{H}, \hat{U}] = 0.$$

Les symétries de l'espace-temps sont bien connues. Par exemple l'invariance par translation spatiale sous forme infinitésimale requiert

$$\psi(\mathbf{r}) \rightarrow \psi'(\mathbf{r}) = \psi(\mathbf{r} + \delta\mathbf{r}) = \left(\mathbb{1} + \frac{i}{\hbar}\delta\mathbf{r} \cdot \hat{\mathbf{p}}\right)\psi(\mathbf{r})$$

ce qui permet d'identifier l'opérateur unitaire associé aux translations dans l'espace <sup>(19)</sup>

$$U_{\delta\mathbf{r}} = \exp \frac{i}{\hbar}\delta\mathbf{r} \cdot \hat{\mathbf{p}}.$$

De la relation de commutation  $[\hat{H}, \hat{U}_{\delta\mathbf{r}}] = 0$  on déduit par conséquent  $[\hat{H}, \hat{\mathbf{p}}] = 0$ , c'est-à-dire que  $\hat{\mathbf{p}}$  est une quantité conservée. C'est la manifestation quantique du théorème de Noether.

De manière analogue, la symétrie de translation temporelle est gouvernée par l'opérateur d'évolution

$$U_{\delta t} = \exp -\frac{i}{\hbar}\delta t \hat{H},$$

<sup>(19)</sup> On montre que le développement de Taylor à tous les ordres fait intervenir le développement de l'exponentielle de  $\hat{\mathbf{p}}$ ,

$$\psi(\mathbf{r} + \delta\mathbf{r}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (\delta\mathbf{r})^n \left(\frac{i}{\hbar}\hat{\mathbf{p}}\right)^n \psi(\mathbf{r}),$$

de sorte que l'expression

$$U_{\delta\mathbf{r}} = \exp \frac{i}{\hbar}\delta\mathbf{r} \cdot \hat{\mathbf{p}}.$$

est valable pour  $\delta\mathbf{r}$  arbitraire.

et est associée à la conservation de l'énergie, alors que la symétrie de rotation spatiale est engendrée par l'opérateur unitaire

$$U_{\delta\theta} = \exp \frac{i}{\hbar} \delta\theta \cdot \hat{\mathbf{L}}$$

et correspond à la conservation du moment cinétique illustré dans l'exemple précédent.

### Symétries spatio-temporelles discrètes

▷ *Parité.* A l'opération de réflexion spatiale  $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}' = -\mathbf{r}$ , il correspond un opérateur *parité*  $\hat{\mathcal{P}}$  qui agit comme suit :

$$\psi(\mathbf{r}, t) \rightarrow \psi'(\mathbf{r}, t) = \hat{\mathcal{P}}\psi(\mathbf{r}, t) = \psi(-\mathbf{r}, t).$$

C'est une symétrie discrète. Les valeurs propres valent  $\eta_p = \pm 1$  car l'action répétée de l'opérateur parité doit redonner l'état de départ. On parle en général d'états propres pairs et impairs. Comme dans le cas des symétries continues, un système qui conserve la parité est décrit par un hamiltonien qui commute avec  $\hat{\mathcal{P}}$ . La parité est conservée dans les processus gouvernés par l'interaction électromagnétique ou l'interaction forte,

$$[\hat{H}_{\text{e.m.}}, \hat{\mathcal{P}}] = 0, \quad [\hat{H}_s, \hat{\mathcal{P}}] = 0,$$

mais pas par l'interaction faible,

$$[\hat{H}_w, \hat{\mathcal{P}}] \neq 0.$$

Pour un état quantique, on définit la parité orbitale et la parité intrinsèque. La parité orbitale provient de la propriété

$$\hat{\mathcal{P}}Y_l^m(\theta, \varphi) = (-1)^l Y_l^m(\theta, \varphi)$$

dans la transformation  $(r, \theta, \varphi) \rightarrow (r, \theta - \pi, \varphi + \pi)$ . Les états pairs sont donc ceux pour lesquels  $l$  est pair. Il peut également exister une parité intrinsèque si l'état est état propre de l'opérateur parité. La parité est multiplicative pour un système composé. Le produit des parités totales (orbitales et intrinsèques) dans l'état initial et dans l'état final d'une diffusion par interaction forte par exemple doit donc être conservé. La parité des antiparticules est la même que celle des particules dans le cas des bosons, elle est opposée dans le cas des fermion. On en déduit par exemple qu'un état lié fermion-antifermion a une parité intrinsèque  $-1$ .

▷ *Renversement du temps.* A l'opération de *renversement temporel*  $t \rightarrow t' = -t$ , il correspond un opérateur parité  $\hat{\mathcal{T}}$  qui agit comme suit :

$$\psi(\mathbf{r}, t) \rightarrow \psi'(\mathbf{r}, t) = \hat{\mathcal{T}}\psi(\mathbf{r}, t) = \psi(\mathbf{r}, -t).$$

C'est également une symétrie discrète, mais l'opérateur associé n'est pas unitaire car il ne préserve pas la relation de commutation  $[\hat{x}, \hat{p}_x] = i\hbar$  qui deviendrait  $[\hat{x}, \hat{p}_x] = -i\hbar$ . Pour obtenir un opérateur unitaire, il faut adjoindre à  $\hat{\mathcal{T}}$  la transformation (dite anti-unitaire) qui transforme un nombre complexe en son conjugué. Cela définit

$\hat{T}'$  qui est par exemple conservé par l'interaction forte mais de nouveau pas par interaction faible.

▷ *Conjugaison de charge.* Bien que n'étant pas une symétrie spatio-temporelle, on a coutume de présenter avec les symétries  $\hat{P}$  et  $\hat{T}$  la *conjugaison de charge*  $\hat{C}$ , l'opération qui transforme une particule en son antiparticule, par changement de signe de sa charge électrique et de toutes les autres charges (charge baryonique, charges leptoniques). De fait, l'effet de cette opération est assez similaire à celui des deux opérations précédentes. Un moment magnétique généré par une boucle de courant sera transformé en son opposé sous l'action de la conjugaison de charge, car les électrons traversant la boucle deviennent des positrons, ce qui modifie le sens du courant associé et donc le signe du moment magnétique, tout comme le ferait l'opération de renversement du temps ou bien la réflexion par rapport à un miroir perpendiculaire au plan de la boucle.

▷ *Transformation de quelques quantités physiques sous  $\hat{P}$ ,  $\hat{C}$ ,  $\hat{T}$ .* Il est instructif de considérer le cas des grandeurs classiques et de leur transformation sous l'action des opérateurs  $\hat{P}$ ,  $\hat{C}$ ,  $\hat{T}$ . Quelques exemples sont indiqués dans le tableau qui suit.

**Tableau 4.3** Transformation de quelques quantités physiques sous  $\hat{P}$ ,  $\hat{T}$ ,  $\hat{C}$ . Le moment  $\mathbf{L}$  est un moment cinétique qui se transforme comme  $\mathbf{r} \wedge \mathbf{v}$ , le moment  $\boldsymbol{\mu}$  est un moment magnétique. Les champs  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{B}$  sont bien entendu les champs électrique et magnétique.

Quantité	$\hat{P}$	$\hat{T}$	$\hat{C}$
position $\mathbf{r}$	$-\mathbf{r}$	$\mathbf{r}$	$\mathbf{r}$
vitesse $\mathbf{v}$	$-\mathbf{v}$	$-\mathbf{v}$	$\mathbf{v}$
moment $\mathbf{L}$	$\mathbf{L}$	$-\mathbf{L}$	$\mathbf{L}$
champ $\mathbf{E}$	$-\mathbf{E}$	$\mathbf{E}$	$-\mathbf{E}$
champ $\mathbf{B}$	$\mathbf{B}$	$-\mathbf{B}$	$-\mathbf{B}$
moment $\boldsymbol{\mu}$	$\boldsymbol{\mu}$	$-\boldsymbol{\mu}$	$-\boldsymbol{\mu}$

On en déduit par exemple les lois de transformation des équations de Maxwell, qui s'avèrent inchangées sous l'action de chacun des trois opérateurs  $\hat{P}$ ,  $\hat{T}$ ,  $\hat{C}$ .

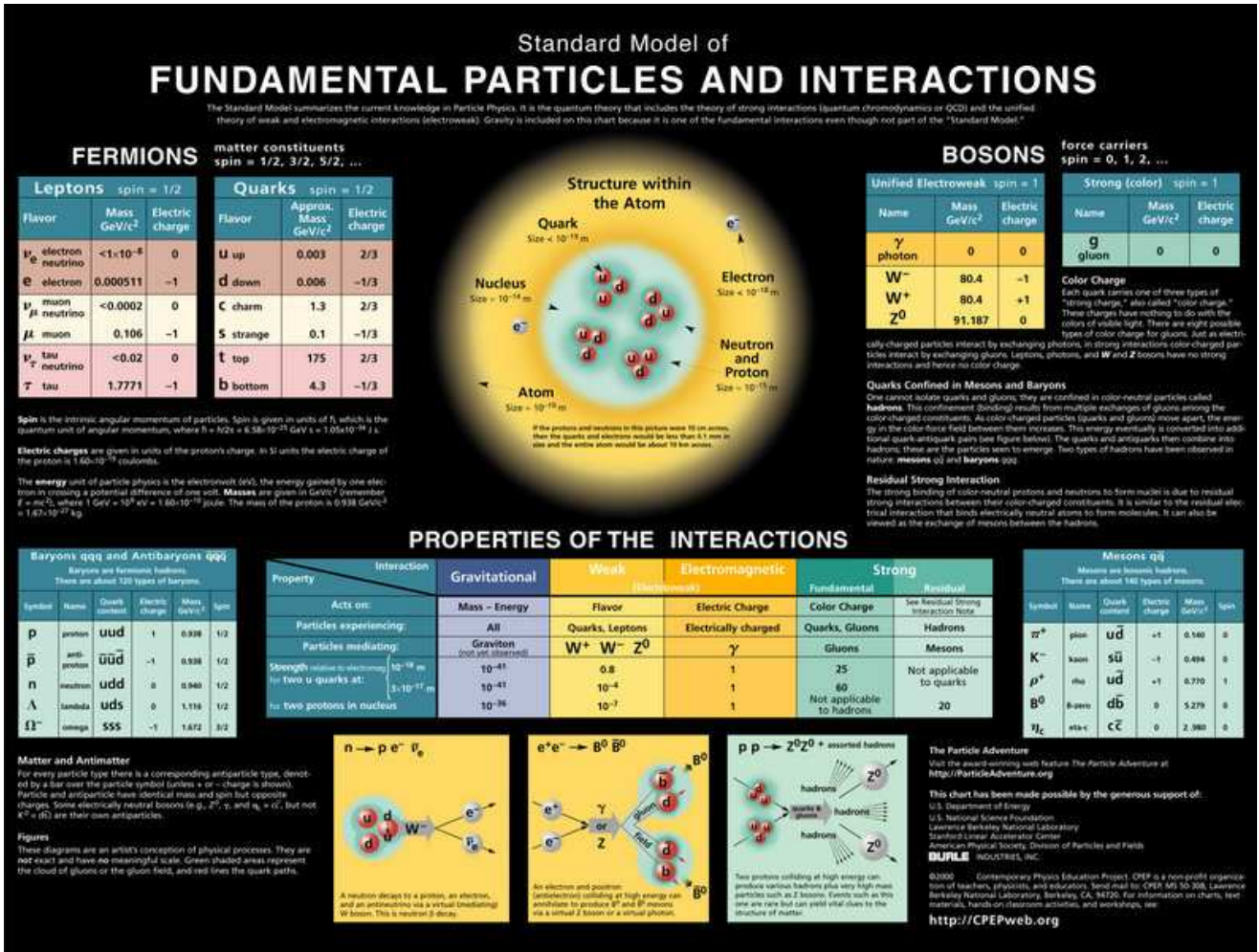
**Tableau 4.4** Transformation des équations de Maxwell sous  $\hat{P}$ ,  $\hat{T}$ ,  $\hat{C}$ .

Transformation	$\vec{\nabla} \mathbf{E}$	$\rho/\varepsilon_0$	$\vec{\nabla} \wedge \mathbf{B}$	$\mu_0 \mathbf{j}$	$\varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$
$\hat{P}$	$\vec{\nabla} \mathbf{E}$	$\rho/\varepsilon_0$	$-\vec{\nabla} \wedge \mathbf{B}$	$-\mu_0 \mathbf{j}$	$-\varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$
$\hat{T}$	$\vec{\nabla} \mathbf{E}$	$\rho/\varepsilon_0$	$-\vec{\nabla} \wedge \mathbf{B}$	$-\mu_0 \mathbf{j}$	$-\varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$
$\hat{C}$	$-\vec{\nabla} \mathbf{E}$	$-\rho/\varepsilon_0$	$-\vec{\nabla} \wedge \mathbf{B}$	$-\mu_0 \mathbf{j}$	$-\varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$

### Caractéristiques de quelques particules

Les particules appelées *leptons* ( $\lambda\epsilon\pi\tau\omicron\varsigma$  : léger), par exemple  $e^-$ ,  $\mu^-$ , neutrinos, sont insensibles à l'interaction forte. Les *hadrons* ( $\alpha\delta\rho\omicron\varsigma$  : fort) en revanche y sont soumis. Parmi les hadrons, on distingue les *baryons* ( $\beta\alpha\rho\nu\varsigma$  : lourd) comme le neutron ou le proton, ce sont des fermions et les *mésons* ( $\mu\epsilon\sigma\omicron\varsigma$  : situé au milieu) comme les mésons  $\pi$ ,  $K$  qui sont des bosons. (Il existe encore des hadrons plus lourds (des résonances) appelés *hypérons* comme  $\Lambda$ ,  $\Sigma$ .) Lorsque l'on s'intéresse aux propriétés des particules, on précise en général leur masse, leur spin et leur parité sous la forme  $J^P$ . Le spin dans le cas des particules élémentaires est généralement noté  $J$  car il

existe encore d'autres nombres quantiques que nous rencontrerons plus tard, comme l'isospin, l'isospin leptonique, l'étrangeté (appelée  $S$  pour strangeness, d'où le risque de confusion avec le spin), ou le charme.



**Figure 4.2** Les particules élémentaires : tableau synoptique des principales propriétés des particules élémentaires (fermions constitutifs de la matière et bosons médiateurs des interactions), des particules composées de quarks (baryons et mésons) et des interactions fondamentales.

Les baryons les plus connus sont le proton et le neutron. Ils ont un spin  $\frac{1}{2}$ , mais au total, il existe 8 baryons de spin  $\frac{1}{2}$  et de parité +1 (seuls le proton et le neutron sont non étranges). Leurs caractéristiques sont rassemblées ci-après.

**Tableau 4.5** Caractéristiques de quelques baryons de spin  $\frac{1}{2}$  et de parité  $+1$ . On indique leurs masses en  $\text{MeV}/c^2$ , leur spin et parité  $J^P$ , les principaux modes de désintégration avec les rapports d'embranchement (embr.) et le temps de vie  $\tau$  en secondes.

Particule	masse ( $\text{MeV}/c^2$ )	$J^P$	modes principaux	embr.	$\tau$ (s)
$p$	$938.28 \pm 0.005$	$\frac{1}{2}^+$	stable		
$n$	$939.57 \pm 0.005$	$\frac{1}{2}^+$	$p + e^- + \bar{\nu}$	100%	$(9.3 \pm 0.1).10^3$
$\Lambda^0$	$1115.6 \pm 0.06$	$\frac{1}{2}^+$	$p + \pi^-$ $n + \pi^0$	64% 36%	$(2.52 \pm 0.02).10^{-10}$
$\Sigma^+$	$1189.4 \pm 0.1$	$\frac{1}{2}^+$	$p + \pi^+$ $n + \pi^+$	51.7% 48.3%	$(0.80 \pm 0.006).10^{-10}$
$\Sigma^0$	$1192.5 \pm 0.1$	$\frac{1}{2}^+$	$\Lambda^0 + \gamma$	100%	$< 10^{-14}$
$\Sigma^-$	$1197.4 \pm 0.07$	$\frac{1}{2}^+$	$n + \pi^-$	100%	$(1.49 \pm 0.02)10^{-10}$

Il y a de même 8 mésons de spin nul et de parité  $-1$ , dont les plus courants, les mésons  $\pi$ . On rassemble quelques propriétés dans le tableau qui suit.

**Tableau 4.6** Caractéristiques de quelques mésons de spin 0 et de parité  $-1$ . On indique leurs masses en  $\text{MeV}/c^2$ , leur spin et parité  $J^P$ , les principaux modes de désintégration avec les rapports d'embranchement et le temps de vie  $\tau$  en secondes.

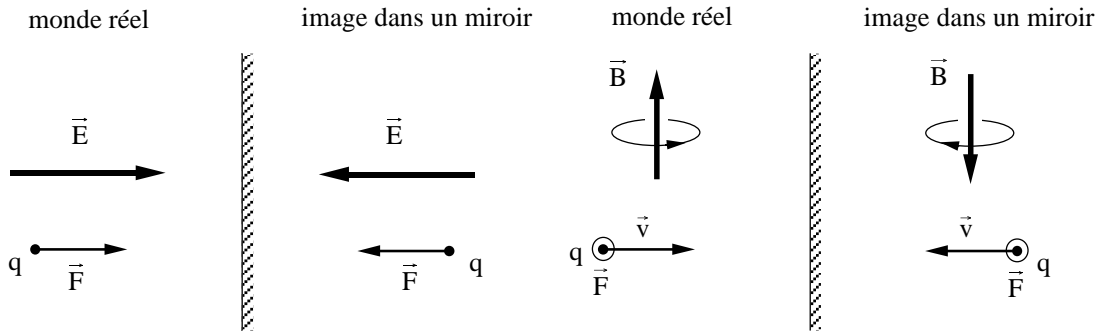
Particule	masse ( $\text{MeV}/c^2$ )	$J^P$	modes principaux	embr.	$\tau$ (s)
$\pi^0$	$137.97 \pm 0.01$	$0^-$	$\gamma + \gamma$	98.8%	$(0.84 \pm 0.1).10^{-16}$
$\pi^+$	$139.58 \pm 0.01$	$0^-$	$\mu^+ + \nu_\mu$	100%	$(2.60 \pm 0.002).10^{-8}$
$\pi^-$	$139.58 \pm 0.01$	$0^-$	$\mu^- + \bar{\nu}_\mu$	100%	$(2.60 \pm 0.002).10^{-8}$
$K^0$	$497.8 \pm 0.1$	$0^-$	$K_s^0$ $K_l^0$	50% 50%	
$\bar{K}^0$	$497.8 \pm 0.1$	$0^-$	$K_s^0$ $K_l^0$	50% 50%	

### Interaction faible et symétrie PC.

▷ *Parité et symétrie miroir.* La parité correspond à la transformation  $(x, y, z) \rightarrow (-x, -y, -z)$ . Considérons un plan  $xOy$ . La symétrie miroir par rapport à ce plan laisse les axes  $x$  et  $y$  inchangés et transforme l'axe perpendiculaire  $z$  en  $-z$ . Une rotation de  $\pi$  autour de  $z$  change alors les axes  $x$  et  $y$  en  $-x$  et  $-y$ . Ces deux opérations conduisent au même résultat si elles sont effectuées dans l'ordre inverse. L'invariance des lois de la physique par rotation (isotropie de l'espace) est un fait acquis (elle correspond à la conservation du moment cinétique, jamais démentie), d'où l'on déduit que la conservation de la parité se ramène à l'invariance par symétrie miroir. Il est plus aisé de visualiser la symétrie miroir que la parité, d'où notre choix ici de discuter de l'invariance ou non par parité à partir de l'exemple de la symétrie miroir.

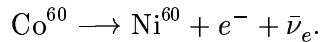
Celle-ci semble généralement satisfaite en physique, comme le montrent les exemples suivants : une charge positive  $q$ , initialement immobile dans un champ électrique uniforme  $\mathbf{E}$ , est soumise à une force de Coulomb  $\mathbf{F}$ . Par symétrie miroir les vecteurs  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{F}$  (vecteurs polaires) se transforment comme l'indique la figure

suivante et le système image correspond bien à une situation physiquement permise. Dans le cas d'une charge positive  $q$  animée d'une vitesse  $\mathbf{v}$  perpendiculaire au champ magnétique uniforme  $\mathbf{B}$  (vecteur axial), on transforme ce dernier en considérant une boucle de courant qui l'engendre et le système transformé est également permis puisque la force de Lorentz est dans le bon sens.



**Figure 4.3** Symétries miroir : à gauche, une charge  $q$  immobile dans un champ électrique uniforme et la force de Coulomb, à droite une charge  $q$  animée d'une vitesse  $\mathbf{v}$  dans un champ magnétique uniforme et la force de Lorentz. Dans les deux cas, l'image dans un miroir correspond à une situation physique également permise.

▷ *Hypothèse de Lee et Yang*. Dans l'expérience de Wu, suggérée par Yang et Lee, un noyau de cobalt 60 se désintègre en nickel 60 en émettant des électrons et des antineutrinos ( $\bar{\nu}$ ),

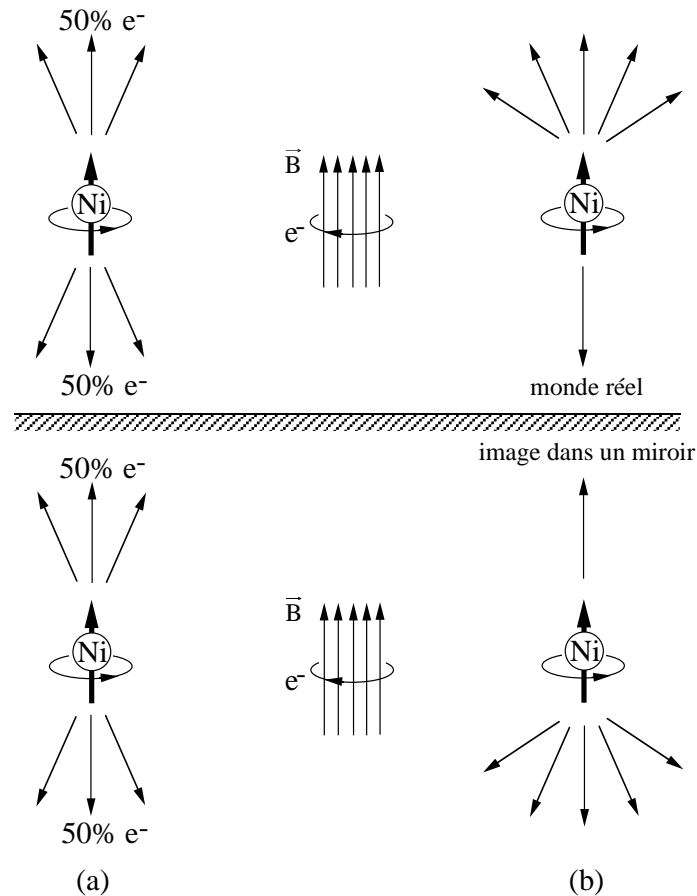


Les électrons sont facilement détectés, contrairement aux neutrinos. Considérons le système dans l'état final ainsi que sa réflexion dans un miroir dans deux cas différents. Dans le premier l'émission des électrons est également probable dans le sens du champ qui fixe le spin du nickel et dans le sens opposé. Par symétrie miroir, le système global est inchangé (indiscernabilité des électrons émis). En revanche, si l'émission se fait préférentiellement dans un sens particulier, l'image dans un miroir apparaît différente. Ainsi, l'observation d'une dissymétrie dans le diagramme d'émission des électrons, par rapport au plan perpendiculaire au spin du nickel, est la signature de la non conservation de la parité. C'est bien ce qui se produit expérimentalement, où l'on constate que l'émission se fait majoritairement dans la direction du spin du nickel. La parité n'est donc pas conservée par interaction faible.

▷ *Désintégration du  $\Lambda^0$* . Dans le cas de la désintégration du  $\Lambda^0$ , si la parité était conservée, il faudrait que la valeur de  $\alpha$  calculée précédemment soit nulle. La valeur expérimentale  $-0.62 \pm 0.05$  prouve la violation de la symétrie  $\hat{P}$  par interaction faible.

▷ *Parité et conjugaison de charge*. La conjugaison de charge  $\hat{C}$  transforme une particule en son antiparticule. Tout comme la parité, c'est une symétrie qui n'est pas conservée par interaction faible. Cependant, jusqu'en 1964, on a pensé que le produit  $\hat{P}\hat{C}$  était conservé. On peut reprendre l'exemple du  $\Lambda^0$  pour examiner le diagramme de désintégration alors prévisible pour son antiparticule, le  $\bar{\Lambda}^0$ .



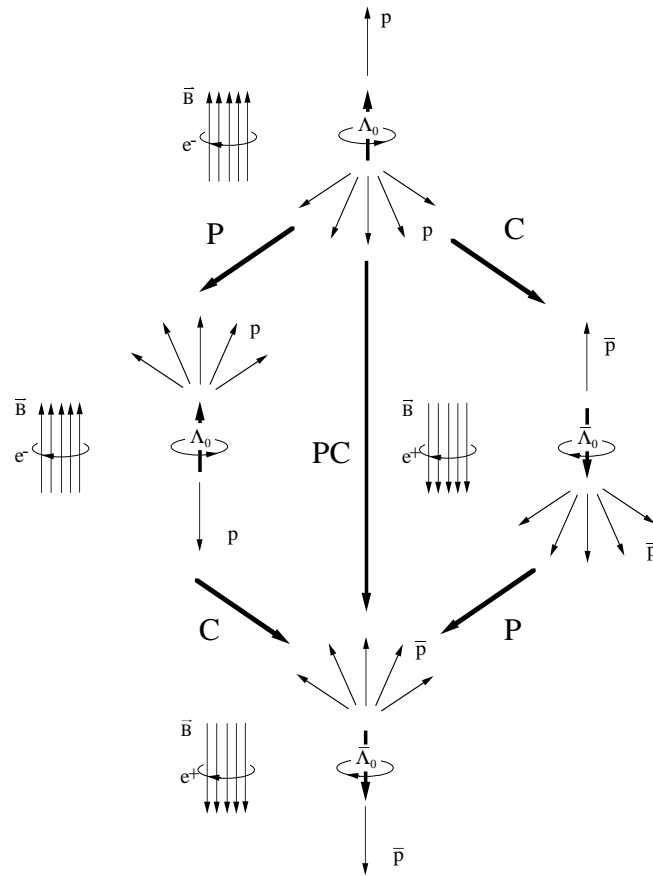


**Figure 4.4** Symétries miroir et expérience de Wu : à gauche, diagramme d'émission des électrons symétrique par rapport au plan perpendiculaire au spin du nickel, à droite, diagramme dissymétrique avec dans la réalité une émission préférentielle dans la direction du spin du nickel.

### Le système $K^0 - \bar{K}^0$

▷ *Position du problème.* On se propose d'interpréter dans ce problème un événement enregistré dans une chambre à bulles et représenté sur la figure ci-dessous : un méson  $\pi^-$  rencontre un proton de la chambre à bulles et conduit par interaction forte à deux particules neutres (non observables sur le cliché) : un méson  $K^0$  ainsi qu'un  $\Lambda^0$  qui se désintègre ensuite par interaction faible et est identifié par ses produits de désintégration. La difficulté provient de ce que la seconde interaction  $K^0 + p \rightarrow \pi^+ + \Lambda^0$  est interdite (elle ne conserve pas l'étrangeté alors qu'il s'agit d'un mécanisme d'interaction forte dont on verra qu'il doit préserver l'étrangeté). Le problème consiste donc à éclaircir cette seconde interaction.

▷ *Un exemple de système à deux niveaux.* Les mésons  $K^0$  et  $\bar{K}^0$  sont des particules sensibles à l'interaction faible. Elles sont antiparticules l'une de l'autre,



**Figure 4.5** Symétries  $\hat{P}$  (parité) et  $\hat{C}$  (conjugaison de charge) ainsi que leurs combinaisons. Au lieu de parité il s'agit ici en fait de symétrie miroir. Si le produit  $\hat{P}\hat{C}$  est conservé, les antiprotons doivent être majoritairement émis dans la direction opposée à celle du spin du  $\bar{\Lambda}^0$ .

$$\hat{C}|K^0\rangle = |\bar{K}^0\rangle$$

$$\hat{C}|\bar{K}^0\rangle = |K^0\rangle$$

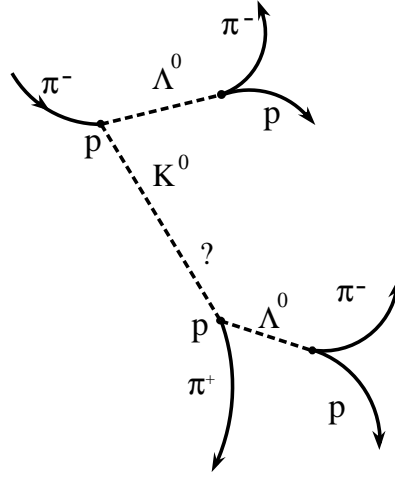
de parité négative, de sorte que l'action supplémentaire de la parité conduit à

$$\hat{C}\hat{P}|K^0\rangle = -|\bar{K}^0\rangle$$

$$\hat{C}\hat{P}|\bar{K}^0\rangle = -|K^0\rangle$$

ce qui permet de représenter l'opérateur  $\hat{C}\hat{P}$  dans la base des états  $\{|K^0\rangle, |\bar{K}^0\rangle\}$  par la matrice

$$[\hat{C}\hat{P}] = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$



**Figure 4.6** Événement de chambre à bulles : une première collision par interaction forte produit un  $K^0$  et un  $\Lambda^0$ , selon  $\pi^- + p \rightarrow K^0 + \Lambda^0$ . Ce dernier est identifié à cause de son mode de désintégration par interaction faible  $\Lambda \rightarrow \pi^- + p$ . Une seconde interaction forte produit ensuite un nouveau  $\Lambda^0$  :  $? + p \rightarrow \Lambda^0 + \pi^+$ , mais la particule neutre impliquée dans l'état initial de la collision ne peut pas être un  $K^0$ .

Les états propres de  $\hat{C}\hat{P}$  sont les combinaisons linéaires

$$|K_s^0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|K^0\rangle - |\bar{K}^0\rangle), \quad \hat{C}\hat{P}|K_s^0\rangle = |K_s^0\rangle$$

$$|K_l^0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|K^0\rangle + |\bar{K}^0\rangle), \quad \hat{C}\hat{P}|K_l^0\rangle = -|K_l^0\rangle.$$

La notation  $_s$  et  $_l$  signifie *short* et *long*, ce qui sera justifié plus tard. L'interaction faible conserve (presque)  $\hat{C}\hat{P}$  de sorte que  $[\hat{H}_W, \hat{C}\hat{P}] = 0$  et par conséquent  $|K_s^0\rangle$  et  $|K_l^0\rangle$  sont états propres de l'hamiltonien d'interaction faible alors que ce n'est pas le cas de  $|K^0\rangle$  et  $|\bar{K}^0\rangle$ . Ces dernières étant des particules instables, on écrit pour  $|K_s^0\rangle$  et  $|K_l^0\rangle$  des équations aux valeurs propres impliquant des énergies avec une partie imaginaire,

$$\hat{H}_W|K_s^0\rangle = (E_s - i\varepsilon_s)|K_s^0\rangle$$

$$\hat{H}_W|K_l^0\rangle = (E_l - i\varepsilon_l)|K_l^0\rangle.$$

On introduit également la notation  $\varepsilon_s = \hbar/2\tau_s$  et  $\varepsilon_l = \hbar/2\tau_l$  où apparaissent les temps de vie des  $K^0$  court et long,

$$\tau_s = 0.86 \cdot 10^{-10} \text{s}, \quad \tau_l = 5.17 \cdot 10^{-8} \text{s}.$$

L'hamiltonien  $\hat{H}_W$  n'est donc pas hermitien et les états  $|K_s^0\rangle$  et  $|K_l^0\rangle$  (ses états propres) ne sont pas observables.

▷ *Evolution temporelle.* Supposons qu'à  $t = 0$  le système soit dans l'état  $|\psi(0)\rangle = |K^0\rangle$ . L'évolution ultérieure est déterminée par

$$\hat{H}_W |\psi(t)\rangle = i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle$$

que l'on résoud en décomposant sur la base des états propres

$$\begin{aligned} |\psi(t)\rangle &= s(t)|K_s^0\rangle + l(t)|K_l^0\rangle \\ s(t) &= s(0) e^{-i(E_s - i\varepsilon_s)t/\hbar} = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-iE_s t/\hbar} e^{-t/2\tau_s} \\ l(t) &= l(0) e^{-i(E_l - i\varepsilon_l)t/\hbar} = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-iE_l t/\hbar} e^{-t/2\tau_l} \end{aligned}$$

L'amplitude de probabilité de trouver la particule dans l'état  $|\bar{K}^0\rangle$  au temps  $t$  est donnée par

$$\langle \bar{K}^0 | \psi(t) \rangle = \frac{1}{2} \left( e^{-iE_l t/\hbar} e^{-t/2\tau_s} - e^{-iE_s t/\hbar} e^{-t/2\tau_l} \right)$$

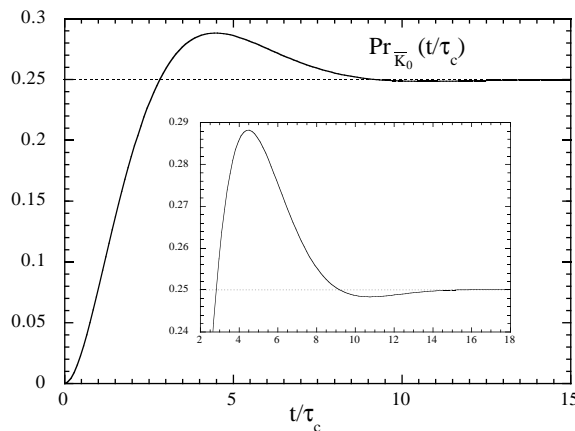
et la probabilité associée

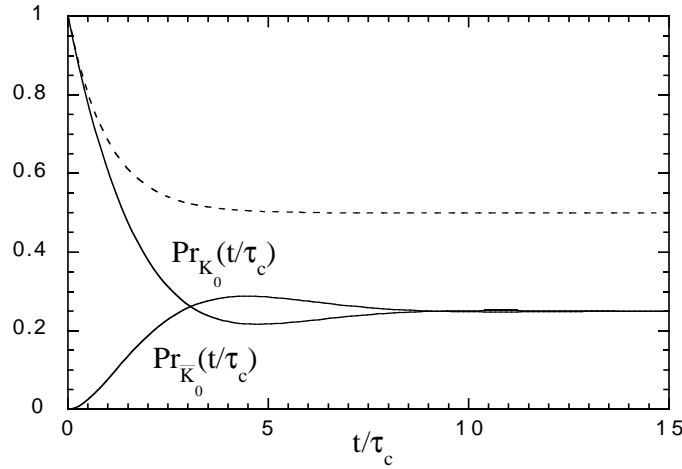
$$\begin{aligned} \text{Pr}_{\bar{K}^0}(t) &= |\langle \bar{K}^0 | \psi(t) \rangle|^2 \\ &= \frac{1}{4} \left( e^{-t/\tau_s} + e^{-t/\tau_l} - 2 e^{-(\tau_s^{-1} + \tau_l^{-1})t/2} \cos(E_s - E_l)t/\hbar \right). \end{aligned}$$

En notant  $\omega_i = E_i/\hbar$  et compte-tenu des valeurs numériques  $\tau_l^{-1} \ll \tau_s^{-1}$  et  $e^{-t/\tau_l} \simeq 1$  pour des échelles de temps  $t \ll 100\tau_s$ , on simplifie cette expression en

$$\text{Pr}_{\bar{K}^0}(t) \simeq \frac{1}{4} \left( 1 + e^{-t/\tau_s} - 2 e^{-t/2\tau_s} \cos(\omega_s - \omega_l)t \right).$$

On constate qu'une particule initialement dans l'état  $K^0$  peut se transformer au cours du temps entre  $K^0$  et  $\bar{K}^0$  (Gell-Man et Pais, 1955). Cela permet de comprendre le cliché de chambre à bulles, car la réaction  $\bar{K}^0 + p \rightarrow \pi^+ + \Lambda^0$  est permise par interaction forte.





**Figure 4.7** Un méson  $K$  neutre ayant été créé dans l'état  $|K^0\rangle$  à l'instant  $t = 0$ , la probabilité de l'observer dans l'état  $|\bar{K}^0\rangle$  à un instant ultérieur présente une allure oscillante (figure en haut). L'axe horizontal  $t/\tau_c$  est proportionnel à la distance parcourue par le méson  $K^0$  initial. Le  $\bar{K}_0$  est identifié à ses produits de désintégration dans le mode  $3\pi$ . En bas on a représenté les probabilités de l'observer dans l'état  $|\bar{K}^0\rangle$  ou dans l'état  $|K_0\rangle$  à un instant ultérieur. La somme de ces deux contributions figure en pointillés, ce qui met en évidence la décroissance exponentielle (ici aux courts temps) due à la désintégration.

Pour des particules de faible énergie,  $E = \sqrt{|\mathbf{p}|^2 c^2 + m^2 c^4} \simeq mc^2$ . De la mesure de la période de pseudo-oscillations,  $T = 2\pi/(\omega_s - \omega_l) \simeq 5.10^{-10}\text{s}$ , on déduit la différence de masse entre les  $K^0$  court et long <sup>(20)</sup>,

$$E_s - E_l \simeq (m_s - m_l)c^2 = 2\pi\hbar/T \simeq 6.5 \cdot 10^{-6}\text{eV}.$$

Ce résultat est en fait très général : une faible différence de masse entre particules aux propriétés similaires assure un couplage entre elles et des oscillations entre différents états. C'est ce qui a été mis en évidence récemment (1998) avec l'expérience Super Kamiokande dans le cas des neutrinos électronique et muonique. Le couplage entre les deux états dans le cas du système  $K^0 - \bar{K}^0$  est assuré par leurs produits de désintégration.  $K_s^0$  peut se désintégrer dans le mode  $2\pi$  (état propre de  $\hat{C}\hat{P}$  avec la valeur propre  $+1$  <sup>(21)</sup>, comme  $K_s^0$ ), et  $K_l^0$  dans le mode  $3\pi$  (état propre de  $\hat{C}\hat{P}$  avec la valeur propre  $-1$ )

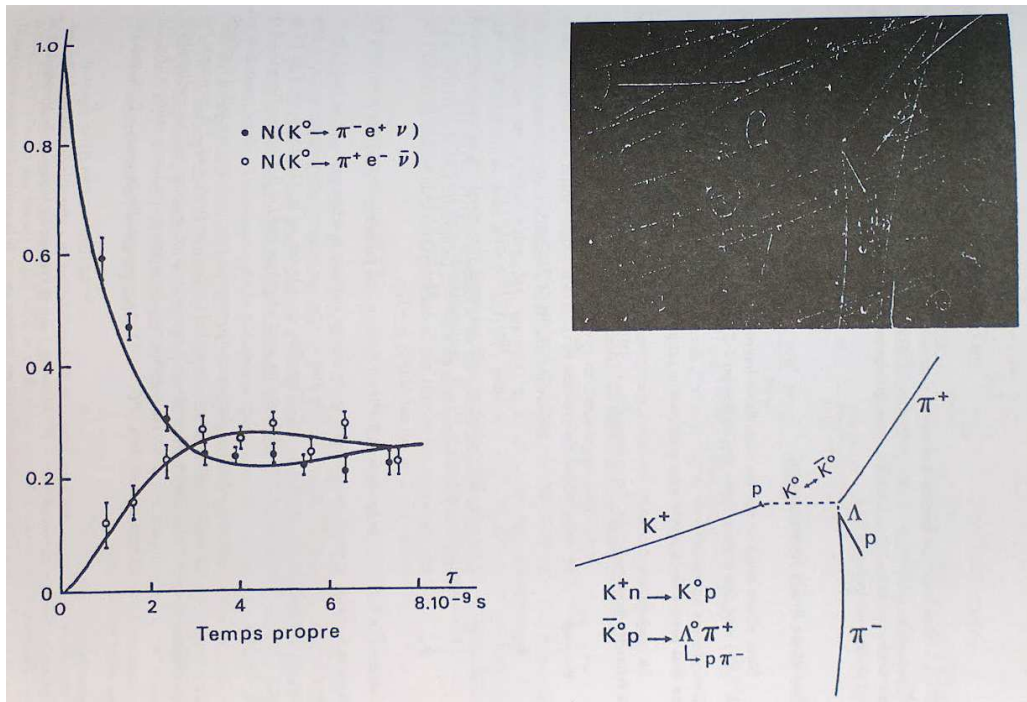
$$K_s^0 \rightarrow 2\pi^0, \quad \pi^+ + \pi^-, \quad K_l^0 \rightarrow +\pi^0, \quad \pi^+ + \pi^- + \pi^0.$$

Le processus dans le mode  $3\pi$  est bien entendu plus rare, d'où la plus grande durée de vie du  $K_l^0$ . Le couplage  $K^0 \longleftrightarrow \bar{K}^0$  est assuré par le mode  $2\pi$  par le biais de la composante  $K_s^0$ ,

$$K^0 \longleftrightarrow 2\pi \longleftrightarrow \bar{K}^0,$$

<sup>(20)</sup> Une valeur précise est en fait de  $3.49 \cdot 10^{-6}\text{eV}$ .

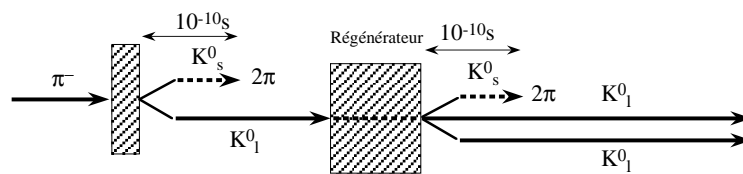
<sup>(21)</sup> Dans le cas des mésons  $\pi$  on a en effet  $\hat{P}|\pi^{\pm,0}\rangle = -|\pi^{\pm,0}\rangle$ ,  $\hat{C}|\pi^{\pm}\rangle = |\pi^{\mp}\rangle$  et  $\hat{C}|\pi^0\rangle = |\pi^0\rangle$ .



**Figure 4.8** Résultats expérimentaux sur les oscillations  $K^0 - \bar{K}^0$ . A droite figure un cliché de chambre à bulles dont la partie intéressante est détaillée au-dessous.

comme dans le cas d'un couplage par effet tunnel.

▷ *Symétrie PCT*. Il s'avère que la symétrie PC n'est finalement pas conservée par l'interaction faible. C'est ce qu'a montré l'expérience de Christianson, Cronin, Fitch et Turlay en 1964 au cours de laquelle a été mis en évidence un très faible rapport d'embranchement ( $\simeq 10^{-3}$ ) pour la désintégration du  $K_L^0$  dans le mode  $2\pi$ , ce qui ne conserve pas PC.



**Figure 4.9** Schéma de l'expérience de Christianson, Cronin, Fitch et Turlay. Un faisceau de mésons  $K_L^0$  interfère avec un second faisceau régénéré, ce qui prouve la violation de la symétrie PC.

On en déduit que  $|K_L^0\rangle$  et  $|K_S^0\rangle$ , états propres de l'interaction faible ne sont donc pas rigoureusement états propres de  $\hat{C}\hat{P}$ . Notons également que la brisure de la symétrie CP (ou T) par interaction faible n'a été observée jusqu'à présent que dans le cas du système  $K^0 - \bar{K}^0$ . On attend un effet comparable dans les mésons formés de quarks  $b$ .

Pour obtenir une véritable symétrie de l'interaction faible, il faut encore lui adjoindre le renversement du temps et on parle alors de la symétrie PCT. Dans le cas d'une particule au repos, cette symétrie se réduit à la symétrie particule-antiparticule au repos. Toutes deux doivent donc être décrites par la même équation

d'où l'on déduit qu'une particule et une antiparticule ont même masse et même durée de vie. En 1967 <sup>(22)</sup>, Andreï Sakharov a énoncé trois conditions qui doivent être satisfaites pour expliquer l'excédent de matière (sur l'antimatière) dans notre univers :

- i) une brisure de l'invariance par inversion du temps dans les interactions fondamentales (c'est le cas de l'interaction faible),
- ii) une phase de l'évolution de l'Univers où l'équilibre thermodynamique est rompu (ce serait le cas de la phase d'inflation),
- iii) un mécanisme qui dans les interactions fondamentales viole la conservation du nombre de baryons et peut donc changer le nombre net de quarks (qui n'est pas encore connu).

---

<sup>(22)</sup> Discussion empruntée à D. Sénéchal, *Physique subatomique*, [www.physique.usherbrooke.ca/~dsenech/SUB/](http://www.physique.usherbrooke.ca/~dsenech/SUB/).

**5****Invariance de jauge****Introduction : passage du discret au continu**

On considère un système discret de  $N$  corps en interaction, par exemple un système de masses identiques couplées par des ressorts de même raideur. On note  $\psi_n$  l'écart à la position d'équilibre de la masse située au site  $n$ . A l'équilibre, les masses sont distantes de  $a$ . En négligeant les effets de bords (il faudrait sinon préciser les conditions aux limites) la masse en  $n$  étant couplée à ses deux voisines, l'énergie potentielle élastique vaut  $\frac{1}{2}k(\psi_{n+1} - \psi_n)^2 + \frac{1}{2}k(\psi_n - \psi_{n-1})^2$ . Pour un système de  $N$  sites, on somme toutes les contributions

$$V = \frac{1}{2} \sum_n k(\psi_{n+1} - \psi_n)^2.$$

Pour l'énergie cinétique on a de même  $\frac{1}{2}m\dot{\psi}_n^2$  pour la contribution de la masse  $n$ , avec  $\dot{\psi} \equiv \frac{d\psi}{dt}$ , soit au total

$$T = \frac{1}{2} \sum_n m\dot{\psi}_n^2.$$

Le lagrangien du système est donné par

$$\begin{aligned} L(\{\psi_n(t)\}, \{\dot{\psi}_n(t)\}) &= T - V \\ &= \frac{1}{2} \sum_n a \left[ \frac{m}{a} \dot{\psi}_n^2 - ka \left( \frac{\psi_{n+1} - \psi_n}{a} \right)^2 \right]. \end{aligned}$$



La notation  $L(\{\psi_n(t)\}, \{\dot{\psi}_n(t)\})$  précise que le lagrangien dépend de l'ensemble des variables  $\psi_n(t)$  et de leurs dérivées temporelles. Le terme entre crochets joue le rôle d'une densité lagrangienne (ici par unité de longueur). On introduit la masse volumique (ici masse par unité de longueur)  $\mu = m/a$  et le module d'Young  $Y$ . Pour un corps élastique, la loi de Hooke stipule que l'allongement par unité de longueur  $\xi$  (ici  $\frac{\psi_{n+1} - \psi_n}{a}$ ) est proportionnel à la force appliquée  $F$ , soit  $F = Y\xi^{(23)}$ . Ce qui joue ici le rôle de force est le terme  $k(\psi_{n+1} - \psi_n)$ , soit  $Y = ka$ . On peut ré-exprimer le lagrangien comme

$$L(\{\psi_n(t)\}, \{\dot{\psi}_n(t)\}) = \frac{1}{2} \sum_n a \left[ \mu \dot{\psi}_n^2 - Y \left( \frac{\psi_{n+1} - \psi_n}{a} \right)^2 \right].$$

Introduisons maintenant la variable  $x = na$ . Dans la limite où  $a \rightarrow 0$  (c'est une variable microscopique),  $x$  devient une variable continue et les valeurs discrètes  $\psi_n(t)$  sont décrites par un champ continu  $\psi(x, t)$  :

$$\begin{aligned} \psi_n(t) &\rightarrow \psi(na, t) = \psi(x, t), \\ \psi_{n\pm 1}(t) &\rightarrow \psi((n \pm 1)a, t) = \psi(x \pm a, t). \end{aligned}$$

On peut développer  $\psi(x \pm a, t) = \psi(x, t) \pm a\psi'(x, t) + O(a^2)$  de sorte que le terme d'interaction dans le lagrangien fait apparaître une dérivée spatiale dans la limite continue :

$$\lim_{a \rightarrow 0} \frac{\psi_{n\pm 1} - \psi_n}{a} = \pm \psi'(x, t) = \pm \frac{d\psi}{dx}.$$

Dans le même temps, la somme devient une intégrale

$$\sum_n a \rightarrow \int dx$$

et le lagrangien prend la forme

$$L(\dot{\psi}(x, t), \psi'(x, t)) = \frac{1}{2} \int dx \left[ \mu \left( \frac{\partial \psi}{\partial t} \right)^2 - Y \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 \right].$$

On introduit souvent une notation abrégée pour les dérivées partielles,

$$\begin{aligned} L(\partial_t \psi, \partial_x \psi) &= \frac{1}{2} \int dx [\mu (\partial_t \psi)^2 - Y (\partial_x \psi)^2] \\ &= \int dx \mathcal{L}(\partial_t \psi, \partial_x \psi) \end{aligned}$$

où il est sous-entendu que  $\psi$  est un champ dépendant à la fois de la position et du temps. La quantité  $\mathcal{L}$  est une densité lagrangienne. Dans un cas plus général elle pourrait également dépendre de la valeur du champ lui-même,

$$\mathcal{L}(\psi(x, t), \partial_t \psi, \partial_x \psi).$$

<sup>(23)</sup> C'est l'approximation linéaire d'une relation générale entre  $F$  et  $\xi$ .

**Théorème de Noether**

En théorie des champs, on définit donc le lagrangien  $L$  à partir d'une densité lagrangienne

$$L = \int_{\mathbb{R}^3} \mathcal{L}(\psi, \dot{\psi}, \vec{\nabla}\psi) d^3r$$

où  $\psi(\mathbf{r}, t)$  est un champ qui varie dans l'espace et le temps. L'intégration porte sur l'espace  $\mathbb{R}^3$  ou sur une partie de cet espace dont la frontière est notée  $\partial\mathbb{R}^3$ . La dépendance en  $\vec{\nabla}\psi$  de la densité lagrangienne reflète l'existence d'interactions à courte portée. La minimisation de l'action

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{\mathbb{R}^3} \mathcal{L}(\psi, \dot{\psi}, \vec{\nabla}\psi) d^3r \equiv \int_{\Omega} \mathcal{L}(\psi, \dot{\psi}, \vec{\nabla}\psi) d^3r dt$$

conduit aux équations d'Euler-Lagrange si l'on a imposé des conditions assez douces aux variations de  $\psi$  aux limites  $\partial\mathbb{R}^3$  de  $\mathbb{R}^3$ . On effectue en effet la variation

$$\begin{aligned} \delta S = 0 = & \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{\mathbb{R}^3} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} \right) - \vec{\nabla} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\vec{\nabla}\psi)} \right) \right] \delta \psi \\ & + \left[ \int_{\mathbb{R}^3} d^3r \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} \delta \psi \right]_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} dt \oint_{\partial\mathbb{R}^3} d\mathbf{S} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\vec{\nabla}\psi)} \delta \psi \end{aligned}$$

et en supposant que les termes de bords sont tous nuls, il vient

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} \right) - \vec{\nabla} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\vec{\nabla}\psi)} \right) = 0.$$

Supposons maintenant une transformation, gouvernée par un paramètre  $\epsilon$ , au cours de laquelle les champs varient de  $\psi \rightarrow \psi + \delta\psi = \psi + \frac{\partial\psi}{\partial\epsilon} d\epsilon$  au premier ordre. Le lagrangien  $\mathcal{L}(\psi, \dot{\psi}, \vec{\nabla}\psi, \epsilon)$  varie de  $d\mathcal{L}$  sous l'effet des variations des champs, de leurs dérivées et éventuellement d'une dépendance explicite en  $\epsilon$  :

$$\begin{aligned} d\mathcal{L} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} \frac{\partial \psi}{\partial \epsilon} d\epsilon + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \psi}{\partial \epsilon} \right) d\epsilon + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\vec{\nabla}\psi)} \vec{\nabla} \left( \frac{\partial \psi}{\partial \epsilon} \right) d\epsilon + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \epsilon} d\epsilon \\ &= \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} \frac{\partial \psi}{\partial \epsilon} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \psi}{\partial \epsilon} \right) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\vec{\nabla}\psi)} \vec{\nabla} \left( \frac{\partial \psi}{\partial \epsilon} \right) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \epsilon} \right] d\epsilon. \end{aligned}$$

En remplaçant le premier terme par l'équation d'Euler-Lagrange, on obtient

$$d\mathcal{L} = \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} \frac{\partial \psi}{\partial \epsilon} \right) + \vec{\nabla} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\vec{\nabla}\psi)} \frac{\partial \psi}{\partial \epsilon} \right) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \epsilon} \right] d\epsilon.$$

Si la transformation générée par la variation du paramètre  $\epsilon$  est une symétrie du problème,  $\frac{d\mathcal{L}}{d\epsilon} = 0$ , ce qui s'écrit sous la forme

$$\frac{d\rho}{dt} + \vec{\nabla}\mathbf{j} = -\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\epsilon}$$

avec

$$\rho = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\psi}} \frac{\partial\psi}{\partial\epsilon}$$

$$\mathbf{j} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\vec{\nabla}\psi)} \frac{\partial\psi}{\partial\epsilon}.$$

C'est le théorème de Noether.

Dans le cas où le lagrangien n'a pas de dépendance explicite en fonction de la variable  $\epsilon$ , on en déduit l'équation de continuité

$$\frac{d\rho}{dt} + \vec{\nabla}\mathbf{j} = 0$$

qui correspond à la loi de conservation

$$\frac{dQ}{dt} = 0, \quad \text{avec} \quad Q = \int_{\mathbb{R}^3} \rho d^3r.$$

En effet, toujours avec l'hypothèse de champs qui s'annulent aux bords,

$$\frac{dQ}{dt} = - \int_{\mathbb{R}^3} \vec{\nabla}\mathbf{j} d^3r = - \oint_{\partial\mathbb{R}^3} \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} = 0.$$

A titre d'exemple considérons le cas où le paramètre  $\epsilon$  est le temps. On peut alors regrouper les dérivées totales par rapport au temps pour écrire

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\psi}} \dot{\psi} - \mathcal{L} \right] + \vec{\nabla} \left[ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\vec{\nabla}\psi)} \dot{\psi} \right] = -\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial t}.$$

Si la densité lagrangienne ne dépend pas explicitement du temps, on en déduit que la quantité conservée est l'énergie totale,

$$\frac{dH}{dt} = 0$$

avec

$$H = \int_{\mathbb{R}^3} \mathcal{H} d^3r,$$

$$\mathcal{H} = \pi\dot{\psi} - \mathcal{L},$$

$$\pi = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\psi}}.$$

En effet, dans ce cas on a  $\rho = \pi\dot{\psi}$  et la densité hamiltonienne apparaît par le terme  $\rho - \mathcal{L}$ . La conservation de l'énergie apparaît comme une conséquence de l'invariance dans la transformation  $t \rightarrow t + dt$ , c'est-à-dire la translation dans le temps.

### Invariance de jauge en électromagnétisme classique

L'équation de Maxwell pour les charges magnétiques

$$\vec{\nabla} \mathbf{B} = 0$$

permet d'écrire la champ magnétique sous la forme

$$\mathbf{B} = \vec{\nabla} \wedge \mathbf{A}$$

ce qui assure que  $\mathbf{B}$  est à divergence nulle ( $\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \wedge \mathbf{A}) \equiv 0$ ). Si l'on ajoute au potentiel vecteur un gradient arbitraire (changement de jauge),

$$\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A} + \vec{\nabla} \Lambda$$

le champ magnétique est inchangé car le rotationnel d'un gradient est identiquement nul,  $\vec{\nabla} \wedge (\mathbf{A} + \vec{\nabla} \Lambda) = \vec{\nabla} \wedge \mathbf{A} = \mathbf{B}$ . De manière similaire, de la loi de Faraday-Lenz

$$\vec{\nabla} \wedge \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

écrite sous la forme

$$\vec{\nabla} \wedge \left( \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0$$

invite à écrire

$$\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\vec{\nabla} \phi.$$

Le changement de jauge introduit ci-dessus pour le potentiel vecteur doit donc s'accompagner d'un changement de jauge pour le potentiel scalaire afin de préserver le champ électrique inchangé, comme le champ magnétique,

$$\phi \rightarrow \phi - \frac{\partial \Lambda}{\partial t}.$$

### Invariance de jauge globale

▷ *Lagrangien de Schrödinger*. La densité lagrangienne de Schrödinger (due à Jordan-Wigner) est donnée par

$$\mathcal{L}(\psi, \dot{\psi}, \psi^*, \dot{\psi}^*, \vec{\nabla} \psi, \vec{\nabla} \psi^*) = i\hbar \dot{\psi}^* \dot{\psi} - \frac{\hbar^2}{2m} (\vec{\nabla} \psi^*) \cdot (\vec{\nabla} \psi) - V(\mathbf{r}, t) \psi^* \psi$$

Ce n'est pas une quantité hermitienne. Les champs  $\psi$  et  $\psi^*$  sont fonction de l'espace et du temps,  $\psi = \psi(\mathbf{r}, t)$ . Par application des équations d'Euler-Lagrange à  $\psi$ , on obtient

$$-i\hbar \dot{\psi}^* = -\frac{\hbar^2}{2m} \vec{\nabla}^2 \psi^* + V(\mathbf{r}, t) \psi^*$$

et par application à  $\psi^*$ ,

$$i\hbar\dot{\psi} = -\frac{\hbar^2}{2m}\vec{\nabla}^2\psi + V(\mathbf{r}, t)\psi,$$

c'est-à-dire l'équation de Schrödinger et sa conjuguée. Le moment canonique est donné par

$$\pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} = i\hbar\psi^*$$

et la densité hamiltonienne

$$\mathcal{H} = \pi\dot{\psi} - \mathcal{L} = \frac{-i\hbar}{2m}(\vec{\nabla}\pi) \cdot (\vec{\nabla}\psi) - \frac{i}{\hbar}V(\mathbf{r}, t)\pi\psi.$$

L'hamiltonien (classique) total vaut

$$H = \int \left[ \frac{\hbar^2}{2m}(\vec{\nabla}\psi^*) \cdot (\vec{\nabla}\psi) + V(\mathbf{r}, t)\psi^*\psi \right] d^3r.$$

Par intégration par parties du premier terme on obtient la forme habituelle

$$H = \int \psi^* \left[ -\frac{\hbar^2}{2m}\vec{\nabla}^2 + V(\mathbf{r}, t) \right] \psi d^3r = \langle \psi | \hat{H} | \psi \rangle.$$

On retrouve ainsi l'élément de matrice de l'Hamiltonien de Schrödinger dans l'état  $|\psi\rangle$ , résultat finalement très naturel.

▷ *Conservation de la charge électrique.* Considérons la transformation qui modifie la fonction d'onde par un facteur de phase globale

$$\psi(\mathbf{r}, t) \rightarrow \psi'(\mathbf{r}, t) = e^{-i\frac{q}{\hbar}\alpha}\psi(\mathbf{r}, t).$$

Cette transformation n'affecte pas les propriétés physiques qui dépendent du module de la fonction d'onde et pas de sa phase,  $|\psi'(\mathbf{r}, t)| = |\psi(\mathbf{r}, t)|$ . De l'expression  $d\psi(\mathbf{r}, t) = -i\frac{q}{\hbar}\psi(\mathbf{r}, t)d\alpha$ , on déduit à l'aide du théorème de Noether que la quantité suivante est conservée,

$$\int_{\mathbb{R}^3} \rho(\mathbf{r}, t) d^3r = \int_{\mathbb{R}^3} q|\psi(\mathbf{r}, t)|^2 d^3r.$$

À ce niveau,  $q$  n'est encore qu'un scalaire que nous identifierons à la charge électrique de la particule représentée par la fonction d'onde (la densité de probabilité de présence de cette particule est  $|\psi(\mathbf{r}, t)|^2$ ).

### Invariance de jauge locale

▷ *Couplage minimal.* La question qui se pose ensuite est la conséquence d'un changement de phase local, c'est-à-dire fonction de l'espace et du temps,  $\alpha(\mathbf{r}, t)$ . Soit la transformation

$$\psi(\mathbf{r}, t) \rightarrow \psi'(\mathbf{r}, t) = e^{-i\frac{q}{\hbar}\alpha(\mathbf{r}, t)}\psi(\mathbf{r}, t).$$

Calculons

$$\frac{1}{2m}\hat{\mathbf{p}}^2\psi'(\mathbf{r}, t) - i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi'(\mathbf{r}, t).$$

On développe tout d'abord le premier terme,

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{p}}^2\psi'(\mathbf{r}, t) &= (-i\hbar\vec{\nabla})^2\psi'(\mathbf{r}, t) \\ &= -\hbar^2\vec{\nabla}\left[-i\frac{q}{\hbar}(\vec{\nabla}\alpha)\psi e^{-i\frac{q}{\hbar}\alpha} + (\vec{\nabla}\psi) e^{-i\frac{q}{\hbar}\alpha}\right] \\ &= -\hbar^2\left[-i\frac{q}{\hbar}(\vec{\nabla}^2\alpha)\psi - 2i\frac{q}{\hbar}(\vec{\nabla}\alpha)(\vec{\nabla}\psi) - \frac{q^2}{\hbar^2}(\vec{\nabla}\alpha)^2\psi + \vec{\nabla}^2\psi\right] e^{-i\frac{q}{\hbar}\alpha} \\ &= [-\hbar^2\vec{\nabla}^2\psi + i\hbar q\vec{\nabla}(\psi\vec{\nabla}\alpha) + i\hbar q(\vec{\nabla}\alpha)\vec{\nabla}\psi + q^2(\vec{\nabla}\alpha)^2\psi] e^{-i\frac{q}{\hbar}\alpha}.\end{aligned}$$

Cette expression rappelle immédiatement l'expression de l'énergie cinétique d'une particule chargée sous champ

$$\frac{1}{2m}\hat{\mathbf{p}}^2 \rightarrow \frac{1}{2m}(-\hbar^2\vec{\nabla}^2 + iq\hbar\vec{\nabla}(\mathbf{A}\cdot) + iq\hbar\mathbf{A}\vec{\nabla} + q^2\mathbf{A}^2)$$

et suggère donc de poser pour identifier les deux expressions

$$\vec{\nabla}\alpha(\mathbf{r}, t) = \mathbf{A}(\mathbf{r}, t).$$

Le potentiel vecteur apparaît ainsi généré par l'action de  $\hat{\mathbf{p}}$  sur la jauge locale. Pour la dérivée temporelle on obtient

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi'(\mathbf{r}, t) = \left[i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(\mathbf{r}, t) + q\frac{\partial\alpha}{\partial t}\psi(\mathbf{r}, t)\right] e^{-i\frac{q}{\hbar}\alpha}$$

que l'on identifie à l'hamiltonien d'une charge dans un potentiel scalaire,

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - q\phi$$

moyennant la correspondance

$$\frac{\partial\alpha(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = -\phi(\mathbf{r}, t)$$

qui montre que c'est la dérivée temporelle qui génère le potentiel scalaire.

▷ *L'invariance de jauge comme principe dynamique.* Finalement, en supposant satisfaite l'équation de Schrödinger pour une particule libre avec la fonction d'onde  $\psi'(\mathbf{r}, t)$ ,

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi'(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2m}\hat{\mathbf{p}}^2\psi'(\mathbf{r}, t),$$

où  $\psi$  se déduit de la transformation de jauge locale

$$\psi(\mathbf{r}, t) \rightarrow \psi'(\mathbf{r}, t) = e^{-i\frac{q}{\hbar}\alpha(\mathbf{r}, t)}\psi(\mathbf{r}, t)$$

on obtient que la fonction d'onde originale obéit à l'équation de Schrödinger sous champ

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2m}(\hat{\mathbf{p}} - q\mathbf{A})^2\psi(\mathbf{r}, t) + q\phi\psi(\mathbf{r}, t),$$

moyennant la correspondance

$$\begin{aligned}\vec{\nabla}\alpha(\mathbf{r}, t) &= \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \\ \frac{\partial\alpha(\mathbf{r}, t)}{\partial t} &= -\phi(\mathbf{r}, t).\end{aligned}$$

Il faut noter qu'aux transformations des potentiels qui assurent l'invariance de jauge de l'électromagnétisme classique, il faut ajouter la transformation de la fonction d'onde pour préserver l'invariance de jauge en théorie quantique <sup>(24)</sup>,

$$\begin{aligned}\mathbf{A} &\rightarrow \mathbf{A} + \vec{\nabla}\Lambda \\ \phi &\rightarrow \phi - \frac{\partial\Lambda}{\partial t} \\ \psi(\mathbf{r}, t) &\rightarrow e^{-i\frac{q}{\hbar}\Lambda(\mathbf{r}, t)}\psi(\mathbf{r}, t).\end{aligned}$$

On constate que le couplage avec le champ électromagnétique apparaît comme le résultat de l'invariance de jauge locale c'est-à-dire que la symétrie implique la dynamique. On peut citer Salam et Ward <sup>(25)</sup>

*Our basic postulate is that it should be possible to generate strong, weak and electromagnetic interaction terms (...) by making local gauge transformations on the kinetic-energy terms of the free Lagrangian.*

La transformation précédente est appelée couplage minimal. On définit les opérateurs de dérivée covariante <sup>(26)</sup>

$$\begin{aligned}\vec{\mathcal{D}} &= \vec{\nabla} - i\frac{q}{\hbar}\mathbf{A} \\ \mathcal{D}_t &= \partial_t + i\frac{q}{\hbar}\phi\end{aligned}$$

qui permettent d'écrire l'équation sous champ de manière analogue à l'équation de la particule libre,

$$i\hbar\mathcal{D}_t\psi(\mathbf{r}, t) = -\frac{\hbar^2}{2m}(\vec{\mathcal{D}})^2\psi(\mathbf{r}, t).$$

<sup>(24)</sup> On reprend la notation  $\Lambda(\mathbf{r}, t)$  pour la fonction qui produit le changement de jauge.

<sup>(25)</sup> Voir à ce propos hep-lat/0001283.

<sup>(26)</sup> On écrit aussi

$$-i\hbar\vec{\mathcal{D}} = -i\hbar\vec{\nabla} - q\mathbf{A} \quad \text{et} \quad i\hbar\mathcal{D}_t = i\hbar\partial_t - q\phi$$

**6****Symétries internes****Lois de conservation et règles de sélection**

On constate expérimentalement que certaines réactions inélastiques entre particules élémentaires ne se produisent pas, alors que d'autres processus, a priori très similaires, existent. De manière évidente, une réaction telle que  $\pi^- + n \rightarrow \Lambda^0 + K^0$  est exclue car elle ne conserve pas la charge électrique, loi de conservation fondamentale à laquelle nous sommes habitués. La réaction  $\pi^- + p \rightarrow \Lambda^0 + K^0$  est en revanche observée expérimentalement, mais  $K^0 + p \rightarrow \Lambda^0 + \pi^+$  ne l'est jamais. Il existe vraisemblablement un mécanisme fondamental à l'origine de cette interdiction, comme la violation de la loi de conservation d'une quantité à définir. De manière parfois moins dramatique, des réactions semblables se produisent avec des taux très différents. La réaction  $p + p \rightarrow \pi^+ + d$  par exemple est deux fois plus fréquente que la réaction  $p + n \rightarrow \pi^0 + d$ .

Les lois de conservation permettent de s'y retrouver dans la complexité du monde des particules élémentaires, mais la nature n'est pas pour autant totalement simple. Ainsi des lois de conservation peuvent être respectées par certaines interactions fondamentales et pas par d'autres. Au-delà de l'interdiction de certains processus, lorsqu'une quantité n'est pas conservée par une interaction, des prédictions sont toutefois possibles en termes de règles de sélection.

**Symétries globales**

▷ *Charge électrique.* La conservation de la charge électrique est observée à l'échelle macroscopique. Il est naturel de la supposer satisfaite également au niveau microscopique. Si ce n'était pas le cas, on devrait observer des désintégrations d'électrons par exemple en particules plus légères, des photons ou des neutrinos, et ces désintégrations ne sont bien entendu pas observées. Nous avons vu comment l'application du théorème de Noether conduisait à la conservation de la charge



électrique. De manière plus précise, c'est l'invariance de l'hamiltonien par la transformation de jauge globale

$$|\psi\rangle \rightarrow |\psi'\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}q\alpha}|\psi\rangle$$

qui entraîne la loi de conservation

$$[\hat{Q}, \hat{H}] = 0$$

où  $\hat{Q}$  est l'opérateur de charge qui à tout état  $|\psi\rangle$  associé à une particule de charge  $q$  fait correspondre l'état  $q|\psi\rangle$ .

▷ *Charge leptonique.* D'autres lois de conservation extrêmement générales sont observées au niveau microscopique, comme la conservation du nombre de leptons dans toutes les réactions (diffusions, désintégrations, ...) entre particules élémentaires. On est ainsi amené à supposer l'existence d'un opérateur de charge leptonique  $\hat{L}$  qui à tout état  $|\psi\rangle$  associé à une particule de charge leptonique  $l$  fait correspondre l'état  $l|\psi\rangle$ . Le nombre leptonique vaut +1 pour les leptons ( $e^-$ ,  $\nu_e$ ,  $\mu^-$ ,  $\nu_\mu$ ,  $\tau^-$  et  $\nu_\tau$ ) et -1 pour les antileptons. Il est nul pour les autres particules. Pour chaque interaction (électromagnétique, faible, forte) la conservation de ce nombre est associée à l'invariance de l'hamiltonien par la transformation de jauge globale

$$|\psi\rangle \rightarrow |\psi'\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}l\alpha}|\psi\rangle$$

qui entraîne la loi de conservation

$$[\hat{L}, \hat{H}] = 0.$$

De manière encore plus précise, on définit des nombres quantiques leptonique électronique, muonique et tauonique qui sont conservés séparément par toutes les interactions. Ils sont définis simplement, par exemple le nombre leptonique muonique  $l_\mu$  vaut +1 pour  $\mu^-$ ,  $\nu_\mu$ , -1 pour  $\mu^+$ ,  $\bar{\nu}_\mu$  et zéro pour toutes les autres particules.

▷ *Charge baryonique.* Le proton est une particule remarquablement stable (de durée de vie supérieure à  $10^{31}$  années). Pour justifier le fait qu'il ne se désintègre pas en particules plus légères, on suppose l'existence d'un nouveau nombre quantique conservé, la charge baryonique, qui est telle que le proton possède une charge baryonique  $b$  non nulle (par exemple +1), mais les mésons plus légers, mésons pi par exemple, en soient dépourvus. Les réactions connues sont compatibles avec l'attribution d'un nombre baryonique +1 pour les baryons, -1 pour les antibaryons, et nul pour les mésons :

$$b = +1 : p, n, \Lambda^0, \Sigma^\pm, \Sigma^0, \Xi^0, \Xi^-, \Omega^-, \dots$$

$$b = 0 : \pi^\pm, \pi^0, K^\pm, K^0, \bar{K}^0, \rho, \dots$$

De même, les quarks ont une charge baryonique +1/3 et les antiquarks -1/3. La loi de conservation est associée à l'invariance sous changement de jauge global

$$|\psi\rangle \rightarrow |\psi'\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}b\alpha}|\psi\rangle$$

qui entraîne la loi de conservation

$$[\hat{B}, \hat{H}] = 0.$$

**Isospin**

▷ *Conservation de l'isospin par interaction forte.* En 1933 Heisenberg a introduit la notion d'isospin consistant à traiter le proton et le neutron comme deux états quantiques d'une seule particule, le nucléon. Ce formalisme s'est avéré très fructueux dans l'étude des réactions entre particules élémentaires régies par des mécanismes d'interactions fortes et il a été par la suite généralisé aux autres particules.

Le proton ( $p$ ) et le neutron ( $n$ ) peuvent être considérés comme les deux états d'une même particule, le nucléon ( $N$ ) auquel on attribue (par analogie avec le spin) un isospin  $\frac{1}{2}$  (On dit que le nucléon est un doublet d'isospin). On construit alors un opérateur  $\hat{\mathbf{I}}(\hat{I}_1, \hat{I}_2, \hat{I}_3)$  ayant les propriétés d'un moment cinétique tel que  $|p\rangle$  et  $|n\rangle$  soient les deux états propres communs de  $\hat{I}_3$  et  $\hat{\mathbf{I}}^2 = \hat{I}_1^2 + \hat{I}_2^2 + \hat{I}_3^2$ :

$$\hat{\mathbf{I}}^2|\pi\rangle = \frac{3}{4}|\pi\rangle \quad \text{et} \quad \hat{I}_3|p\rangle = \frac{1}{2}|p\rangle, \quad \hat{I}_3|n\rangle = -\frac{1}{2}|n\rangle$$

Le méson  $\pi$  (ou pion) est le boson médiateur de l'interaction forte entre nucléons, responsable en particulier de la cohésion des noyaux. (Il fut introduit théoriquement par Yukawa en 1935 et découvert expérimentalement en 1947.) Il peut exister sous trois formes  $\pi^+$ ,  $\pi^0$  et  $\pi^-$ , ce qui conduit à lui attribuer un isospin 1 représenté par l'opérateur  $\hat{J}_3$  dont les trois états  $|\pi^+\rangle$ ,  $|\pi^0\rangle$  et  $|\pi^-\rangle$  sont vecteurs propres,

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{J}}^2|\pi^{\pm 0}\rangle &= 2|\pi^{\pm 0}\rangle \\ \hat{J}_3|\pi^+\rangle &= +1|\pi^+\rangle = |\pi^+\rangle \\ \hat{J}_3|\pi^0\rangle &= 0|\pi^0\rangle = 0 \\ \hat{J}_3|\pi^-\rangle &= -1|\pi^-\rangle = -|\pi^-\rangle. \end{aligned}$$

et on définit les opérateurs échelle  $\hat{J}_{\pm} = \hat{J}_1 \pm i\hat{J}_2$ . Rappelons que de manière générale on a :

$$\hat{J}_{\pm}|j m\rangle = \sqrt{j(j+1) - m(m \pm 1)}|j m \pm 1\rangle,$$

soit ici

$$\begin{aligned} \hat{J}_+|1 m\rangle &= \sqrt{2 - m(m+1)}|1 m+1\rangle \\ \hat{J}_-|1 m\rangle &= \sqrt{2 - m(m-1)}|1 m-1\rangle \end{aligned}$$

où  $m = 1, 0, -1$  pour  $\pi^+$ ,  $\pi^0$  et  $\pi^-$  :

$$\begin{cases} \hat{J}_+|\pi^+\rangle = 0 \\ \hat{J}_+|\pi^0\rangle = \sqrt{2}|\pi^+\rangle \\ \hat{J}_+|\pi^-\rangle = \sqrt{2}|\pi^0\rangle \end{cases} \quad \begin{cases} \hat{J}_-|\pi^+\rangle = \sqrt{2}|\pi^0\rangle \\ \hat{J}_-|\pi^0\rangle = \sqrt{2}|\pi^-\rangle \\ \hat{J}_-|\pi^-\rangle = 0. \end{cases}$$

Les états propres de l'isospin total sont déterminés en utilisant les règles habituelles d'addition des moments cinétiques. On dispose de 6 états de départ :

$$|\pi^+p\rangle, |\pi^+n\rangle, |\pi^0p\rangle, |\pi^0n\rangle, |\pi^-p\rangle, |\pi^-n\rangle.$$

L'addition d'un isospin 1 et d'un isospin  $\frac{1}{2}$  conduit à :

- un quadruplet d'isospin  $\frac{3}{2}$  ( $1 + 1/2$ ),
- un doublet d'isospin  $\frac{1}{2}$  ( $1 - 1/2$ ).

L'opérateur d'isospin total  $\hat{\mathbf{K}} = \hat{\mathbf{J}} + \hat{\mathbf{I}}$  admet pour états propres communs à  $\hat{\mathbf{K}}^2$  et  $\hat{K}_3$  des vecteurs de la forme :

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{K}}^2 |k m\rangle &= k(k+1) |k m\rangle, \\ \hat{K}_3 |k m\rangle &= m |k m\rangle,\end{aligned}$$

avec  $-k \leq m \leq +k$  et  $k = 3/2$  pour les états du quadruplet et  $k = 1/2$  pour ceux du doublet.

- quadruplet d'isospin  $\frac{3}{2}$  :

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{K}}^2 \left| \frac{3}{2} m \right\rangle &= \frac{15}{4} \left| \frac{3}{2} m \right\rangle, \\ \hat{K}_3 \left| \frac{3}{2} m \right\rangle &= m \left| \frac{3}{2} m \right\rangle.\end{aligned}$$

On cherche un état évident appartenant à ce multiplet et on génère les autres au moyen des opérateurs échelle. À l'évidence,  $|\pi^+ p\rangle$  est état propre correspondant à  $m = \frac{3}{2}$  :

$$\hat{K}_3 |\pi^+ p\rangle = (\hat{J}_3 + \hat{I}_3) |\pi^+ p\rangle = 1 |\pi^+ p\rangle + \frac{1}{2} |\pi^+ p\rangle = \frac{3}{2} |\pi^+ p\rangle.$$

Afin de se convaincre que cet état convient bien, on peut calculer  $\hat{\mathbf{K}}^2 |\pi^+ p\rangle$  :

$$\hat{\mathbf{K}}^2 = \hat{K}_3^2 + \frac{1}{2} (\hat{K}_+ \hat{K}_- + \hat{K}_- \hat{K}_+)$$

et  $\hat{K}_\pm = \hat{J}_\pm + \hat{I}_\pm$ .

$$\hat{\mathbf{K}}^2 |\pi^+ p\rangle = \left[ \frac{1}{2} (\hat{K}_+ (\hat{J}_- + \hat{I}_-) + \hat{K}_- (\hat{J}_+ + \hat{I}_+)) + \hat{J}_3^2 + \hat{I}_3^2 + 2\hat{J}_3 \hat{I}_3 \right] |\pi^+ p\rangle = \frac{15}{4} |\pi^+ p\rangle.$$

On a donc  $|\pi^+ p\rangle = \left| \frac{3}{2} \frac{3}{2} \right\rangle$ . En comparant l'action de  $\hat{K}_-$  sur chaque membre :

$$\hat{K}_- \left| \frac{3}{2} \frac{3}{2} \right\rangle = \sqrt{\frac{3}{2} \left( \frac{3}{2} + 1 \right) - \frac{3}{2} \left( \frac{3}{2} - 1 \right)} \left| \frac{3}{2} \frac{1}{2} \right\rangle = \sqrt{3} \left| \frac{3}{2} \frac{1}{2} \right\rangle,$$

$$\hat{K}_- |\pi^+ p\rangle = |\pi^+ n\rangle + \sqrt{2} |\pi^0 p\rangle$$

on obtient :

$$\left| \frac{3}{2} \frac{1}{2} \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} |\pi^+ n\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}} |\pi^0 p\rangle.$$

En réitérant le procédé, on construit le quadruplet :

$$\begin{cases} \left| \frac{3}{2} \frac{3}{2} \right\rangle &= |\pi^+ p\rangle, \\ \left| \frac{3}{2} \frac{1}{2} \right\rangle &= \sqrt{\frac{2}{3}} |\pi^0 p\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}} |\pi^+ n\rangle, \\ \left| \frac{3}{2} -\frac{1}{2} \right\rangle &= \sqrt{\frac{2}{3}} |\pi^0 n\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}} |\pi^- p\rangle, \\ \left| \frac{3}{2} -\frac{3}{2} \right\rangle &= |\pi^- n\rangle. \end{cases}$$

• doublet d'isospin  $\frac{1}{2}$  : En procédant par analogie avec ce qui précède, on constate que les états du doublet d'isospin ne peuvent faire intervenir que les quatre états  $|\pi^+ n\rangle$ ,  $|\pi^0 p\rangle$ ,  $|\pi^- p\rangle$  et  $|\pi^0 n\rangle$  et qu'ils doivent être orthogonaux aux états du quadruplet :

$$\left| \frac{1}{2} \frac{1}{2} \right\rangle = a |\pi^+ n\rangle + b |\pi^0 p\rangle, \quad \left( \frac{3}{2} \frac{1}{2} \left| \frac{1}{2} \frac{1}{2} \right\rangle \right) = 0 = \frac{1}{\sqrt{3}} a + \sqrt{\frac{2}{3}} b$$

soit par normalisation :

$$\begin{cases} \left| \frac{1}{2} \frac{1}{2} \right\rangle &= \sqrt{\frac{2}{3}} |\pi^+ n\rangle - \frac{1}{\sqrt{3}} |\pi^0 p\rangle, \\ \left| \frac{1}{2} -\frac{1}{2} \right\rangle &= \sqrt{\frac{2}{3}} |\pi^- p\rangle - \frac{1}{\sqrt{3}} |\pi^0 n\rangle. \end{cases}$$

Les relations précédentes peuvent s'inverser. Exprimons par exemple l'état  $|\pi^- p\rangle$  dans la base des états propres d'isospin : ce vecteur intervient dans  $\left| \frac{3}{2} -\frac{1}{2} \right\rangle$  et  $\left| \frac{1}{2} -\frac{1}{2} \right\rangle$ . Pour éliminer  $|\pi^0 n\rangle$  qui intervient dans les mêmes expressions, on calcule

$$\left| \frac{3}{2} -\frac{1}{2} \right\rangle - \sqrt{2} \left| \frac{1}{2} -\frac{1}{2} \right\rangle = \sqrt{3} |\pi^- p\rangle$$

d'où l'expression de  $|\pi^- p\rangle$ . On obtient ainsi les combinaisons linéaires suivantes :

$$\begin{cases} |\pi^+ p\rangle &= \left| \frac{3}{2} \frac{3}{2} \right\rangle, \\ |\pi^+ n\rangle &= \frac{1}{\sqrt{3}} \left| \frac{3}{2} \frac{1}{2} \right\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}} \left| \frac{1}{2} \frac{1}{2} \right\rangle, \\ |\pi^0 p\rangle &= \sqrt{\frac{2}{3}} \left| \frac{3}{2} \frac{1}{2} \right\rangle - \frac{1}{\sqrt{3}} \left| \frac{1}{2} \frac{1}{2} \right\rangle, \\ |\pi^0 n\rangle &= \sqrt{\frac{2}{3}} \left| \frac{3}{2} -\frac{1}{2} \right\rangle - \frac{1}{\sqrt{3}} \left| \frac{1}{2} -\frac{1}{2} \right\rangle, \\ |\pi^- p\rangle &= \sqrt{\frac{2}{3}} \left| \frac{1}{2} -\frac{1}{2} \right\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}} \left| \frac{3}{2} -\frac{1}{2} \right\rangle, \\ |\pi^- n\rangle &= \left| \frac{3}{2} -\frac{3}{2} \right\rangle. \end{cases}$$

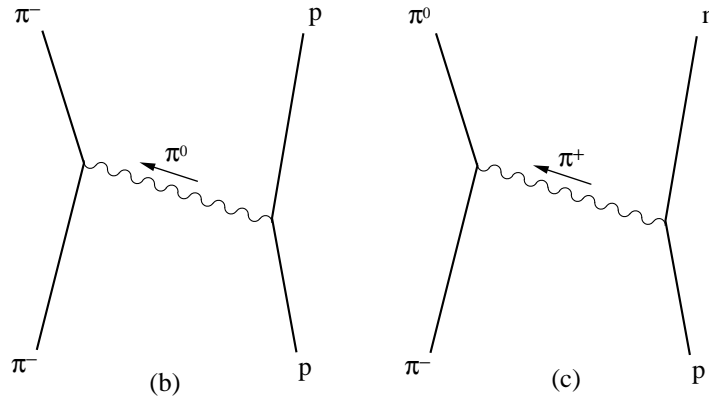
Expérimentalement on constate que l'interaction forte conserve l'isospin, c'est-à-dire qu'un processus régi par cette interaction ne modifie ni la valeur propre de  $\hat{\mathbf{K}}^2$  ni celle de  $\hat{K}_3$ . Cela signifie que l'opérateur décrivant l'interaction possède les propriétés de commutation :

$$[\mathcal{H}_{\text{int}}, \hat{\mathbf{K}}^2] = [\mathcal{H}_{\text{int}}, \hat{K}_3] = 0.$$

En d'autres termes, seules sont permises les transitions du type  $|k m\rangle \rightarrow |k' m'\rangle$  avec  $k' = k$  et  $m' = m$ . L'amplitude est par ailleurs indépendante de  $m$ . Il y a donc une amplitude caractéristique de chaque multiplet  $a_{3/2}$  et  $a_{1/2}$ .

On peut maintenant estimer les rapports d'amplitudes de transition. Considérons par exemple les collisions (b) et (c). Dans les deux cas, l'état initial est décrit par le ket d'entrée  $|\psi(0)\rangle = |\pi^- p\rangle_{\text{in}}$ . L'interaction ayant une durée très brève ( $dt$ ), l'état final  $|\psi(dt)\rangle$  s'obtient en faisant agir l'opérateur d'évolution infinitésimal  $\hat{U}_{\text{int}} = \mathbb{1} - \frac{i}{\hbar} \mathcal{H}_{\text{int}} dt$  sur l'état initial :  $|\psi(dt)\rangle = \hat{U}_{\text{int}} |\psi(0)\rangle$ . Plusieurs processus conduisant à des états finals différents (chacun étant caractérisé par sa propre amplitude) sont possibles, ici par exemple les états de sortie peuvent être de la forme  $\pi^- - p$  ou  $\pi^0 - n$  de sorte que  $|\psi(dt)\rangle = \mathcal{A}_b |\pi^- p\rangle_{\text{out}} + \mathcal{A}_c |\pi^0 n\rangle_{\text{out}}$ . Par définition, l'amplitude de probabilité de trouver  $\pi^- - p$  comme état de sortie (processus (b)), est donnée par le poids statistique de  $|\pi^- p\rangle_{\text{out}}$  dans l'état final, soit,

$$\mathcal{A}_b = {}_{\text{out}}\langle \pi^- p | \psi(dt) \rangle = {}_{\text{out}}\langle \pi^- p | \hat{U}_{\text{int}} | \pi^- p \rangle_{\text{in}}$$



**Figure 6.1** La collision  $\pi^- - p$  peut produire des états finals  $\pi^- - p$  (amplitude  $\mathcal{A}_b$ ),  $\pi^0 - n$  (amplitude  $\mathcal{A}_c$ )... Chaque processus est représenté par un diagramme de Feynman où l'état initial est en bas, la direction temporelle est verticale, orientée vers le haut. De nombreux processus peuvent être permis, chacun ayant un poids statistique proportionnel à l'amplitude qui lui est associée dans l'état final :  $|\psi(dt)\rangle = \hat{U}_{\text{int}} |\pi^- p\rangle_{\text{in}} = \mathcal{A}_b |\pi^- p\rangle_{\text{out}} + \mathcal{A}_c |\pi^0 n\rangle_{\text{out}} \dots$

En remplaçant  $\hat{U}_{\text{int}}$  en fonction de l'hamiltonien, on obtient :

$$\mathcal{A}_b = {}_{\text{out}}\langle \pi^- p | \mathbb{1} - \frac{i}{\hbar} \mathcal{H}_{\text{int}} dt | \pi^- p \rangle_{\text{in}} = {}_{\text{out}}\langle \pi^- p | \pi^- p \rangle_{\text{in}} - \frac{i}{\hbar} dt {}_{\text{out}}\langle \pi^- p | \hat{\mathcal{H}}_{\text{int}} | \pi^- p \rangle_{\text{in}}$$

où le premier produit scalaire est nul car les états d'entrée et de sortie, même s'ils sont ici notés de la même manière, sont orthogonaux à cause des transferts d'énergie et d'impulsion au cours de la collision. On obtient finalement par unité de temps (on exprimera désormais les amplitudes par unité de temps, c'est-à-dire en omettant les facteurs  $dt$ ) :

$$i\hbar \mathcal{A}_b = {}_{\text{out}}\langle \pi^- p | \mathcal{H}_{\text{int}} | \pi^- p \rangle_{\text{in}}$$

ce qui correspond à un terme que l'on peut représenter par un diagramme de Feynman. Comme l'hamiltonien commute avec l'isospin, la base adaptée au calcul des amplitudes d'interaction forte est la base des états propres d'isospin.

- Réactions de diffusion :

$$(a) \quad \pi^+ + p \longrightarrow \pi^+ + p$$

$$(b) \quad \pi^- + p \longrightarrow \pi^- + p$$

L'amplitude de transition associée à la première de ces diffusions s'évalue très simplement puisque  $|\pi^+ p\rangle$  est état propre de l'isospin total :

$$i\hbar\mathcal{A}_a = {}_{\text{out}}\langle\pi^+ p|\mathcal{H}_{\text{int}}|\pi^+ p\rangle_{\text{in}} = \left(\frac{3}{2} \frac{3}{2} \middle| \mathcal{H}_{\text{int}} \middle| \frac{3}{2} \frac{3}{2}\right) = i\hbar a_{3/2}$$

Pour la seconde diffusion, on décompose les états initial et final sur la base des états propres de l'isospin :

$$\begin{aligned} i\hbar\mathcal{A}_b &= {}_{\text{out}}\langle\pi^- p|\mathcal{H}_{\text{int}}|\pi^- p\rangle_{\text{in}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2} \middle| \mathcal{H}_{\text{int}} \middle| \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{\frac{2}{3}}\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2} \middle| \mathcal{H}_{\text{int}} \middle| \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) \\ &\quad + \left(+\sqrt{\frac{2}{3}}\right)\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \middle| \mathcal{H}_{\text{int}} \middle| \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\right) + \sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{\frac{2}{3}}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \middle| \mathcal{H}_{\text{int}} \middle| \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{1}{3}i\hbar a_{3/2} + \frac{2}{3}i\hbar a_{1/2} \end{aligned}$$

- Réactions de transfert de charge :

$$(c) \quad \pi^- + p \longrightarrow \pi^0 + n$$

$$(d) \quad \pi^+ + n \longrightarrow \pi^0 + p$$

En procédant de la même manière, on obtient :

$$i\hbar\mathcal{A}_c = {}_{\text{out}}\langle\pi^0 n|\mathcal{H}_{\text{int}}|\pi^- p\rangle_{\text{in}} = \frac{\sqrt{2}}{3}i\hbar a_{3/2} - \frac{\sqrt{2}}{3}i\hbar a_{1/2},$$

$$i\hbar\mathcal{A}_d = {}_{\text{out}}\langle\pi^0 p|\mathcal{H}_{\text{int}}|\pi^+ n\rangle_{\text{in}} = \frac{\sqrt{2}}{3}i\hbar a_{3/2} - \frac{\sqrt{2}}{3}i\hbar a_{1/2}.$$

On a finalement :

$$\begin{cases} \mathcal{A}_a &= a_{3/2}, \\ \mathcal{A}_b &= \frac{1}{3}a_{3/2} + \frac{2}{3}a_{1/2}, \\ \mathcal{A}_c &= \frac{\sqrt{2}}{3}a_{3/2} - \frac{\sqrt{2}}{3}a_{1/2}, \\ \mathcal{A}_d &= \frac{\sqrt{2}}{3}a_{3/2} - \frac{\sqrt{2}}{3}a_{1/2}, \end{cases}$$

Les probabilités correspondant aux divers processus s'obtiennent en prenant les modules au carré des amplitudes. Les collisions (b) et (c), pour lesquelles l'état initial est le même, constituent des processus discernables.

$$\begin{cases} \mathcal{P}_a &= |\mathcal{A}_a|^2 = |a_{3/2}|^2, \\ \mathcal{P}_b &= |\mathcal{A}_b|^2 = \frac{1}{9}|a_{3/2}|^2 + \frac{2}{9}(a_{3/2}a_{1/2}^* + a_{1/2}a_{3/2}^*) + \frac{4}{9}|a_{1/2}|^2, \\ \mathcal{P}_c &= |\mathcal{A}_c|^2 = \frac{2}{9}|a_{3/2}|^2 - \frac{2}{9}(a_{3/2}a_{1/2}^* + a_{1/2}a_{3/2}^*) + \frac{2}{9}|a_{1/2}|^2, \\ \mathcal{P}_d &= |\mathcal{A}_d|^2 = \frac{2}{9}|a_{3/2}|^2 - \frac{2}{9}(a_{3/2}a_{1/2}^* + a_{1/2}a_{3/2}^*) + \frac{2}{9}|a_{1/2}|^2. \end{cases}$$

Si  $|a_{3/2}| \gg |a_{1/2}|$ , les rapports des probabilités associées à chacune des transitions sont les suivants :

$$\mathcal{P}_a/\mathcal{P}_b/\mathcal{P}_c/\mathcal{P}_d = 9/1/2/2.$$

Par exemple pour les réactions (b) et (c), on observera expérimentalement deux fois plus de réactions de transfert de charges que de simples diffusions.

▷ *Isospin des multiplets.* Les particules de masses voisines au sein des multiplets  $J^P$  peuvent être rassemblées en multiplets d'isospin pour généraliser ce qui a été dit précédemment des nucléons et des pions.

**Tableau 6.1** On regroupe au sein des multiplets  $J^P$  les particules de masses voisines et on constitue ensuite des multiplets d'isospin. La composante  $\hat{I}_3$  décroît dans chaque ligne dans l'ordre où les particules figurent à la première ligne.

Particule	masse (MeV/c <sup>2</sup> )	$J^P$	$I$	noms
$\pi^+, \pi^0, \pi^-$	139.6, 135.0, 139.6	$0^-$	1	pions
$K^+, K^0$	493.7, 497.7	$0^-$	$\frac{1}{2}$	kaons
$\bar{K}^0, K^-$	497.7, 493.7	$0^-$	$\frac{1}{2}$	antikaons
$\eta$	547.5	$0^-$	0	eta
$\eta'$	957.8	$0^-$	0	eta prime
$\rho^+, \rho^0, \rho^-$	768.5	$1^-$	1	rhos
$\omega$	781.9	$1^-$	0	omega
$p, n$	938.3, 939.6	$\frac{1}{2}^+$	$\frac{1}{2}$	nucléons
$\Lambda$	1115.7	$\frac{1}{2}^+$	0	lambda
$\Delta^{++}, \Delta^+, \Delta^0, \Delta^-$	$\simeq 1232$	$\frac{3}{2}^+$	$\frac{3}{2}$	deltas
$\Omega^-$	1672.5	$\frac{3}{2}^+$	0	omega

On a vu dans l'exemple des réactions nucléons-pions que l'isospin était conservé. On admet que c'est une propriété plus générale des interactions fortes,

$$[\hat{H}_S, \hat{\mathbf{I}}^2] = [\hat{H}_S, \hat{I}_3] = [\hat{\mathbf{I}}^2, \hat{I}_3] = 0.$$

Pour les interactions électromagnétiques en revanche,  $[\hat{H}_{e.m.}, \hat{\mathbf{I}}^2] \neq 0$ , mais

$$[\hat{H}_{e.m.}, \hat{I}_3] = 0$$

de sorte qu'on a  $\Delta I_3 = 0$  mais  $\Delta |\mathbf{I}|^2 \neq 0$ . Les interactions faibles ne conservent ni  $\hat{\mathbf{I}}^2$  ni  $\hat{I}_3$ .

▷ *Relation de Gell-Mann–Nishijima.* Il existe une relation simple entre la charge électrique et la composante  $\hat{I}_3$  de l'isospin. Cette relation fait intervenir l'hypercharge  $\hat{Y}$ ,

$$\hat{Q} = \hat{I}_3 + \frac{1}{2}\hat{Y}.$$

L'hypercharge correspond au double de la charge électrique moyenne dans un multiplet d'isospin.

**Etrangeté**

L'*étrangeté* a été introduite pour expliquer les propriétés "étranges" de certaines particules qui sont produites en nombre par des collisions impliquant des interactions fortes (durée typique de l'ordre de  $10^{-23}$ s), mais qui ont des durées de vie longues, typiques de l'interaction faible ( $10^{-9}$ s). Si elles se désintégraient par voie forte, leur durée de vie serait beaucoup plus faible. On invoque donc un nombre quantique nouveau, l'étrangeté, conservé par interaction forte, mais pas par interaction faible. Ce nombre quantique est en fait associé à la présence d'une quark, le quark  $s$  et l'interaction forte n'est pas susceptible de modifier cette *saveur* de quark alors que l'interaction faible en est capable. Encore une fois, les multiplets de spin-parité admettent un classement en termes d'étrangeté.

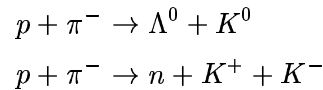
**Tableau 6.2** Etrangeté de quelques particules

Particule	$J^P$	$s$
$K^+, K^0$	$0^-$	+1
$\pi^+, \pi^0, \pi^-$	$0^-$	0
$\bar{K}^0, K^-$	$0^-$	-1
$p, n$	$\frac{1}{2}^+$	0
$\Sigma^+, \Sigma^0, \Sigma^-$	$\frac{1}{2}^+$	-1
$\Lambda^0$	$\frac{1}{2}^+$	-1

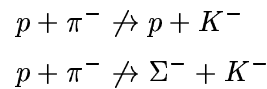
On retiendra que l'étrangeté est conservée additivement dans les réactions hadroniques (interactions fortes) et électromagnétiques,

$$[\hat{H}_S, \hat{S}] = [\hat{H}_{e.m.}, \hat{S}] = 0.$$

Les processus suivants sont par exemple permis



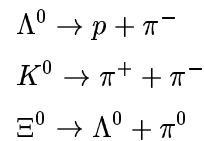
car ils correspondent à  $\Delta s = 0$ , alors que



sont interdits (ils modifient l'étrangeté de  $\Delta s = -1$  et  $-2$  respectivement). En revanche les désintégrations faibles à  $|\Delta s| = +1$  sont autorisées,

$$[\hat{H}_W, \hat{S}] \neq 0,$$

comme ici  $\Delta s = +1$ ,





D'autres saveurs de quarks (*charme*, *bottom* <sup>(27)</sup> et *top* <sup>(28)</sup>) ont ensuite été introduites pour rendre compte de certaines anomalies qui persistaient et il semble qu'à l'heure actuelle 6 quarks permettent une description complète (avec leur 6 antiparticules, chacun pouvant être porteur de trois charges de couleur différentes !). Cela fournit une symétrie parfaite avec les six leptons ponctuels connus (et leurs six antiparticules). Les règles de conservation sont analogues à celle de l'étrangeté,

$$\begin{aligned} [\hat{H}_S, \hat{C}] &= [\hat{H}_{e.m.}, \hat{C}] = 0, & [\hat{H}_W, \hat{C}] &\neq 0, \\ [\hat{H}_S, \hat{B}'] &= [\hat{H}_{e.m.}, \hat{B}'] = 0, & [\hat{H}_W, \hat{B}'] &\neq 0, \\ [\hat{H}_S, \hat{T}] &= [\hat{H}_{e.m.}, \hat{T}] = 0, & [\hat{H}_W, \hat{T}] &\neq 0. \end{aligned}$$

La première évidence expérimentale du quark *c* remonte à 1974 avec le  $J/\psi$ , état lié  $c\bar{c}$  aussi nommé charmonium. Celle d'un état lié  $b\bar{b}$  date de 1977 avec la particule  $\Upsilon$  et le quark *t* est avéré depuis 1995. En termes de contenu en quarks, l'hypercharge s'exprime comme  $\hat{Y} = \hat{B} + \hat{S} + \hat{C} + \hat{B}' + \hat{T}$ .

**Tableau 6.3** Masse des quarks

quark	masse
<i>u</i>	$3.4 \pm 0.6$ eV
<i>d</i>	$6.3 \pm 0.9$ eV
<i>s</i>	$118.0 \pm 17.0$ MeV
<i>c</i>	$880.0 \pm 48.0$ MeV
<i>b</i>	$3.31 \pm 0.11$ GeV
<i>t</i>	$172.0 \pm 6.0$ GeV

## Bilan des lois de conservation

On présente finalement ci-dessous un bilan des grandeurs conservées ou non par les différents types d'interactions.

<sup>(27)</sup> Le quark *bottom* a aussi été appelé *beauty* à l'origine.

<sup>(28)</sup> Le quark *top* a tout d'abord été appelé *truth*.

**Tableau 6.4** Bilan des lois de conservation

Quantité conservée	$\hat{H}_S$	$\hat{H}_{e.m.}$	$\hat{H}_W$
énergie-impulsion	oui	oui	oui
moment cinétique total	oui	oui	oui
parité	oui	oui	non
renversement du temps	oui	non	non
$q$	oui	oui	oui
$l_e$	oui	oui	oui
$l_\mu$	oui	oui	oui
$l_\tau$	oui	oui	oui
$b$	oui	oui	oui
$\hat{\mathbf{I}}^2$	oui	non	non
$\hat{I}_3$	oui	oui	non
$s$	oui	oui	non
$c$	oui	oui	non
$b$	oui	oui	non
$t$	oui	oui	non
$CPT$	oui	oui	oui

**78**

*Mis à jour le 23 Mai 2006*

## **Perturbations**

**7****Transitions quantiques sous l'influence d'une perturbation externe****Série perturbative**

La représentation d'interaction permet une formulation allégée de la théorie des perturbations dépendant du temps. Soit  $H_0$  un hamiltonien dont on connaît les valeurs propres et les états propres,

$$H_0|\varphi_n\rangle = E_n|\varphi_n\rangle,$$

auquel on ajoute une perturbation dépendant explicitement du temps,  $W(t)$ , et supposée assez faible pour qu'un traitement perturbatif soit licite (on donnera ultérieurement un sens plus précis à cette condition),  $H(t) = H_0 + W(t)$ .

Par hypothèse, à un instant initial choisi comme origine des temps, le système est dans un état propre de  $H_0$ . Aux temps ultérieurs, on décompose l'état  $\psi(t)$  sur la base des  $\varphi_n$  :

$$\begin{aligned} \text{à } t = 0, \quad & |\psi(0)\rangle = |\varphi_i\rangle \\ \text{à } t > 0, \quad & |\psi(t)\rangle = \sum_n c_n(t)|\varphi_n\rangle \\ & c_n(t) = \langle\varphi_n|\psi(t)\rangle \\ & c_n(0) = \delta_{n,i} \end{aligned}$$

On cherche la probabilité de transition  $P_{fi}(t)$  à l'instant  $t$  vers un état final donné,  $|\varphi_f\rangle$ , parmi les états propres de  $H_0$  <sup>(29)</sup>,

<sup>(29)</sup> Si on voulait étudier une transition vers un état  $|\phi\rangle$  quelconque, on pourrait en principe l'obtenir par décomposition à nouveau sur les transitions vers les  $|\varphi_n\rangle$ .

Mis à jour le 23 Mai 2006

$$P_{f_i}(t) = |A_{f_i}(t)|^2 = |\langle \varphi_f | \psi(t) \rangle|^2.$$

Il suffit de calculer  $c_f(t)$ . Partant de l'équation d'évolution

$$i\hbar \partial_t |\psi(t)\rangle = H(t) |\psi(t)\rangle,$$

on développe pour obtenir

$$i\hbar \sum_n \partial_t c_n(t) |\varphi_n\rangle = \sum_n c_n(t) E_n |\varphi_n\rangle + \sum_n c_n(t) W(t) |\varphi_n\rangle.$$

En représentation d'interaction la formulation est simplifiée. On a tout d'abord

$$\begin{aligned} |\psi_I(t)\rangle &= e^{\frac{i}{\hbar} H_0(t)} |\psi_S(t)\rangle \\ W_I(t) &= e^{\frac{i}{\hbar} H_0(t)} W(t) e^{-\frac{i}{\hbar} H_0(t)} \\ i\hbar \partial_t |\psi_I(t)\rangle &= W_I(t) |\psi_I(t)\rangle \end{aligned}$$

et par intégration formelle de l'équation de Schrödinger, on obtient

$$|\psi_I(t)\rangle = |\psi_I(0)\rangle + (i\hbar)^{-1} \int_0^t dt_1 W_I(t_1) |\psi_I(t_1)\rangle.$$

C'est une équation implicite pour  $|\psi_I(t)\rangle$  qui s'écrit encore de manière perturbative par itérations successives,

$$\begin{aligned} |\psi_I(t)\rangle &= |\psi_I(0)\rangle \\ &+ (i\hbar)^{-1} \int_0^t dt_1 W_I(t_1) |\psi_I(0)\rangle \\ &+ (i\hbar)^{-2} \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 W_I(t_1) W_I(t_2) |\psi_I(0)\rangle \\ &+ (i\hbar)^{-3} \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \int_0^{t_2} dt_3 W_I(t_1) W_I(t_2) W_I(t_3) |\psi_I(0)\rangle \\ &\dots \end{aligned}$$

ce que l'on peut représenter symboliquement par le diagramme

$$\begin{aligned}
 |\psi_I(t)\rangle &= |\psi_I(0)\rangle \\
 &+ \begin{array}{c} t \quad t_1 \quad 0 \\ \circ \end{array} \\
 &+ \begin{array}{c} t_1 \quad t_2 \quad 0 \\ \circ \quad \circ \end{array} \\
 &+ \begin{array}{c} \circ \quad \circ \quad \circ \end{array} \\
 &+ \dots
 \end{aligned}$$

L'amplitude de transition cherchée est donnée par<sup>(30)</sup>

$$\begin{aligned}
 A_{fi}(t) &= c_f(t) \\
 &= \langle \varphi_f | \psi(t) \rangle \\
 &= \langle \varphi_f | e^{-\frac{i}{\hbar} H_0 t} | \psi_I(t) \rangle \\
 &= e^{-\frac{i}{\hbar} E_f t} \underbrace{\langle \varphi_f | \psi_I(t) \rangle}_{\gamma_f(t)}
 \end{aligned}$$

Pour le calcul de la probabilité de transition,  $\gamma_f(t)$  suffit, puisque  $\gamma_f(t)$  et  $c_f(t)$  ne diffèrent que d'un facteur de phase,  $|\gamma_f(t)| = |c_f(t)|$ .

### Calcul au premier ordre

Au premier ordre en perturbation, on se limite à la première correction à  $|\psi_I(0)\rangle$ ,

$$\begin{aligned}
 \gamma_f(t) &= \langle \varphi_f | \psi_I(t) \rangle \\
 &= \langle \varphi_f | \psi_I(0) \rangle \\
 &+ (i\hbar)^{-1} \int_0^t dt_1 \langle \varphi_f | W_I(t_1) | \psi_I(0) \rangle
 \end{aligned}$$

<sup>(30)</sup> On rappelle la notation, moins ambiguë que la notation de Dirac lorsque l'on fait agir des opérateurs non hermitiens, utilisée en mathématiques. Voici un exemple pour faire agir sur le bra :

$$\begin{aligned}
 \langle \varphi_b | e^{-iH_0 t/\hbar} | \varphi_a \rangle &= (\varphi_b, e^{-iH_0 t/\hbar} \varphi_a) \\
 &= (\varphi_b [e^{-iH_0 t/\hbar}]^\dagger, \varphi_a) \\
 &= (\varphi_b e^{+iE_b t/\hbar}, \varphi_a) \\
 &= [e^{+iE_b t/\hbar}]^* (\varphi_b, \varphi_a) \\
 &= e^{-iE_b t/\hbar} (\varphi_b, \varphi_a)
 \end{aligned}$$

Le premier terme donne  $|\psi_I(0)\rangle = |\psi(0)\rangle = |\varphi_i\rangle$ . L'élément de matrice vaut

$$\begin{aligned}\langle\varphi_f|W_I(t_1)|\psi_I(0)\rangle &= \langle\varphi_f|e^{\frac{i}{\hbar}H_0t_1}W_I(t_1)e^{-\frac{i}{\hbar}H_0t_1}|\psi_I(0)\rangle \\ &= e^{i\omega_{fi}t_1}W_{fi}(t_1)\end{aligned}$$

où  $\omega_{fi}$  est la pulsation de Bohr associée à la transition  $i \rightarrow f$  et  $W_{fi}(t)$  l'élément de matrice de la perturbation en représentation ordinaire de Schrödinger,

$$W_{fi}(t_1) = \langle\varphi_f|W(t_1)|\varphi_i\rangle.$$

On obtient alors pour l'amplitude de transition

$$\begin{aligned}A_{fi}^{(1)}(t) &= e^{-\frac{i}{\hbar}E_f t}\gamma_{fi}(t) \\ &= e^{-\frac{i}{\hbar}E_f t}\left(\delta_{fi} + (i\hbar)^{-1}\int_0^t dt_1 e^{i\omega_{fi}t_1}W_{fi}(t_1)\right)\end{aligned}$$

et comme on s'intéresse généralement à une transition vers un état distinct de l'état initial, la probabilité de transition est donnée au premier ordre par

$$P_{fi}^{(1)}(t) = \left|(i\hbar)^{-1}\int_0^t dt_1 e^{i\omega_{fi}t_1}W_{fi}(t_1)\right|^2.$$

### Calcul au second ordre

Si l'élément de matrice  $W_{fi}(t)$  est nul (ce qui se produit lorsque certaines règles de sélection ne sont pas satisfaites par l'état final), il faut alors examiner la correction au second ordre. En supposant  $\delta_{fi} = 0$ , il vient

$$\begin{aligned}\gamma_{fi}^{(2)} &= (i\hbar)^{-2}\int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \langle\varphi_f|W_I(t_1)W_I(t_2)|\varphi_i\rangle \\ &= (i\hbar)^{-2}\sum_n \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \langle\varphi_f|W_I(t_1)|\varphi_n\rangle\langle\varphi_n|W_I(t_2)|\varphi_i\rangle \\ &= (i\hbar)^{-2}\sum_n \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 e^{i\omega_{fn}t_1}W_{fn}(t_1)e^{i\omega_{ni}t_2}W_{ni}(t_2)\end{aligned}$$

soit encore

$$P_{fi}^{(2)}(t) = \left|(i\hbar)^{-2}\sum_n \int_0^t dt_1 e^{i\omega_{fn}t_1}W_{fn}(t_1) \int_0^{t_1} dt_2 e^{i\omega_{ni}t_2}W_{ni}(t_2)\right|^2.$$



## 8

# Perturbations oscillante et adiabatique

### Perturbation oscillante

Un cas très important en pratique est celui d'une perturbation sinusoïdale,

$$\hat{W}(\mathbf{r}, t) = \hat{U}(\mathbf{r}) \cos \omega t = \frac{1}{2} \hat{U}(\mathbf{r}) (e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}).$$

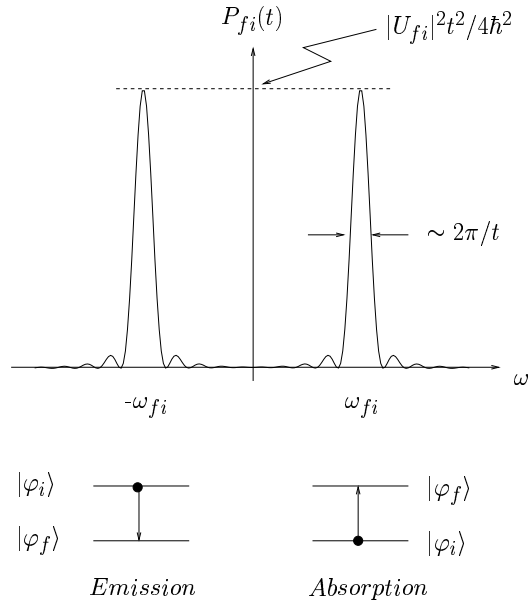
On pose  $U_{fi} = \langle \varphi_f | \hat{U}(\mathbf{r}) | \varphi_i \rangle$  pour l'intégrale spatiale supposée non nulle (on se contente donc du calcul au premier ordre).

$$\begin{aligned} \gamma_{fi}(t) &= \frac{1}{2} U_{fi} (i\hbar)^{-1} \int_0^t (e^{i(\omega_{fi}+\omega)t'} + e^{i(\omega_{fi}-\omega)t'}) dt' \\ |A_{fi}(t)| &= \left| \frac{U_{fi}}{2i\hbar} \left[ \frac{1 - e^{i(\omega_{fi}+\omega)t}}{i(\omega_{fi} + \omega)} + \frac{1 - e^{i(\omega_{fi}-\omega)t}}{i(\omega_{fi} - \omega)} \right] \right| \end{aligned}$$

Le premier terme est dominant lorsque  $\omega \rightarrow -\omega_{fi}$  et le second lorsque  $\omega \rightarrow \omega_{fi}$ . On peut en général considérer que l'un des deux termes contribue de façon significative de sorte que l'on peut négliger le terme croisé (c'est une simplification qui n'est pas du tout indispensable techniquement, mais elle allège considérablement les notations).

En utilisant  $|1 - e^{i(\omega_{fi}+\omega)t}|^2 = 4 \sin^2 \left( \frac{\omega_{fi}+\omega}{2} t \right)$ , on a

$$P_{fi}(t) = \frac{|U_{fi}|^2}{4\hbar^2} \left[ \frac{\sin^2 \left( \frac{\omega_{fi}+\omega}{2} t \right)}{\left( \frac{\omega_{fi}+\omega}{2} \right)^2} + \frac{\sin^2 \left( \frac{\omega_{fi}-\omega}{2} t \right)}{\left( \frac{\omega_{fi}-\omega}{2} \right)^2} \right].$$



Physiquement on impose  $\omega > 0$ . Les deux résonances s'interprètent par deux processus distincts, mais pour lesquels les probabilités associées sont identiques.

- i) Si  $\omega_{fi} > 0$ , c'est-à-dire si l'état initial a une énergie inférieure à celle de l'état final,  $E_f > E_i$ , on parle d'absorption (le gain d'énergie pour le système est prélevé à la perturbation, le système absorbe  $\hbar\omega_{fi}$ ). Ce n'est possible que pour une perturbation accordée à la fréquence de Bohr de la transition,  $\omega \simeq \omega_{fi}$ .
- ii) Si au contraire  $\omega_{fi} < 0$  c'est que l'état final a une énergie moindre, dans ce cas on parle d'émission et le système perd de l'énergie au bénéfice de l'extérieur.

L'approximation du premier ordre est contrainte à des conditions de validité. Avoir négligé le terme croisé dans le calcul de  $P_{fi}(t)$  est légitime si  $2|\omega_{fi}| \gg \Delta\omega$ .  $\Delta\omega$  peut être évalué en notant que le sinus s'annule en  $\pm\Delta\omega$  par rapport au centre du pic, soit

$$\sin\left(\frac{\omega_{fi} - \omega_{1,2}}{2}t\right) = 0$$

$$2\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = \frac{4\pi}{t}$$

$$|\omega_{fi}| \gg \frac{\pi}{t}$$

soit pour  $t \gg |\omega_{fi}|^{-1} \simeq \omega^{-1}$ . La durée de l'interaction doit être grande devant la période de l'onde perturbative pour que le système ait le temps de percevoir la nature périodique de la perturbation.

Par ailleurs,  $P_{fi}$  étant une probabilité, elle est bornée à 1 ce qui impose  $|U_{fi}|^2 t^2 / 4\hbar^2 < 1$ , soit  $t < \hbar / |U_{fi}|$ .

Un point particulièrement important est celui du comportement asymptotique aux temps longs (au sens où les contraintes précédentes sont supposées satisfaites). On peut retrouver le comportement de la fonction  $\sin^2 \alpha t / \alpha^2$  pour  $t \gg \alpha^{-1}$  en notant que l'intégrale

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2(\alpha t)}{\alpha^2} d\alpha = \underbrace{\frac{\pi}{t}}_{\text{largeur}} \times \underbrace{t^2}_{\text{hauteur}} = \pi t$$

ce qui permet d'identifier

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\sin^2(\alpha t)}{\alpha^2} = \pi t \delta(\alpha).$$

On rappelle aussi la propriété de translation de  $\delta$ ,  $\delta(a\alpha) = |a|^{-1} \delta(\alpha)$ . On a ainsi

$$\begin{aligned} \lim_{t \gg \omega^{-1}} \frac{\sin^2\left(\frac{\omega_{fi} - \omega}{2} t\right)}{\left(\frac{\omega_{fi} - \omega}{2}\right)^2} &= 2\pi t \delta(\omega - \omega_{fi}) \\ &= 2\pi \hbar t \delta(E_f - E_i - \hbar\omega) \end{aligned}$$

soit

$$P_{fi}(t) \simeq \frac{1}{2} \frac{|U_{fi}|^2 \pi}{\hbar} t [\delta(E_f - E_i + \hbar\omega) + \delta(E_f - E_i - \hbar\omega)]$$

qui assure la conservation de l'énergie totale du système au cours de la transition. On distingue en général deux processus, soit pour l'émission, soit pour l'absorption, comme indiqué ci-dessous,

**Tableau 8.1** Comportement asymptotique de la probabilité de transition sous l'effet de perturbations oscillantes.

Perturbation	Probabilité de transition
$\hat{W}(\mathbf{r}, t) = \hat{U}(\mathbf{r}) \cos \omega t$	$P_{fi}(t) \simeq \frac{1}{2} \frac{ U_{fi} ^2 \pi}{\hbar} t [\delta(E_f - E_i + \hbar\omega) + \delta(E_f - E_i - \hbar\omega)]$
$\hat{W}(\mathbf{r}, t) = \hat{U}^+(\mathbf{r}) e^{-i\omega t}$	$P_{fi}^{abs}(t) \simeq \frac{2\pi t}{\hbar}  U_{fi}^+ ^2 \delta(E_f - E_i - \hbar\omega)$
$\hat{W}(\mathbf{r}, t) = \hat{U}^-(\mathbf{r}) e^{i\omega t}$	$P_{fi}^{ém}(t) \simeq \frac{2\pi t}{\hbar}  U_{fi}^- ^2 \delta(E_f - E_i + \hbar\omega)$

On définit également les taux de transition, qui sont simplement les probabilités par unité de temps, soit pour une perturbation sinusoïdale

$$\Gamma_{fi} = \frac{1}{2} \frac{|U_{fi}|^2 \pi}{\hbar} [\delta(E_f - E_i + \hbar\omega) + \delta(E_f - E_i - \hbar\omega)]$$

et pour l'absorption et l'émission

$$\begin{aligned} \Gamma_{fi}^{abs} &= \frac{2\pi}{\hbar} |U_{fi}^+|^2 \delta(E_f - E_i - \hbar\omega), \\ \Gamma_{fi}^{ém} &= \frac{2\pi}{\hbar} |U_{fi}^-|^2 \delta(E_f - E_i + \hbar\omega). \end{aligned}$$

**Perturbation constante**

Dans le cas d'une perturbation constante (réelle)  $\hat{W}(\mathbf{r}, t) = W$  s'établissant pendant la durée 0 à  $\tau$ , l'amplitude de transition au premier ordre est de la forme

$$\begin{aligned}\gamma_{fi}(t) &= W (i\hbar)^{-1} \int_0^\tau e^{i\omega_{fi}t'} dt' \\ |A_{fi}(t)| &= \frac{W}{\hbar\omega_{fi}} |1 - e^{i\omega_{fi}\tau}| \\ &= \frac{2W}{\hbar\omega_{fi}} \sin(\omega_{fi}\tau/2)\end{aligned}$$

En utilisant les propriétés de  $\delta$ , on obtient donc aux temps  $\tau$  assez longs (notamment pour une perturbation "branchée à  $t = 0$ " jusqu'à  $\tau \rightarrow \infty$ , encore appelée perturbation adiabatique) la probabilité de transition et le taux de transition associé

$$\begin{aligned}P_{fi}(\tau) &= \frac{2\pi}{\hbar^2} W^2 \tau \delta(\omega_{fi}), \\ \Gamma_{fi} &= \frac{2\pi}{\hbar} W^2 \delta(E_f - E_i).\end{aligned}$$

Ces résultats sont aussi obtenus simplement par la limite  $\omega \rightarrow 0$  des cas précédents.

**9****Règle d'or de Fermi**

Un cas particulièrement important est celui où l'état initial ou l'état final (ou les deux) fait partie d'un continuum. Supposons par exemple que ce soit l'état final (c'est le cas le plus fréquent) et notons  $\rho(E)$  la densité d'états, c'est-à-dire

$$\rho(E) = \frac{dn}{dE}$$

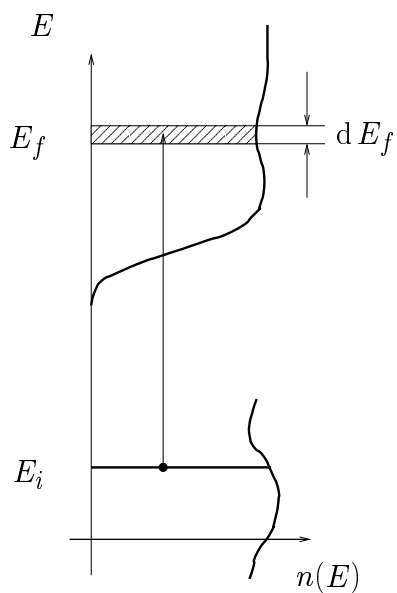
où  $n$  est le nombre d'états, qui peut être ramené selon les cas par unité d'angle solide, par polarisation, etc. On sera amené plus tard à préciser soigneusement la notation. On distinguera le nombre d'états quantiques du système,  $n$ , du nombre  $N$  d'interactions entre faisceau incident et cible lors des expériences de diffusion décrites ultérieurement. On introduit alors le taux de transition (élémentaire) vers l'état final d'énergie  $E_f$  à  $dE_f$  près, par exemple dans le cas du mécanisme d'absorption (c'est-à-dire avec une perturbation de la forme  $\hat{W}(\mathbf{r}, t) = \hat{U}^+(\mathbf{r}) e^{-i\omega t}$ ),

$$d\Gamma_{fi}^{abs} = \frac{2\pi}{\hbar} |U_{fi}^+|^2 \delta(E_f - E_i - \hbar\omega) \rho(E_f) dE_f,$$

soit, par intégration sur les états finals permis,

$$\Gamma_{fi}^{abs} = \int d\Gamma_{fi}^{abs} = \frac{2\pi}{\hbar} |U_{fi}^+|^2 \rho(E_f), \quad E_f = E_i + \hbar\omega$$

Ce résultat constitue la règle d'or de Fermi. La dernière contrainte résulte de l'intégration sur  $\delta$ , elle assure la conservation de l'énergie.



**Tableau 9.1** Transitions vers un état du continuum

Mécanisme	Perturbation	Taux de transition	condition
Absorption	$\hat{W}(\mathbf{r}, t) = \hat{U}^+(\mathbf{r}) e^{-i\omega t}$	$\Gamma_{fi}^{abs}(t) \simeq \frac{2\pi t}{\hbar}  U_{fi}^+ ^2 \rho(E_f)$	$E_f = E_i + \hbar\omega$
Emission	$\hat{W}(\mathbf{r}, t) = \hat{U}^-(\mathbf{r}) e^{i\omega t}$	$\Gamma_{fi}^{ém}(t) \simeq \frac{2\pi t}{\hbar}  U_{fi}^- ^2 \rho(E_f)$	$E_f = E_i - \hbar\omega$
Adiabatique	$\hat{W}(\mathbf{r}, t) = W \times H(t)$	$\Gamma_{fi}^{abs}(t) \simeq \frac{2\pi t}{\hbar} W^2 \rho(E_f)$	$E_f = E_i$
	$H(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ 1 & t \geq 0 \end{cases}$		

# Diffusion

**10****Sections efficaces et règle d'or****Relation générale entre section efficace et taux de transition élémentaire**

Une façon très féconde également de calculer les sections efficaces repose sur la règle d'or de Fermi. On simplifie ici le problème en considérant un faisceau monochromatique incident ( $\mathbf{k}$  bien défini) et une cible limitée à un seul atome dans un état discret (l'état fondamental par exemple). On peut polariser le faisceau incident <sup>(31)</sup> et analyser également la polarisation diffusée si besoin. Il s'agit d'une expérience de diffusion, l'état total du système est donc constitué d'une partie faisceau (dans le continuum) et d'une partie atomique (on supposera ici dans un premier temps qu'il n'y a que des transitions entre états discrets pour l'atome), de sorte qu'on a bien des transitions entre états du continuum de par la partie faisceau, ce qui autorise l'utilisation de la règle d'or. Dans la règle d'or il apparaît la densité d'états dans l'état final qu'il faut maintenant préciser proprement. En général, le système est supposé se trouver dans une boîte cubique de taille  $L^3$ . Le nombre total d'états dans l'état final (quantités primées) est donné par

$$\begin{aligned} n' &= \sum_{\varepsilon'} \int dE' \int d^2\Omega \frac{d^3 n_{\mathbf{k}'\varepsilon'}}{dE' d^2\Omega} \\ &= \sum_{\varepsilon'} \int dE' \rho_{\varepsilon'}(E') \end{aligned}$$

---

<sup>(31)</sup> On note  $\varepsilon$  ou  $\sigma$  la polarisation selon qu'il s'agit de photons ou de particules massives ayant un spin, le contexte suffit à éviter toute confusion avec la section efficace.



$$\text{densité d'états en énergie } \rho_{\varepsilon'}(E') = \int d^2\Omega \frac{d^3 n_{\mathbf{k}'\varepsilon'}}{dE' d^2\Omega},$$

$$\text{densité d'états partielle } \frac{d^3 n_{\mathbf{k}'\varepsilon'}}{dE' d^2\Omega} = \frac{d^2 \rho_{\varepsilon'}(E')}{d^2\Omega}.$$

Si l'on ne s'intéresse pas à l'angle de diffusion, on peut utiliser le nombre d'états d'énergie  $E'$  à  $dE'$  près,  $dn_{\mathbf{k}'\varepsilon'} = \rho_{\varepsilon'}(E') dE'$ , mais il faut s'assurer que les éléments de matrice n'ont pas de dépendance angulaire.

Le taux de transition est mesuré par unité de temps et d'angle solide,

$$\frac{d^2\Gamma}{d^2\Omega} = \frac{d^3 N}{d^2\Omega dt}.$$

Comme la section efficace est de la même forme que le taux de transition,  $J_0 \frac{d^2\sigma}{d^2\Omega} = \frac{d^3 N}{d^2\Omega dt}$ , on a une relation de proportionnalité

$$\frac{d^2\sigma}{d^2\Omega} = J_0^{-1} \frac{d^2\Gamma}{d^2\Omega}$$

où  $J_0$  est toujours le flux incident.

On en déduit une relation très importante en raison de ses nombreuses applications pratiques,

$$\frac{d^2\sigma}{d^2\Omega} = J_0^{-1} \frac{2\pi}{\hbar} |W_{fi}|^2 \frac{d^2 \rho_{\varepsilon'}(E_f)}{d^2\Omega}, \quad (10.1)$$

assortie d'une condition de conservation de l'énergie dont la forme précise dépend du processus impliqué. Ici, la densité d'états en sortie est résolue en angle, soit

$$\frac{d^2 \rho_{\varepsilon'}(E')}{d^2\Omega} = \frac{d^3 n_{\mathbf{k}'\varepsilon'}}{dE' d^2\Omega}.$$

Pour déterminer cette densité d'états dans l'état final par unité d'angle solide, on écrit que dans un volume  $L^3$ , le nombre d'états de polarisation  $\varepsilon'$  et de vecteur d'onde  $\mathbf{k}'$  vaut

$$\begin{aligned} d^3 n_{\mathbf{k}'\varepsilon'} &= \frac{d^2 \rho_{\varepsilon'}(E')}{d^2\Omega} d^2\Omega dE' \\ &= \frac{d^3 n_{\mathbf{k}'\varepsilon'}}{d^2\Omega dE'} d^2\Omega dE' \\ &= \underbrace{|\mathbf{k}'|^2 d|\mathbf{k}'|}_{\text{volume disponible}} d^2\Omega \underbrace{\left(\frac{L}{2\pi}\right)^3}_{\text{volume d'un mode}} \end{aligned}$$

On utilise ensuite la relation de dispersion adaptée au problème considéré.

On peut donc distinguer plusieurs cas, à la fois pour le faisceau incident, puisque la forme prise par le flux  $J_0$  en dépend, mais aussi pour la densité d'état qui dépend de la nature des particules diffusées et ne prend pas la même forme selon qu'il s'agit de particules massives (électrons ou neutrons par exemple) ou non massives (photons) à cause des relations de dispersion différentes.

### Flux incident

Dans le cas d'un faisceau incident de photons, on suppose pour simplifier qu'il s'agit d'un faisceau incident dans un mode bien particulier, soit  $n_{\mathbf{k}\varepsilon}$  le nombre de photons dans ce mode  $|\mathbf{k}\varepsilon\rangle$  (dont on précisera le sens ultérieurement) dans un volume  $L^3$ . Le nombre d'interactions effectives dans la surface efficace  $d^2\sigma$  en  $dt$  est donné par le nombre de photons dans le volume  $c dt d^2\sigma$ , soit  $d^3N_0 = c dt d^2\sigma (n_{\mathbf{k}\varepsilon} L^{-3}) = J_0 dt d^2\sigma$ , soit

$$J_0 = n_{\mathbf{k}\varepsilon} L^{-3} c. \quad (10.2)$$

Les particules massives sont en général représentées par une onde plane normée dans le volume  $L^3$ ,  $\psi_0(\mathbf{r}) = L^{-3/2} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}$ , soit un flux incident

$$J_0 = \frac{\hbar |\mathbf{k}|}{m} L^{-3}. \quad (10.3)$$

### Densité d'état des photons

Pour déterminer la densité d'états dans l'état final par unité d'angle solide, on applique la relation donnant le nombre de modes dans un volume élémentaire dans l'espace réciproque,

$$d^3 n_{\mathbf{k}'\varepsilon'} = \frac{d^2 \rho_{\varepsilon'}(E')}{d^2 \Omega} d^2 \Omega dE' = |\mathbf{k}'|^2 d|\mathbf{k}'| d^2 \Omega \left( \frac{L}{2\pi} \right)^3$$

En utilisant de plus la relation de dispersion  $E' = |\mathbf{p}'|c = \hbar |\mathbf{k}'|c$ , soit  $d|\mathbf{k}'| = dE'/\hbar c$ , on a

$$d^3 n_{\mathbf{k}'\varepsilon'} = \left( \frac{L}{2\pi} \right)^3 \frac{E'^2}{(\hbar c)^3} dE' d^2 \Omega$$

soit

$$\frac{d^2 \rho(E')}{d^2 \Omega} = \left( \frac{L}{2\pi} \right)^3 \frac{E'^2}{(\hbar c)^3} = \left( \frac{L}{2\pi} \right)^3 \frac{\omega_{\mathbf{k}'}^2}{\hbar c^3} \quad (10.4)$$

où l'on a introduit la pulsation  $\omega_{\mathbf{k}'}$  de l'onde diffusée,  $E' = \hbar \omega_{\mathbf{k}'}$ .

### Densité d'état pour des particules massives

Pour des particules massives en sortie on procède exactement de la même manière. Dans un volume  $L^3$ , le nombre d'états de polarisation  $\sigma'$  et de vecteur d'onde  $\mathbf{k}'$  vaut

$$d^3 n_{\mathbf{k}'\sigma'} = \frac{d^2 \rho_{\sigma'}(E')}{d^2 \Omega} d^2 \Omega dE' = |\mathbf{k}'|^2 d|\mathbf{k}'| d^2 \Omega \left( \frac{L}{2\pi} \right)^3$$

En utilisant cette fois la relation de dispersion parabolique,  $E' = \frac{|\mathbf{p}'|^2}{2m} = \frac{\hbar^2 |\mathbf{k}'|^2}{2m}$ , on obtient

$$d^3 n_{\mathbf{k}'\sigma'} = \left(\frac{L}{2\pi}\right)^3 \frac{m}{\hbar^2} |\mathbf{k}'| dE' d^2\Omega$$

soit

$$\frac{d^2 \rho_{\sigma'}(E')}{d^2\Omega} = \left(\frac{L}{2\pi}\right)^3 \frac{m}{\hbar^2} |\mathbf{k}'| = \left(\frac{L}{2\pi}\right)^3 \left(\frac{m}{\hbar^2}\right)^{3/2} \sqrt{2E'} \quad (10.5)$$

où l'on travaille soit en vecteur d'onde, soit en énergie.

### Bilan

Pour un problème de diffusions de lumière (photons en entrée et en sortie), la section efficace différentielle est donc donnée par

$$\frac{d^2\sigma}{d^2\Omega} = \frac{2\pi}{\hbar} |W_{fi}|^2 \underbrace{\frac{L^3}{n_{\mathbf{k}\varepsilon} c}}_{\text{faisceau incident}} \underbrace{\left(\frac{L}{2\pi}\right)^3 \frac{\omega_{\mathbf{k}'}^2}{\hbar c^3}}_{\text{faisceau diffusé}}. \quad (10.6)$$

Pour un problème de diffusion élastique d'électrons (si la diffusion est bien élastique, on retrouve des électrons en sortie), la section efficace vaut

$$\frac{d^2\sigma}{d^2\Omega} = \frac{2\pi}{\hbar} |W_{fi}|^2 \underbrace{\frac{mL^3}{\hbar |\mathbf{k}|}}_{\text{faisceau incident}} \underbrace{\left(\frac{L}{2\pi}\right)^3 \left(\frac{m}{\hbar^2}\right)^{3/2} \sqrt{2E'}}_{\text{faisceau diffusé}}. \quad (10.7)$$

On peut également avoir un problème du type photo-émission, où des photons incidents éjectent des électrons de la cible, on a alors

$$\frac{d^2\sigma}{d^2\Omega} = \frac{2\pi}{\hbar} |W_{fi}|^2 \underbrace{\frac{L^3}{n_{\mathbf{k}\varepsilon} c}}_{\text{faisceau incident}} \underbrace{\left(\frac{L}{2\pi}\right)^3 \left(\frac{m}{\hbar^2}\right)^{3/2} \sqrt{2E'}}_{\text{faisceau diffusé}}. \quad (10.8)$$

On multiplie par deux ces résultats si le détecteur n'est pas sélectif en polarisation (ou en spin).

**11****Equation intégrale de la diffusion**

On se propose d'établir l'équation de Lippmann-Schwinger, qui résoud, en principe, le problème de la diffusion d'une particule par un potentiel arbitraire.

**Fonctions de Green en électromagnétisme**

Une digression utile consiste à revenir au problème du potentiel en électrostatique. Soit à résoudre l'équation de Poisson

$$\Delta\phi(\mathbf{r}) = -\rho(\mathbf{r})/\varepsilon_0.$$

Lorsque  $\rho(\mathbf{r})$  est limité à un volume d'extension finie, la solution générale est de la forme

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int d^3r' \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}.$$

Cette solution, qui apparaît comme une somme de contributions coulombiennes élémentaires, sommées sur tout le volume chargé, est en fait obtenue à partir de la fonction de Green associée à l'équation de Poisson. Soit  $G(\mathbf{r})$  la solution de l'équation sans second membre,

$$\Delta G(\mathbf{r}) = \delta(\mathbf{r}).$$

Elle correspond au potentiel coulombien d'une charge ponctuelle  $-\varepsilon_0$ ,

$$G(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi} \frac{1}{|\mathbf{r}|},$$

et l'équation de Poisson étant linéaire, il suffit de décomposer la source  $\rho(\mathbf{r})$  sur des charges unité,

$$-\rho(\mathbf{r})/\varepsilon_0 = -\varepsilon_0^{-1} \int d^3r' \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \rho(\mathbf{r}')$$

pour sommer ensuite les réponses aux charges unité pondérées par la fonction de Green,

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{r}) &= -\varepsilon_0^{-1} \int d^3r' G(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \rho(\mathbf{r}') \\ &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int d^3r' \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \end{aligned}$$

### Equation de Lippmann-Schwinger

On s'intéresse maintenant à un problème de diffusion. A l'énergie  $E_{\mathbf{k}} = \frac{\hbar^2 |\mathbf{k}|^2}{2m}$  (état de diffusion), on compare l'équation de Schrödinger en présence du potentiel décrivant l'interaction avec la cible,

$$\left( -\frac{\hbar^2}{2m} \vec{\nabla}^2 + U(\mathbf{r}) \right) \psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = E_{\mathbf{k}} \psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})$$

à l'onde plane  $\varphi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})$  de même énergie, solution de

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \vec{\nabla}^2 \varphi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = E_{\mathbf{k}} \varphi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}),$$

avec  $\varphi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = L^{-3/2} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}$ . On a donc deux équations

$$\begin{aligned} (\vec{\nabla}^2 + |\mathbf{k}|^2) \psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) &= \frac{2m}{\hbar^2} U(\mathbf{r}) \psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = u(\mathbf{r}) \psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) \\ (\vec{\nabla}^2 + |\mathbf{k}|^2) \varphi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) &= 0 \end{aligned}$$

soit, par différence

$$(\vec{\nabla}^2 + |\mathbf{k}|^2) [\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) - \varphi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})] = u(\mathbf{r}) \psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}),$$

équation dont on cherche la solution  $[\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) - \varphi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})]$ . On décompose la source sur la base des  $\delta(\mathbf{r})$ ,

$$u(\mathbf{r}) \psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = \int d^3r' \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') u(\mathbf{r}') \psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}'),$$

ce qui permet de décomposer sur la fonction de Green avec la même fonction poids la solution cherchée,

$$\begin{aligned} \psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) - \varphi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) &= \int d^3r' G(\mathbf{r} - \mathbf{r}') u(\mathbf{r}') \psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}'), \\ (\vec{\nabla}^2 + |\mathbf{k}|^2) G(\mathbf{r}) &= \delta(\mathbf{r}). \end{aligned}$$

La fonction de Green est solution, en symétrie sphérique pour  $r \neq 0$ , de

$$\frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2}(rG(r)) + k^2 G(r) = 0$$

que l'on résoud en posant  $\rho = kr$ ,  $d\rho = k dr$ ,

$$\frac{d^2}{d\rho^2}(\rho G(\rho)) + \rho G(\rho) = 0$$

dont les solutions sont harmoniques  $\rho G(\rho) = A_+ e^{i\rho} + A_- e^{-i\rho}$ , soit

$$G(\mathbf{r}) = \frac{1}{kr} (A_+ e^{ikr} + A_- e^{-ikr}).$$

On ne retient physiquement pour le problème de la diffusion que la solution ayant la structure d'une onde sphérique sortante, en  $\frac{e^{ikr}}{r}$ . Par ailleurs la constante s'obtient par intégration de l'équation de définition de la fonction de Green sur une sphère de rayon  $R$  et en faisant tendre  $R$  vers 0,

$$\lim_{R \rightarrow 0} \int_{R^3} d^3r (\vec{\nabla}^2 + k^2) G(\mathbf{r}) = \lim_{R \rightarrow 0} \int_{R^3} \delta(\mathbf{r}) = 1,$$

où le premier membre se développe en

$$\lim_{R \rightarrow 0} \underbrace{\int_{R^3} d^3r \operatorname{div}(\vec{\nabla} G)}_{\text{flux de } \vec{\nabla} G} + k^2 \frac{A_+}{k} \lim_{R \rightarrow 0} \underbrace{\int_0^R \frac{e^{ikr}}{r} 4\pi r^2 dr}_{\text{nul quand } R \rightarrow 0}$$

Avec  $|\vec{\nabla} G| = \frac{A_+}{k} \left( -\frac{e^{ikr}}{r} + ik \frac{e^{ikr}}{r} \right)$ , on obtient

$$\text{flux de } \vec{\nabla} G = \underbrace{-\frac{4\pi A_+}{k} e^{ikR} + \frac{4\pi A_+}{k} ik R e^{ikR}}_{\rightarrow -4\pi A_+ / k \text{ quand } R \rightarrow 0}.$$

On a finalement  $A_+ = -\frac{k}{4\pi}$  et

$$G(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi} \frac{e^{ik|\mathbf{r}|}}{|\mathbf{r}|}.$$

La solution cherchée du problème de diffusion s'écrit ainsi comme une équation intégrale, connue sous le nom d'équation intégrale de la diffusion ou de forme intégrale de l'équation de Lippmann-Schwinger,

$$\begin{aligned} \psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) &= \varphi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) + \int d^3r' u(\mathbf{r}') \psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}') \left( -\frac{1}{4\pi} \frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \right) \\ &= \varphi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) - \frac{m}{2\pi\hbar^2} \int d^3r' U(\mathbf{r}') \psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}') \frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \end{aligned}$$

= soln gnrale éqn sans 2nd mb + soln prtclière éqn complète.

C'est une équation intégrale dans laquelle la solution cherchée apparaît aussi sous l'intégrale au second membre. Elle se résoud de manière itérative par approximations successives.

## 12

# Approximation de Born

### Comportement asymptotique de l'amplitude de diffusion

Un détecteur est placé à grande distance de la cible dans la direction  $\mathbf{k}'$  par rapport à la direction  $\mathbf{k}$  du faisceau incident. L'origine est choisie au niveau de la cible,  $\mathbf{r}'$  décrit la cible et  $\mathbf{r}$  repère le détecteur. On peut faire l'approximation  $|\mathbf{r}| \gg |\mathbf{r}'|$ ,  $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \simeq |\mathbf{r}| - \frac{\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}$ , on a donc  $k|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \simeq kr - k(\mathbf{r}' \cdot \hat{\mathbf{r}})$ . Dans le cas de la diffusion élastique, on a encore  $\mathbf{k}' = k\hat{\mathbf{r}}'$  et au dénominateur on se limite à<sup>(32)</sup>  $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \simeq r$ , ce qui donne

$$\frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \simeq \frac{e^{ikr}}{r} e^{-i\mathbf{k}'\mathbf{r}'}$$

Cela simplifie l'équation intégrale,

$$\begin{aligned} \psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) &= \varphi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) - \frac{m}{2\pi\hbar^2} \frac{e^{ikr}}{r} \int d^3r' U(\mathbf{r}') \psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}') e^{-i\mathbf{k}'\mathbf{r}'} \\ &= \varphi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) + A'(\Omega) \frac{e^{ikr}}{r}, \end{aligned}$$

ce qui permet de définir l'amplitude de diffusion et la section efficace différentielle

$$A'(\Omega) = \frac{d^2 f_{\mathbf{k}}}{d^2 \Omega} = -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \int d^3r' U(\mathbf{r}') \psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}') e^{-i\mathbf{k}'\mathbf{r}'}$$

$$\frac{d^2 \sigma}{d^2 \Omega} = \left| \frac{d^2 f_{\mathbf{k}}}{d^2 \Omega} \right|^2$$

<sup>(32)</sup> Il faut pousser le développement au premier ordre dans l'argument de l'exponentielle, puisque la différence  $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$  est comparée à la longueur d'onde dans  $k|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ , alors qu'au dénominateur on peut se contenter d'un calcul à l'ordre zéro.

**Série de Born et approximation de Born**

L'approximation de Born consiste à itérer la relation précédente en remplaçant l'intégrale sur  $\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}')$  par une intégrale sur  $\varphi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}')$  pour faire apparaître la série de Born. Pour cela, on effectue les substitutions de variable d'intégration,  $\mathbf{r}' \rightarrow \mathbf{r}''$  et  $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}'$ , etc. . .

$$\begin{aligned}\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) &= \varphi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) - \frac{m}{2\pi\hbar^2} \frac{e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}}{r} \int d^3r' U(\mathbf{r}') \psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}') e^{-i\mathbf{k}'\mathbf{r}'} \\ \psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}') &= \varphi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}') - \frac{m}{2\pi\hbar^2} \frac{e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}'}}{r'} \int d^3r'' U(\mathbf{r}'') \psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}'') e^{-i\mathbf{k}'\mathbf{r}''},\end{aligned}$$

soit en substituant,

$$\begin{aligned}\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) &= \varphi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) - \frac{m}{2\pi\hbar^2} \frac{e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}}{r} \int d^3r' U(\mathbf{r}') e^{-i\mathbf{k}'\mathbf{r}'} \\ &\quad \times \left( \varphi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}') - \frac{m}{2\pi\hbar^2} \frac{e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}'}}{r'} \int d^3r'' U(\mathbf{r}'') \psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}'') e^{-i\mathbf{k}'\mathbf{r}''} \right).\end{aligned}$$

C'est une expression exacte qui conduit à l'approximation jusqu'au second ordre si l'on remplace de nouveau  $\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}'')$  par  $\varphi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}'')$  dans la dernière intégrale,

$$\begin{aligned}\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) &\simeq \varphi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) \\ &\quad - \frac{m}{2\pi\hbar^2} \frac{e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}}{r} \int d^3r' U(\mathbf{r}') \varphi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}') e^{-i\mathbf{k}'\mathbf{r}'} \\ &\quad + \left( -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \right)^2 \frac{e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}}{r} \int d^3r' \int d^3r'' U(\mathbf{r}') e^{-i\mathbf{k}'\mathbf{r}'} \frac{e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}''}}{r''} U(\mathbf{r}'') e^{-i\mathbf{k}''\mathbf{r}''} \varphi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}'')\end{aligned}$$

La première approximation de Born consiste à s'arrêter au terme d'ordre 1, soit, en utilisant aussi l'onde plane incidente  $\varphi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}$  et en définissant le vecteur de diffusion qui mesure le transfert d'impulsion,

$$\mathbf{q} = \mathbf{k}' - \mathbf{k},$$

$$\begin{aligned}\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) &\simeq e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} - \frac{m}{2\pi\hbar^2} \frac{e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}}{r} \int d^3r' U(\mathbf{r}') e^{-i(\mathbf{k}' - \mathbf{k})\mathbf{r}'} \\ A'(\Omega) &= \frac{d^2 f_{\mathbf{k}}}{d^2 \Omega} = -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \int d^3r' U(\mathbf{r}') e^{-i\mathbf{q}\mathbf{r}'} \\ &= -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \tilde{U}(\mathbf{q})\end{aligned}$$

où l'on a défini la transformée de Fourier tridimensionnelle du potentiel d'interaction,

$$\tilde{U}(\mathbf{q}) = \int d^3r' U(\mathbf{r}') e^{-i\mathbf{q}\mathbf{r}'}.$$



Dans le cas d'un potentiel d'interaction à symétrie sphérique,  $U(r)$ , il est utile d'effectuer l'intégration sur les angles dans la transformée de Fourier,

$$\begin{aligned}\tilde{U}(\mathbf{q}) &= \int_0^\infty \underbrace{\int_0^\pi 2\pi \sin \theta' d\theta' r'^2 dr' U(r') e^{-i|\mathbf{q}|r' \cos \theta'}}_{2\pi \int_{-i|\mathbf{q}|r'}^{i|\mathbf{q}|r'} \frac{du}{i|\mathbf{q}|r'} e^u = \frac{4\pi}{|\mathbf{q}|r'} \sin |\mathbf{q}|r'} \\ &= \frac{4\pi}{|\mathbf{q}|} \int_0^\infty dr' r' U(r') \sin |\mathbf{q}|r' .\end{aligned}$$

### Conditions de validité de l'approximation de Born

La première approximation de Born consiste à remplacer  $\psi_{\mathbf{k}}$  par  $\varphi_{\mathbf{k}}$  dans l'équation intégrale de Lippmann-Schwinger. Il faut pour que ce soit licite que l'onde incidente soit peu distordue dans la région où règne le potentiel. On peut définir un nombre complexe qui mesure cette distorsion,

$$c(\mathbf{k}) = \frac{\psi_{\mathbf{k}}(0) - \varphi_{\mathbf{k}}(0)}{\varphi_{\mathbf{k}}(0)},$$

et la contrainte  $|c(\mathbf{k})| \ll 1$  nous assure de la validité de l'approximation de Born à l'énergie  $E_{\mathbf{k}}$ . Pour estimer  $c(\mathbf{k})$  il faut revenir à l'équation intégrale exacte, car on s'intéresse à la limite  $r \rightarrow 0$  qui n'est pas accessible par la forme asymptotique. Soit

$$\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) - \varphi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = \int d^3r' u(\mathbf{r}') \underbrace{\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}')}_{\simeq \varphi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}')} \left( -\frac{1}{4\pi} \frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \right)$$

dans laquelle on fait  $r = 0$ ,

$$c(\mathbf{k}) \simeq \int d^3r' u(\mathbf{r}') e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}'} \left( -\frac{1}{4\pi} \frac{e^{ikr'}}{r'} \right).$$

On exige en général que l'approximation de Born soit valable même à la limite  $k \rightarrow 0$ , ce qui représente le cas le plus contraignant, et dans le cas d'un potentiel à symétrie sphérique on impose

$$\begin{aligned}|c(0)| &= \left| \int_0^\infty r' dr' u(r') \right| \\ &= \frac{2m}{\hbar^2} \int_0^\infty r' dr' |U(r')| \ll 1.\end{aligned}$$

L'approximation de Born est une approximation de haute énergie, valable lorsque le potentiel d'interaction est faiblement perturbateur.

### Exemples d'application

Considérons comme premier exemple un puits carré attractif de rayon  $a$  et de profondeur  $-V_0 < 0$ . La condition de validité s'exprime par  $|c(0)| = \frac{2m}{\hbar^2} \frac{1}{2} V_0 a^2 \ll 1$ .

Il faut donc imposer la contrainte  $V_0 \ll \frac{\hbar^2}{ma^2}$ . Pour l'interpréter, on rappelle qu'un confinement dans une région d'extension spatiale  $a$  conduit à une énergie cinétique de l'ordre de  $T = \frac{\hbar^2}{2ma^2}$ . La condition de validité de l'approximation de Born s'écrit donc  $|V_0| \ll T$ , ce qui signifie que le potentiel d'interaction est trop faible pour pouvoir lier un état du faisceau incident. On peut donc procéder au calcul de la transformée de Fourier du potentiel,

$$\begin{aligned}\tilde{U}(\mathbf{q}) &= \frac{4\pi}{|\mathbf{q}|} \int_0^\infty dr' r' U(r') \sin |\mathbf{q}| r' \\ &= \frac{4\pi V_0}{q} \underbrace{\int_0^a r \sin qr \, dr}_{\frac{\sin qa}{q^2} - \frac{a \cos qa}{q}}.\end{aligned}$$

Finalement,

$$A'(\Omega) = \frac{2mV_0}{\hbar^2 q^2} \left( a \cos qa - \frac{\sin qa}{q} \right).$$

On a bien  $[A'(\Omega)] = \text{L}$ .

Un deuxième exemple est fourni par le potentiel gaussien attractif

$$U(r) = -V_0 e^{-(r/a)^2}$$

pour lequel la condition de validité s'exprime par  $|c(0)| = \frac{2mV_0}{\hbar^2} \int_0^\infty r e^{-(r/a)^2} dr = \frac{2m}{\hbar^2} \frac{1}{2} V_0 a^2 \ll 1$ . C'est la même contrainte que dans l'exemple précédent, ce qui est logique car l'échelle d'énergie est de nouveau fixée par  $V_0$  et celle des longueurs par  $a$ . La transformée de Fourier est donnée par

$$\tilde{U}(\mathbf{q}) = \frac{4\pi}{q} V_0 \int_0^\infty dr r e^{-r^2/a^2} \sin qr.$$

L'intégrale vaut  $\int_0^\infty r e^{-r^2/a^2} \frac{1}{2i}(e^{iqr} - e^{-iqr}) dr$ , or

$$\begin{aligned}\int_0^\infty r e^{-r^2/a^2} e^{iqr} dr &= -i \frac{d}{dq} \int_0^\infty e^{iqr - r^2/a^2} dr \\ &= -i \frac{d}{dq} \int_0^\infty e^{-q^2 a^2/4} e^{-(r/a - iqa/2)^2} dr \\ &= -i \frac{d}{dq} e^{-q^2 a^2/4} a \underbrace{\int_0^\infty e^{-u^2} du}_{\frac{1}{2}\sqrt{\pi}} \\ &= +i \frac{qa^3}{4} \sqrt{\pi} e^{-q^2 a^2/4}.\end{aligned}$$

Finalement on obtient

$$\begin{aligned}\tilde{U}(\mathbf{q}) &= \frac{4\pi V_0 q a^3}{q} \sqrt{\pi} e^{-q^2 a^2/4} \\ A'(\Omega) &= -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \pi^{3/2} V_0 a^3 e^{-q^2 a^2/4} \\ \frac{d^2\sigma}{d^2\Omega} &= \left(\frac{m a^2 V_0}{\hbar^2}\right)^2 \frac{\pi a^2}{4} e^{-q^2 a^2/2}.\end{aligned}$$

### Diffusion de Rutherford par l'approximation de Born

Le problème de la diffusion de Rutherford est celui du potentiel coulombien. C'est le potentiel d'interaction pertinent lorsque des particules chargées sont envoyées sur des atomes avec un paramètre d'impact typiquement inférieur au rayon de Bohr  $a_0$ , de sorte que l'effet des électrons de l'atome est négligeable. On a donc un potentiel perturbateur

$$U(r) = \frac{2Ze^2}{r}$$

dans les conditions de l'expérience historique au cours de laquelle les projectiles étaient des particules alpha.

La transformée de Fourier tridimensionnelle du potentiel coulombien n'est pas définie, on utilise donc un potentiel décroissant plus rapidement, comme le potentiel de Yukawa,

$$\begin{aligned}U_\mu(r) &= \frac{2Ze^2}{r} e^{-\mu r}, \quad \mu > 0, \\ \tilde{U}_\mu(\mathbf{q}) &= \frac{4\pi}{q} 2Ze^2 \int_0^\infty dr \sin qr e^{-\mu r} \\ &= \frac{4\pi}{q} 2Ze^2 \frac{1}{2i} \left( \left[ \frac{1}{iq - \mu} e^{(iq - \mu)r} \right]_0^\infty + \left[ \frac{1}{iq + \mu} e^{-(iq + \mu)r} \right]_0^\infty \right) \\ &= \frac{4\pi}{q} 2Ze^2 \frac{1}{2i} \frac{2iq}{\mu^2 + q^2} \\ &= \frac{4\pi}{q} 2Ze^2 \frac{q}{\mu^2 + q^2}\end{aligned}$$

Dans la limite  $\mu \rightarrow 0$ , on obtient le résultat simple suivant,

$$\tilde{U}_0(\mathbf{q}) = 4\pi \frac{2Ze^2}{q^2},$$

d'où l'on déduit la section efficace différentielle de Rutherford,

$$\frac{d^2\sigma}{d^2\Omega} = \left(\frac{4Z}{a_0}\right)^2 q^{-4},$$

qui s'exprime de la manière habituelle en notant que  $q = 2k \sin \frac{\theta}{2}$ ,

$$\frac{d^2\sigma}{d^2\Omega} = \left( \frac{Ze^2}{2E} \right)^2 \frac{1}{\sin^4 \frac{\theta}{2}}.$$

Il est remarquable d'obtenir la même expression que dans le cas classique.

**13****Règle d'or de Fermi et approximation de Born**

Nous avons établi la règle d'or de Fermi qui permet d'évaluer l'amplitude de transition entre états quantiques. On peut utiliser cette approche pour démontrer l'approximation de Born comme transition entre un état incident libre représenté par une onde plane et un état final de diffusion asymptotiquement libre également. Cette démonstration est instructive et permet d'établir un lien entre deux approches perturbatives.

On utilise la relation entre taux de transition et section efficace différentielle,

$$\frac{d^2\Gamma}{d^2\Omega} = \frac{2\pi}{\hbar} |U_{fi}|^2 \left( \frac{d^3n}{dE d^2\Omega} \right)_{E_f} = J_0 \frac{d^2\sigma}{d^2\Omega}.$$

Ici,  $U_{fi} = \langle f|U(\mathbf{r})|i\rangle$ , avec  $|i\rangle = |\varphi_{\mathbf{k}}\rangle$ ,  $\varphi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = \langle \mathbf{r}|\varphi_{\mathbf{k}}\rangle = L^{-3/2}e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$  et  $|f\rangle = |\psi_{\mathbf{k}'}\rangle \simeq |\varphi_{\mathbf{k}'}\rangle$  est une onde plane se propageant dans la direction  $\mathbf{k}'$ ,  $\varphi_{\mathbf{k}'}(\mathbf{r}) = \langle \mathbf{r}|\varphi_{\mathbf{k}'}\rangle = L^{-3/2}e^{i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{r}}$ . En représentation de position, le potentiel d'interaction s'écrit

$$\begin{aligned} U(\mathbf{r}) &= \int d^3r |\mathbf{r}\rangle U(\mathbf{r}) \langle \mathbf{r}| \\ U_{fi} &= \int d^3r \langle \varphi_{\mathbf{k}'}|\mathbf{r}\rangle U(\mathbf{r}) \langle \mathbf{r}|\varphi_{\mathbf{k}}\rangle \\ &= L^{-3} \int d^3r e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} U(\mathbf{r}) \\ &= L^{-3} \tilde{U}(\mathbf{q}), \quad \mathbf{q} = \mathbf{k}' - \mathbf{k} \end{aligned}$$

Le flux incident vaut  $J_0 = |\varphi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})|^2 \frac{\hbar k}{m} = L^{-3} \frac{\hbar k}{m}$ . On obtient alors

$$\frac{d^2\sigma}{d^2\Omega} = \frac{m}{\hbar k} L^3 \frac{2\pi}{\hbar} L^{-6} |\tilde{U}(\mathbf{q})|^2 \left( \frac{d^3n}{dE d^2\Omega} \right)_{E_f}.$$

Le nombre d'états dans  $d^3k$  est donné par

$$\begin{aligned} \frac{d^3n}{dE d^2\Omega} dE d^2\Omega &= \frac{k^2 dk d^2\Omega}{(2\pi/L)^3}, \\ \left( \frac{d^3n}{dE d^2\Omega} \right)_{E_f} &= \frac{L^3}{(2\pi)^3} \frac{mk'}{\hbar^2}. \end{aligned}$$

En combinant l'ensemble de ces résultats, on obtient finalement

$$\frac{d^2\sigma}{d^2\Omega} = \left( \frac{m}{2\pi\hbar^2} \right)^2 |\tilde{U}(\mathbf{q})|^2,$$

ce qui est bien le résultat dans l'approximation de Born.

**14****Méthode des ondes partielles**

La méthode des déphasages convient pour traiter les potentiels fortement perturbateurs à symétrie sphérique. Elle est fondée sur un développement de la fonction d'onde sur la base des harmoniques sphériques.

**Fonctions de Bessel et de Neumann sphériques**

Les solutions de l'équation de Schrödinger en potentiel nul sont les fonctions de Bessel et de Neumann sphériques (pour la partie radiale). On a

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{d\psi}{dr} \right) + \frac{L^2}{2mr^2} \psi = E\psi$$

où l'on pose  $\psi(r, \theta, \varphi) = R_{nl}(r)Y_l^m(\theta, \varphi)$  et  $R_{nl}(r) = \frac{1}{r}\chi_{nl}(r)$ , soit

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\chi}{dr^2} + \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2mr^2} \chi = E\chi.$$

On pose  $E = \hbar^2 k^2 / 2m$ , on obtient alors

$$\begin{aligned} -\frac{d^2\chi}{dr^2} + \frac{l(l+1)}{r^2} \chi &= k^2 \chi \\ -\frac{d^2\chi}{d\rho^2} + \frac{l(l+1)}{\rho^2} \chi &= \chi \end{aligned}$$

où la deuxième équation ne fait intervenir que des quantités sans dimension (sauf  $\chi$ ), avec  $\rho = kr$ . On factorise ensuite l'opérateur

$$O_l = -\frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{l(l+1)}{\rho^2}$$

au moyen des deux opérateurs différentiels du premier ordre, adjoints l'un de l'autre <sup>(33)</sup>

$$\begin{aligned} b_l^+ &= -\frac{d}{d\rho} + \frac{l}{\rho} \\ b_l &= \frac{d}{d\rho} + \frac{l}{\rho} \\ O_l &= b_l^+ b_l = b_{l+1} b_{l+1}^+ \end{aligned}$$

On en déduit en particulier que si  $\chi_l$  est une solution connue, c'est-à-dire telle que  $O_l \chi_l = \chi_l$ , alors on a aussi  $O_{l+1} b_{l+1}^+ \chi_l = b_{l+1}^+ \chi_l$ , ce qui signifie que  $b_{l+1}^+ \chi_l$  est une nouvelle solution du problème, associée à une valeur augmentée du moment cinétique et que l'on peut par conséquent noter  $\chi_{l+1}$  (à un facteur de normation près dont on ne se préoccupe pas ici). Si l'on trouve la solution correspondant à  $l = 0$ , on engendre les autres solutions par applications successives de l'opérateur échelle, comme dans le problème de l'oscillateur harmonique. Soit donc à résoudre l'équation

$$\frac{d^2 \chi_0}{d\rho^2} + \chi_0 = 0, \quad \text{d'où} \quad \chi_0(\rho) = \begin{cases} \sin \rho \\ -\cos \rho \end{cases}$$

Le choix de signe est conventionnel. En revenant à la partie radiale de la fonction d'onde on a

$$R_0(\rho) = A_0 \frac{\sin \rho}{\rho} - B_0 \frac{\cos \rho}{\rho} = A_0 j_0(\rho) + B_0 n_0(\rho)$$

ce qui définit les fonctions de Bessel et de Neumann sphériques d'ordre 0. On génère ensuite  $R_1(\rho) = A_0 j_0(\rho) + B_0 n_0(\rho)$  par les relations

$$\begin{aligned} j_1(\rho) &= \frac{1}{\rho} \left( -\frac{d}{d\rho} + \frac{1}{\rho} \right) (\rho j_0(\rho)) = \frac{\sin \rho}{\rho^2} - \frac{\cos \rho}{\rho} \\ n_1(\rho) &= \frac{1}{\rho} \left( -\frac{d}{d\rho} + \frac{1}{\rho} \right) (\rho n_0(\rho)) = -\frac{\sin \rho}{\rho} - \frac{\cos \rho}{\rho^2} \end{aligned}$$

---

<sup>(33)</sup>

$$\begin{aligned} \langle \chi_1 | b_l^+ | \chi_2 \rangle^* &= \left[ \int_0^\infty d\rho \chi_1^*(\rho) \left( -\frac{d}{d\rho} + \frac{l}{\rho} \right) \chi_2(\rho) \right]^* \\ &= \int_0^\infty d\rho \chi_1(\rho) \frac{l}{\rho} \chi_2^*(\rho) - \underbrace{\int_0^\infty d\rho \chi_1(\rho) \frac{d}{d\rho} \chi_2^*(\rho)}_{[\chi_1(\rho) \chi_2^*(\rho)]_0^\infty - \int_0^\infty d\rho \chi_2^*(\rho) \frac{d\chi_1}{d\rho}} \\ &= \int_0^\infty d\rho \chi_2^*(\rho) \left( \frac{d}{d\rho} + \frac{l}{\rho} \right) \chi_1(\rho) = \langle \chi_2 | b_l | \chi_1 \rangle \end{aligned}$$



puis les autres par itérations successives. Les fonctions de Bessel sphériques sont régulières à l'origine alors que les fonctions de Neumann sphériques sont singulières. On définit de même des combinaisons complexes, les fonctions de Hankel sphériques,

$$h_l^\pm(\rho) = j_l(\rho) \pm in_l(\rho).$$

Les deux premières par exemple sont données par

$$h_0^\pm(\rho) = \mp \frac{i}{\rho} e^{\pm i\rho},$$

$$h_1^\pm(\rho) = -\frac{1}{\rho} \left( 1 \pm \frac{i}{\rho} \right) e^{\pm i\rho}.$$

Certains comportements asymptotiques sont fort utiles, on en donne quelques-uns dans le tableau ci-dessous.

**Tableau 14.1** Comportements asymptotiques des fonctions de Bessel, de Neumann et de Hankel sphériques ( $(2l+1)!!$  est le produit des entiers impairs).

fonction	$r \rightarrow \infty$	$r \rightarrow 0$
Bessel	$j_\ell(\rho) \rightarrow \frac{1}{\rho} \sin(\rho - \ell\pi/2)$	$j_\ell(\rho) \sim \frac{\rho^\ell}{(2\ell+1)!!}$
Neumann	$n_\ell(\rho) \rightarrow -\frac{1}{\rho} \cos(\rho - \ell\pi/2)$	$n_\ell(\rho) \sim -(2\ell-1)!! \frac{1}{\rho^{\ell+1}}$
Hankel	$h_\ell^-(\rho) \rightarrow i \frac{1}{\rho} e^{-i(\rho - \ell\pi/2)}$	
Hankel	$h_\ell^+(\rho) \rightarrow -i \frac{1}{\rho} e^{i(\rho - \ell\pi/2)}$	

### Développement de l'onde plane en harmoniques sphériques

Pour une particule libre,  $V(\mathbf{r}) = 0$ , la partie angulaire de la solution de l'équation  $(\vec{\nabla}^2 + k^2)\varphi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = 0$  se développe donc sur la base des harmoniques sphériques et la partie radiale est donnée par une combinaison de fonctions de Bessel et de Neumann sphériques :

$$e^{i\mathbf{k}\mathbf{r} \cos \theta} = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l (a_{lm} j_l(kr) + b_{lm} n_l(kr)) Y_l^m(\theta, \varphi)$$

Comme la fonction  $e^{i\mathbf{k}\mathbf{r} \cos \theta}$  est régulière à l'origine, les  $b_{lm}$  sont tous nuls et comme  $e^{i\mathbf{k}\mathbf{r} \cos \theta}$  ne dépend pas de  $\varphi$ , on sélectionne  $m = 0$ , c'est-à-dire à une constante près les polynômes de Legendre,

$$e^{i\mathbf{k}\mathbf{r} \cos \theta} = \sum_{l=0}^{\infty} A_l j_l(kr) P_l(\cos \theta).$$

La détermination des constantes  $A_l$  se fait par projection sur la base des polynômes de Legendre,

$$\int_0^\pi \sin \theta \, d\theta \, e^{i\mathbf{k}\mathbf{r} \cos \theta} P_{l'}(\cos \theta) = \sum_l A_l j_l(kr) \frac{2}{2l+1} \delta_{l,l'}.$$

Le premier membre est intégré par parties pour donner

$$\underbrace{\left[ \frac{1}{ikr} e^{ikr \cos \theta} P_{l'}(\cos \theta) \right]_0^\pi}_{\frac{1}{ikr} (e^{ikr} - (-1)^{l'} e^{-ikr}} - \frac{1}{ikr} \int_0^\pi \sin \theta \, d\theta e^{ikr \cos \theta} \frac{dP_{l'}(\cos \theta)}{d \cos \theta}$$

En factorisant  $(-1)^{l'/2} = e^{i\pi l'/2}$ , le premier terme devient  $\frac{1}{ikr} e^{i\pi l'/2} 2i \sin(kr - l'\pi/2)$ . Quant au second, si l'on réitère l'intégration par parties, on obtient un terme en  $\frac{1}{(ikr)^2}$  qui, comme on va le voir, n'intervient pas dans la suite. On utilise ensuite l'expression asymptotique de  $j_l(kr) \sim (kr)^{-1} \sin(kr - l\pi/2)$ , de sorte que l'expression précédente, dans la limite  $r \rightarrow \infty$ , permet d'identifier

$$A_{l'}(2l' + 1) e^{i l' \pi / 2},$$

et on obtient finalement le développement de Rayleigh de l'onde plane en harmoniques sphériques :

$$\begin{aligned} e^{ikr \cos \theta} &= \sum_l (2l + 1) i^l j_l(kr) P_l(\cos \theta) \\ &= \sum_l \frac{1}{2} (2l + 1) i^l (h_l^-(kr) + h_l^+(kr)) P_l(\cos \theta). \end{aligned}$$

### Introduction des déphasages

On considère maintenant le cas d'une particule dans un état de diffusion par un potentiel arbitrairement fort, mais à symétrie sphérique. Cette contrainte de symétrie permet une approche exacte. Supposons pour simplifier le traitement du problème que la portée du potentiel soit finie, c'est-à-dire qu'au-delà d'une distance  $r = a$ , la solution de l'équation de Schrödinger est une onde plane que l'on compare à la particule totalement libre. La solution cherchée est une modification minimale du développement de Rayleigh qui doit satisfaire quelques conditions évidentes,

- i) la partie entrante (en  $h_l^-(kr)$ ) de l'onde n'est pas modifiée,
- ii) l'onde sortante n'est pas modifiée en module, donc elle est affectée au plus par un déphasage,
- iii) le déphasage, noté conventionnellement  $2\delta_l$ , dépend de la valeur du moment cinétique  $l$ .

Au total, pour satisfaire ces contraintes, on écrit la solution à l'extérieur de la zone d'action du potentiel sous la forme

$$\psi_{\mathbf{k}}^>(r, \theta) = \sum_l \frac{1}{2} (2l + 1) i^l (h_l^-(kr) + e^{2i\delta_l} h_l^+(kr)) P_l(\cos \theta).$$

Lorsque  $r \leq a$ , un traitement explicite adapté à la forme exacte du potentiel est nécessaire et en supposant ce traitement faisable, on peut mettre la fonction d'onde sous une forme analogue où seule la partie radiale est à déterminer,

$$\psi_{\mathbf{k}}^<(r, \theta) = \sum_l (2l + 1) i^l R_l(r) P_l(\cos \theta).$$

Les déphasages s'obtiennent explicitement grâce aux conditions de raccordement en  $r = a$ . Comme les polynômes de Legendre sont orthogonaux, les conditions de continuité se font valeur de  $l$  par valeur de  $l$ , soit

$$\alpha_l = \left( \frac{R'_l(r)}{R_l(r)} \right)_a = \left( \frac{h'_l{}^-(kr) + e^{2i\delta_l} h'_l{}^+(kr)}{h_l{}^-(kr) + e^{2i\delta_l} h_l{}^+(kr)} \right)_a.$$

Une expression équivalente exprimée en fonction des fonctions de Bessel et de Neumann et de leurs dérivées donne directement la valeur du déphasage,

$$\cot g \delta_l = \left( \frac{n'_l(kr) - \alpha_l n_l(kr)}{j'_l(kr) - \alpha_l j_l(kr)} \right)_a.$$

### Calcul de la section efficace

Le comportement asymptotique de l'onde diffusée est donné par

$$\psi_{\mathbf{k}}^>(r, \theta) \sim e^{ikr \cos \theta} + A_{\mathbf{k}}(\Omega) \frac{e^{ikr}}{r}$$

que l'on obtient en prenant la limite  $r \rightarrow \infty$  dans

$$\begin{aligned} \psi_{\mathbf{k}}^>(r, \theta) &= \sum_l \frac{1}{2} (2l+1) i^l (h_l^-(kr) + h_l^+(kr) - h_l^+(kr) + e^{2i\delta_l} h_l^+(kr)) P_l(\cos \theta) \\ &= e^{ikr \cos \theta} + \sum_l \frac{1}{2} (2l+1) i^l (e^{2i\delta_l} - 1) h_l^+(kr) P_l(\cos \theta) \\ &\sim e^{ikr \cos \theta} + \frac{1}{ik} \frac{e^{ikr}}{r} \sum_l \frac{1}{2} (2l+1) i^l (e^{2i\delta_l} - 1) e^{-il\pi/2} P_l(\cos \theta) \\ &\sim e^{ikr \cos \theta} + \frac{e^{ikr}}{r} \frac{1}{k} \sum_l \frac{1}{2} (2l+1) (-i) e^{i\delta_l} 2i \sin \delta_l P_l(\cos \theta), \end{aligned}$$

d'où l'on déduit l'amplitude différentielle de diffusion,

$$A_{\mathbf{k}}(\Omega) = \sum_l A_{\mathbf{k},l}(\Omega) = \frac{1}{k} \sum_l (2l+1) e^{i\delta_l} \sin \delta_l P_l(\cos \theta)$$

qui permet le calcul aisé de la section efficace totale

$$\begin{aligned} \sigma_{\mathbf{k}} &= \int_0^\pi |A_{\mathbf{k}}(\Omega)|^2 d\Omega \\ &= \frac{1}{k^2} \sum_l \sum_{l'} (2l+1)(2l'+1) e^{i(\delta_l - \delta_{l'})} \sin \delta_l \sin \delta_{l'} \underbrace{\int_0^\pi 2\pi \sin \theta d\theta P_l(\cos \theta) P_{l'}(\cos \theta)}_{\frac{4\pi}{2l+1} \delta_{l,l'}}. \end{aligned}$$

Il vient finalement un résultat très simple dans lequel les différentes valeurs de  $l$  apparaissent comme autant de canaux indépendants les uns des autres,

$$\sigma_{\mathbf{k}} = \frac{4\pi}{k^2} \sum_l (2l + 1) \sin^2 \delta_l.$$

En première approximation, on se limite souvent à la diffusion  $s$  pour laquelle le déphasage  $\delta_0$  est facile à calculer car il n'y a alors aucun potentiel centrifuge dans l'hamiltonien.

### Conditions de convergence des premiers déphasages

L'un des intérêts de la méthode des déphasages, outre le fait qu'elle est exacte, réside dans le fait que les déphasages ont un comportement monotone décroissant qui assure que la série des  $\sigma_l$  converge rapidement lorsque  $l$  augmente. On met en évidence cette propriété par un argument physique. Quelle que soit la valeur de l'énergie  $E_{\mathbf{k}} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$ , si grande soit-elle, il existe une distance  $r_{min}$  au-dessous de laquelle le potentiel centrifuge  $\frac{\hbar^2 l(l+1)}{2mr_{min}^2}$  domine  $E_{\mathbf{k}}$ . Cela signifie qu'à cette énergie <sup>(34)</sup> la particule incidente n'explore pas les régions de l'espace au dessous de  $r_{min} \simeq k^{-1} \sqrt{l(l+1)}$  (classiquement,  $r_{min}$  représente la distance minimale d'approche). Cette valeur dépend évidemment de  $l$ . Si la portée  $a$  du potentiel est plus petite que  $r_{min}$ , le potentiel est sans effet sur la diffusion et l'on doit avoir pour cette valeur de  $l$  et au-delà  $\delta_l \simeq 0$ , comme pour l'onde plane de référence. La même condition s'exprime de manière inverse : pour les valeurs de  $l$  telles que  $l(l+1) \geq (ka)^2$ , on a essentiellement  $\delta_l = 0$ . En particulier lorsque l'énergie de la particule incidente est assez petite pour que  $ka \ll 1$ , la valeur de  $l$  qui satisfait la condition  $l(l+1) \simeq (ka)^2$  est  $[k^2 a^2]$  (partie entière) et on peut en fait se limiter à la diffusion  $s$ ,  $\sigma_{\mathbf{k}} \simeq \frac{4\pi}{k^2} \sin^2 \delta_0$ .

### Lien avec l'approximation de Born

L'amplitude différentielle de diffusion que nous venons d'écrire de manière exacte sous la forme

$$A_{\mathbf{k}}(\Omega) = \frac{1}{k} \sum_l (2l + 1) e^{i\delta_l} \sin \delta_l P_l(\cos \theta)$$

pour un potentiel à symétrie sphérique peut également être décrite par l'approximation de Born si le potentiel est faiblement perturbateur, soit

$$A_{\mathbf{k}}(\Omega) = -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \tilde{V}(\mathbf{q})$$

avec  $\tilde{V}(\mathbf{q}) = \frac{4\pi}{q} \int_0^\infty r dr V(r) \sin qr$  et  $q = 2k \sin \frac{\theta}{2}$ . Cette dernière expression peut encore s'écrire sous la forme

$$A_{\mathbf{k}}(\Omega) \simeq \frac{1}{k} \sum_l (2l + 1) \zeta_l P_l(\cos \theta)$$

<sup>(34)</sup> On néglige ici le potentiel perturbateur, mais sa prise en compte ne modifierait que quantitativement le raisonnement.

où les  $\zeta_l$  sont les approximations de Born <sup>(35)</sup> de  $e^{i\delta_l} \sin \delta_l$ . On les détermine en utilisant encore une fois l'orthogonalité des polynômes de Legendre,

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \sin \theta \, d\theta P_{l'}(\cos \theta) A_{\mathbf{k}}(\Omega) &= \frac{2}{k} \zeta_{l'} \\ &= -\frac{m}{2\pi \hbar^2} \int_0^\pi \sin \theta \, d\theta P_{l'}(\cos \theta) \tilde{V}(\mathbf{q}) \\ &= -\frac{m}{2\pi \hbar^2} \int_0^\pi \sin \theta \, d\theta P_{l'}(\cos \theta) \frac{4\pi}{q} \int_0^\infty r \, dr V(r) \sin qr \end{aligned}$$

soit finalement

$$\zeta_l = -\frac{m}{2\pi \hbar^2} \frac{1}{2} k \int_0^\pi \sin \theta \, d\theta P_l(\cos \theta) \frac{4\pi}{2k \sin \theta/2} \int_0^\infty r \, dr V(r) \sin \left( 2kr \sin \frac{\theta}{2} \right),$$

et cela fait apparaître une structure oscillante dans l'approximation de Born en fonction de l'angle de diffusion,

$$A_{\mathbf{k}}(\Omega) \simeq \frac{1}{k} (\zeta_0 + 3\zeta_1 \cos \theta + \frac{5}{2}\zeta_2(\cos^2 \theta - 1) + \dots).$$

---

<sup>(35)</sup> H.A. Bethe and R. Jackiw, *Intermediate quantum mechanics*, Westview Press, Boulder 1997, p. 250.



## **Supersymétrie**





**15****Applications de la supersymétrie en mécanique quantique****Introduction**

La supersymétrie a été introduite en physique dans le domaine des particules élémentaires, un contexte où la notion de symétrie a été largement exploitée dans le but de caractériser les interactions fondamentales. Cette démarche a conjointement permis de “mettre un peu d’ordre” dans la multitude des particules élémentaires connues, les répertoriant au sein de multiplets dans des représentations irréductibles d’algèbres ou groupes de symétrie aux noms ésotériques  $U(1)$ ,  $SU(2)$ ,  $SU(3)$ ...

À un niveau bien plus élémentaire, l’introduction de la supersymétrie en mécanique quantique fournit un cadre conceptuel élégant pour déterminer les solutions analytiques de problèmes unidimensionnels. C’est le domaine auquel nous limiterons ici.

**Factorisation de l’équation de Schrödinger : l’exemple de l’oscillateur harmonique**

▷ *Opérateurs adimensionnés.* Une solution élégante au problème de l’oscillateur harmonique en mécanique quantique est obtenue par factorisation de l’hamiltonien unidimensionnel

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2} m \omega^2 x^2.$$

Les notations sont simplifiées par l’utilisation de coordonnées réduites :  $\hbar\omega$  ayant les dimensions d’une énergie, on peut écrire l’énergie potentielle sous la forme suivante :

$$V(x) = \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 = \hbar\omega \left( \frac{1}{2} \frac{m\omega}{\hbar} x^2 \right).$$

En notant  $b$  la quantité homogène à une longueur,  $b = (\frac{\hbar}{m\omega})^{1/2}$ , on introduit une variable sans dimension  $\xi = x/b$ . L'hamiltonien prend alors la forme

$$\hat{H} = \hbar\omega \left( \frac{1}{2}\xi^2 - \frac{1}{2} \frac{d^2}{d\xi^2} \right).$$

▷ *Opérateurs échelle.* L'opérateur différentiel "sans dimension"

$$\hat{h} = \frac{1}{2}\xi^2 - \frac{1}{2} \frac{d^2}{d\xi^2}$$

est ensuite factorisé en définissant les deux opérateurs du premier ordre  $\hat{a}$  et  $\hat{a}^+$  :

$$\begin{aligned} \hat{a} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \xi + \frac{d}{d\xi} \right) \\ \hat{a}^+ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \xi - \frac{d}{d\xi} \right) \end{aligned}$$

On a en effet

$$\begin{aligned} \hat{a}^+ \hat{a} &= \frac{1}{2} \left( \xi - \frac{d}{d\xi} \right) \left( \xi + \frac{d}{d\xi} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( \xi^2 - \left[ \frac{d}{d\xi}, \xi \right] - \frac{d^2}{d\xi^2} \right) \end{aligned}$$

et le commutateur  $\left[ \frac{d}{d\xi}, \xi \right]$  est calculé en faisant agir cet opérateur sur une fonction  $\chi(\xi)$  :

$$\left[ \frac{d}{d\xi}, f(\xi) \right] \chi(\xi) = \frac{df}{d\xi} \chi(\xi) \quad \text{d'où} \quad \left[ \frac{d}{d\xi}, \xi \right] = 1$$

d'où l'on déduit

$$\hat{a}^+ \hat{a} = \frac{1}{2} \left( \xi^2 - \frac{d^2}{d\xi^2} - 1 \right)$$

De même

$$\begin{aligned} \hat{a} \hat{a}^+ &= \frac{1}{2} \left( \xi^2 + \left[ \frac{d}{d\xi}, \xi \right] - \frac{d^2}{d\xi^2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( \xi^2 - \frac{d^2}{d\xi^2} + 1 \right) \end{aligned}$$

$$[\hat{a}^+, \hat{a}] = -1$$

La notation “1” dans les expressions précédentes tient lieu d’opérateur identité  $\hat{1}$ .  
Sous forme factorisée on a :

$$\hat{h} = \frac{1}{2}(\hat{a}^+\hat{a} + \hat{a}\hat{a}^+) = \hat{a}^+\hat{a} + \frac{1}{2}$$

et l’hamiltonien devient

$$\hat{H} = \hbar\omega \left( \hat{a}^+\hat{a} + \frac{1}{2} \right).$$

Les valeurs propres et les fonctions propres de  $\hat{H}$  se déduisent ainsi des propriétés des opérateurs  $\hat{a}^+$  et  $\hat{a}$ .

Les opérateurs  $\hat{a}^+$  et  $\hat{a}$  ne sont pas hermitiens, puisque  $(\hat{a})^\dagger = \hat{a}^+$  et  $(\hat{a}^+)^\dagger = \hat{a}$ .  
On peut en effet écrire :

$$\xi = \frac{x}{b} = \frac{\hat{x}}{b}$$

$$\frac{d}{d\xi} = b \frac{d}{dx} = \frac{ib}{\hbar} \hat{p}$$

où  $\hat{x}$  et  $\hat{p}$  sont les opérateurs “position” et “impulsion” en fonction desquels  $\hat{a}$  et  $\hat{a}^+$  deviennent

$$\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{\hat{x}}{b} + \frac{ib}{\hbar} \hat{p} \right)$$

$$\hat{a}^+ = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{\hat{x}}{b} - \frac{ib}{\hbar} \hat{p} \right)$$

soit

$$(\hat{a})^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{\hat{x}^\dagger}{b} - \frac{ib}{\hbar} \hat{p}^\dagger \right) = \hat{a}^+$$

$$(\hat{a}^+)^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{\hat{x}^\dagger}{b} - \frac{(-ib)}{\hbar} \hat{p}^\dagger \right) = \hat{a}$$

en utilisant le fait que les observables position et impulsion sont représentées par des opérateurs hermitiens :  $\hat{x}^\dagger = \hat{x}$  et  $\hat{p}^\dagger = \hat{p}$ .

▷ *Représentation “nombre”*. Formons l’opérateur  $\hat{n}$  et ses commutateurs :

$$\hat{n} = \hat{a}^+\hat{a} \quad , \quad [\hat{n}, \hat{a}^+] = \hat{a}^+ \quad , \quad [\hat{n}, \hat{a}] = -\hat{a}$$

Ce dernier est hermitien :  $(\hat{n})^\dagger = (\hat{a}^+\hat{a})^\dagger = (\hat{a})^\dagger(\hat{a}^+)^\dagger = \hat{n}$ . Les valeurs propres de  $\hat{n}$  sont donc réelles, on les note  $\varepsilon_n$  :

$$\hat{n}|n\rangle = \varepsilon_n|n\rangle \quad , \quad \varepsilon_n \in \mathbb{R} \text{ (a priori)}$$

où la notation  $|n\rangle$  représente les vecteurs propres normés communs à  $\hat{n}$  et  $\hat{H}$ .

La valeur propre  $\varepsilon_n$  est définie par l'élément de matrice

$$\begin{aligned}\varepsilon_n &= \langle n | \hat{n} | n \rangle \\ &= \langle n | \hat{a}^+ \hat{a} | n \rangle \\ &= \langle m | m \rangle\end{aligned}$$

où  $|m\rangle = \hat{a}|n\rangle$ . La norme  $\langle m | m \rangle$  étant positive, on en déduit que  $\varepsilon_n \in \mathbb{R}^+$ .

En calculant ensuite l'action de  $\hat{n}\hat{a}$  sur un vecteur  $|n\rangle$  :

$$\begin{aligned}\hat{n}\hat{a}|n\rangle &= ([\hat{n}, \hat{a}] + \hat{a}\hat{n})|n\rangle \\ &= (\hat{a}\hat{n} - \hat{a})|n\rangle \\ &= \hat{a}(\hat{n} - 1)|n\rangle \\ &= (\varepsilon_n - 1)\hat{a}|n\rangle\end{aligned}$$

on constate que, si  $|n\rangle$  est un vecteur propre de  $\hat{n}$  associé à une valeur propre  $\varepsilon_n$ , le vecteur  $|m\rangle = \hat{a}|n\rangle$  est alors lui aussi vecteur propre de  $\hat{n}$  associé à la valeur propre  $\varepsilon_m = \varepsilon_n - 1$ . En répétant cette opération, par applications successives de l'opérateur *échelle*  $\hat{a}$  sur un état  $|n\rangle$ , on obtient des vecteurs propres de  $\hat{n}$  que l'on peut noter  $|n-1\rangle, |n-2\rangle, \dots$  correspondants aux valeurs propres  $\varepsilon_n - 1, \varepsilon_n - 2, \dots$ . Ce processus génère nécessairement une valeur propre négative si  $\varepsilon_n$  est un réel non entier, ce que l'on exclut en imposant  $\varepsilon_n \in \mathbb{N}$ . On notera donc  $\varepsilon_n = n$  les valeurs propres de  $\hat{n}$  et l'on a

$$\hat{n}|n\rangle = n|n\rangle \quad , \quad n \in \mathbb{N}$$

Les valeurs propres de  $\hat{H}$  s'en déduisent immédiatement :

$$E_n = \hbar\omega \left( n + \frac{1}{2} \right).$$

On vient de montrer que  $\hat{a}|n\rangle$  est vecteur propre de  $\hat{n}$  avec la valeur propre  $n-1$ .  $\hat{a}|n\rangle$  est donc colinéaire (au sens de la multiplication par un complexe, pas par un réel) au vecteur  $|n-1\rangle$ , ce qui s'écrit :

$$\begin{aligned}\hat{a}|n\rangle &= \alpha_n |n-1\rangle \\ \langle n | \hat{a}^+ &= \langle n-1 | \alpha_n^*\end{aligned}$$

Le nombre complexe  $\alpha_n$  est déterminé par le produit scalaire

$$\langle n | \hat{a}^+ \hat{a} | n \rangle = \langle n | \hat{n} | n \rangle$$

soit

$$\alpha_n^* \alpha_n = n$$

On en déduit que  $\alpha_n = \sqrt{n}e^{i\varphi}$  et, la phase  $\varphi$  étant arbitraire, on peut la choisir nulle :

$$\hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle$$

Cela montre en particulier que  $\hat{a}$  détruit l'état fondamental

$$\hat{a}|0\rangle = 0$$

ce qui stoppe le processus d'échelle évoqué précédemment et assure que les valeurs propres de  $\hat{n}$  sont positives (zéro inclus).

Le spectre de  $\hat{n}$  n'est en revanche pas borné supérieurement et  $\hat{a}^+|n\rangle$  est vecteur propre de  $\hat{n}$  avec la valeur propre  $n + 1$  :

$$\begin{aligned}\hat{n}\hat{a}^+|n\rangle &= ([\hat{n}, \hat{a}^+] + \hat{a}^+\hat{n})|n\rangle \\ &= \hat{a}^+(\hat{n} + 1)|n\rangle \\ &= (n + 1)\hat{a}^+|n\rangle\end{aligned}$$

On peut donc écrire

$$\hat{a}^+|n\rangle = \beta_n|n + 1\rangle$$

et calculer  $\beta_n$  par l'élément de matrice

$$\begin{aligned}\beta_n^*\beta_n &= \langle n|\hat{a}\hat{a}^+|n\rangle \\ &= \langle n|[\hat{a}, \hat{a}^+] + \hat{a}^+\hat{a}|n\rangle \\ &= \langle n|1 + \hat{a}^+\hat{a}|n\rangle \\ &= n + 1\end{aligned}$$

d'où  $\beta_n = \sqrt{n + 1}e^{i\psi}$  où l'on peut choisir  $\psi = 0$  :

$$\hat{a}^+|n\rangle = \sqrt{n + 1}|n + 1\rangle$$

Les opérateurs  $\hat{a}$  et  $\hat{a}^+$  sont des opérateurs "échelle" qui permettent de "descendre" ou "monter" d'un niveau dans le spectre de l'oscillateur harmonique.

L'oscillateur harmonique dans l'état  $|n\rangle$  peut être considéré comme "peuplé" de  $n$  quanta  $\hbar\omega$ . L'état fondamental doit alors être interprété comme l'état du vide qui possède une énergie résiduelle  $E_{\text{vide}} = E_0$ . Chaque quantum  $\hbar\omega$  est créé par l'opérateur  $\hat{a}^+$ , qui fait passer de l'état  $|n\rangle$  à l'état  $|n + 1\rangle$ , et détruit par l'opérateur  $\hat{a}$ , qui fait transiter vers  $|n - 1\rangle$ . Cela justifie la terminologie d'opérateurs création et annihilation employée en seconde quantification. L'opérateur  $\hat{n}$  permet de dénombrer les quanta  $\hbar\omega$  occupant un niveau donné, il est appelé "nombre d'excitations".

▷ *Fonctions d'onde.* La représentation de l'oscillateur harmonique en termes d'opérateurs création et annihilation est également efficace pour la détermination des fonctions d'onde en représentation  $|x\rangle$ . On peut déduire un état  $|n\rangle$  de  $n$  applications successives de l'opérateur création sur l'état fondamental :

$$|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} (\hat{a}^+)^n |0\rangle$$

La fonction d'onde dans l'état fondamental en représentation  $|x\rangle$

$$\psi_0(x) = \langle x|0\rangle$$

est elle-même déterminée par l'équation  $\hat{a}|0\rangle = 0$ , soit

$$\frac{d}{d\xi}\psi_0(\xi) + \xi\psi_0(\xi) = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{d\psi_0(\xi)}{\psi_0(\xi)} = -\xi d\xi$$

qui s'intègre en

$$\psi_0(\xi) = Ae^{-\xi^2/2}$$

La constante  $A$  est imposée par la condition de normation

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi_0^*(x)\psi_0(x) dx = 1 = |A|^2 \int_{-\infty}^{+\infty} be^{-\xi^2} d\xi = |A|^2 b\sqrt{\pi}$$

$$\psi_0(x) = (\pi b^2)^{-1/4} e^{-x^2/2b^2}$$

En représentation  $|x\rangle$  on a

$$\psi_n(\xi) = \frac{1}{\sqrt{n!}} \frac{1}{\sqrt{2^n}} \left( \xi - \frac{d}{d\xi} \right)^n \psi_0(\xi)$$

et l'application de l'opérateur différentiel  $\hat{a}^+ = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \xi - \frac{d}{d\xi} \right)$  sur la fonction  $\psi_0(\xi)$  peut encore s'écrire, à l'aide de l'identité

$$\frac{d}{d\xi} \left( e^{-\xi^2/2} \psi_0(\xi) \right) = -\xi e^{-\xi^2/2} \psi_0(\xi) + e^{-\xi^2/2} \frac{d\psi_0(\xi)}{d\xi}$$

sous la forme

$$\hat{a}^+ \psi_0(\xi) = -\frac{1}{\sqrt{2}} e^{\xi^2/2} \frac{d}{d\xi} \left( e^{-\xi^2/2} \psi_0(\xi) \right).$$

Cette nouvelle expression permet une formulation compacte pour  $n$  applications successives de l'opérateur  $\hat{a}^+$  :

$$\begin{aligned} (\hat{a}^+)^2 \psi_0(\xi) &= -\frac{1}{\sqrt{2}} e^{\xi^2/2} \frac{d}{d\xi} \left[ e^{-\xi^2/2} \left( -\frac{1}{\sqrt{2}} \right) e^{\xi^2/2} \times \frac{d}{d\xi} \left( e^{-\xi^2/2} \psi_0(\xi) \right) \right] \\ &= \frac{(-1)^2}{\sqrt{2^2}} e^{\xi^2/2} \frac{d^2}{d\xi^2} \left( e^{-\xi^2/2} \psi_0(\xi) \right) \end{aligned}$$

$$(\hat{a}^+)^n \psi_0(\xi) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{2^n}} e^{\xi^2/2} \frac{d^n}{d\xi^n} \left( e^{-\xi^2/2} \psi_0(\xi) \right)$$

On en déduit la fonction d'onde dans l'état  $|n\rangle$  :

$$\langle x|n\rangle = \psi_n(\xi) = (\pi b^2)^{-1/4} \frac{(-1)^n}{\sqrt{2^n n!}} e^{\xi^2/2} \frac{d^n}{d\xi^n} (e^{-\xi^2})$$

qui prend une expression simple à l'aide des polynômes d'Hermite définis par :

$$H_n(\xi) = (-1)^n e^{\xi^2} \frac{d^n}{d\xi^n} (e^{-\xi^2})$$

$$\psi_n(\xi) = (\pi b^2)^{-1/4} \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} e^{-\xi^2/2} H_n(\xi).$$

### Partenaires supersymétriques et superpotentiel

▷ *Méthode générale.* On se propose de factoriser l'hamiltonien "unidimensionnel" suivant :

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{d\xi^2} + V(\xi)$$

où  $V(\xi)$  est une énergie potentielle quelconque. Il peut s'agir d'un hamiltonien effectivement unidimensionnel ( $\xi = x$ ) ou, par exemple, de la partie radiale de l'équation de Schrödinger pour un problème à symétrie sphérique ( $\xi = r$ ,  $\psi(\xi) = rR(r)$ ). Le potentiel  $V(r)$  inclut alors un terme centrifuge.

Les fonctions d'onde et les valeurs propres de  $\hat{H}$  correspondant aux états liés sont notées :

$$\hat{H}\psi_n(\xi) = E_n\psi_n(\xi) \quad n = 0, 1, 2 \dots$$

On définit le potentiel décalé d'une quantité égale à l'énergie dans l'état fondamental :

$$V_-(\xi) = V(\xi) - E_0$$

ainsi que l'hamiltonien correspondant :

$$\hat{H}_- = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{d\xi^2} + V_-(\xi)$$

Les fonctions propres de  $\hat{H}_-$  sont celles de  $\hat{H}$  et les niveaux d'énergie sont translatés de  $E_0$  :

$$\begin{aligned} \psi_n^{(-)}(\xi) &= \psi_n(\xi), \\ E_n^{(-)} &= E_n - E_0. \end{aligned}$$

Comme l'état fondamental de  $\hat{H}_-$  correspond à une énergie nulle,  $\hat{H}_-\psi_0(\xi) = 0$ , on peut écrire :

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{d\xi^2} \psi_0(\xi) + V_-(\xi) \psi_0(\xi) = 0$$

d'où l'on déduit

$$V_-(\xi) \psi_0(\xi) = \frac{\hbar^2}{2m} \psi_0''(\xi)$$

( $\psi_0''(\xi) \equiv \frac{d^2 \psi_0(\xi)}{d\xi^2}$ ). La fonction  $\psi_0(\xi)$ , représentant l'état fondamental, ne possède aucun nœud (en dehors éventuellement des conditions aux limites). On peut ainsi diviser cette expression par  $\psi_0(\xi)$  dans le domaine physique du problème pour obtenir

$$V_-(\xi) = \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\psi_0''(\xi)}{\psi_0(\xi)}$$

L'hamiltonien  $\hat{H}_-$  peut alors être écrit sous une forme faisant intervenir exclusivement la fonction d'onde de l'état fondamental :

$$\hat{H}_- = -\frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{d^2}{d\xi^2} - \frac{\psi_0''(\xi)}{\psi_0(\xi)} \right)$$

Cette expression est aisément factorisée en définissant les opérateurs

$$\begin{aligned} \hat{A}^+(\xi) &= -\frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \left( \frac{d}{d\xi} + \frac{\psi_0'(\xi)}{\psi_0(\xi)} \right) \\ \hat{A}^-(\xi) &= -\frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \left( -\frac{d}{d\xi} + \frac{\psi_0'(\xi)}{\psi_0(\xi)} \right) \end{aligned}$$

En effet, on a :

$$\begin{aligned} \hat{A}^+ \hat{A}^- &= \frac{\hbar^2}{2m} \left( -\frac{d^2}{d\xi^2} + \left[ \frac{d}{d\xi}, \frac{\psi_0'}{\psi_0} \right] + \left( \frac{\psi_0'}{\psi_0} \right)^2 \right) \\ &= \frac{\hbar^2}{2m} \left( -\frac{d^2}{d\xi^2} + \frac{d}{d\xi} \left( \frac{\psi_0'}{\psi_0} \right) + \left( \frac{\psi_0'}{\psi_0} \right)^2 \right) \\ &= \frac{\hbar^2}{2m} \left( -\frac{d^2}{d\xi^2} + \frac{\psi_0''}{\psi_0} \right) \end{aligned}$$

soit

$$\hat{A}^+ \hat{A}^- = \hat{H}_-$$



Le commutateur  $[\hat{A}^+, \hat{A}^-]$  vaut

$$[\hat{A}^+, \hat{A}^-] = \frac{\hbar^2}{m} \left( \frac{\psi_0''}{\psi_0} - \left( \frac{\psi_0'}{\psi_0} \right)^2 \right)$$

Définissons le *superpotentiel*  $\Phi(\xi)$  :

$$\Phi(\xi) = -\frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{d}{d\xi} \ln \psi_0(\xi) = -\frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{\psi_0'(\xi)}{\psi_0(\xi)}$$

Celui-ci est entièrement déterminé par la fonction d'onde dans l'état fondamental ( $\psi_0(\xi)$  n'étant jamais nulle,  $\Phi(\xi)$  ne présente aucune divergence). Inversement, la donnée d'un superpotentiel  $\Phi(\xi)$  détermine la fonction propre dans l'état fondamental :

$$\psi_0(\xi) = \exp \left[ -\frac{\sqrt{2m}}{\hbar} \int \Phi(\xi) d\xi \right]$$

et définit de même le potentiel  $V_-(\xi)$  :

$$\begin{aligned} V_-(\xi) &= \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\psi_0''}{\psi_0} = \frac{\hbar^2}{2m} \left\{ \left( \frac{\psi_0'}{\psi_0} \right)^2 + \left[ \frac{d}{d\xi}, \frac{\psi_0'}{\psi_0} \right] \right\} \\ &= \frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{\psi_0'}{\psi_0} \right)^2 + \frac{\hbar^2}{2m} \frac{d}{d\xi} \left( \frac{\psi_0'}{\psi_0} \right) \\ &= \Phi^2(\xi) - \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{d}{d\xi} \Phi(\xi) \end{aligned}$$

ainsi que les opérateurs  $\hat{A}^+$  et  $\hat{A}^-$  et leur commutateur :

$$\hat{A}^\pm = \mp \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{d}{d\xi} + \Phi(\xi)$$

$$[\hat{A}^+, \hat{A}^-] = -2 \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \Phi'(\xi)$$

Ces expressions suggèrent la définition d'un nouveau potentiel :

$$V_+(\xi) = \Phi^2(\xi) + \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \Phi'(\xi)$$

ainsi que d'un nouvel hamiltonien :

$$\hat{H}_+ = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{d\xi^2} + V_+(\xi)$$

qui s'écrit en fonction de  $\hat{H}_-$  :

$$\begin{aligned}\hat{H}_+ &= -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{d\xi^2} + \Phi^2(\xi) + \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \Phi'(\xi) \\ &= \hat{H}_- + 2\frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \Phi'(\xi) \\ &= \hat{H}_- - [\hat{A}^+, \hat{A}^-]\end{aligned}$$

soit

$$\hat{H}_+ = \hat{A}^- \hat{A}^+$$

Les deux opérateurs  $\hat{H}_+$  et  $\hat{H}_-$  ne sont pas totalement étrangers l'un à l'autre, puisque l'on met aisément en évidence une correspondance entre leurs spectres.

Introduisons pour cela les notations :

$$\begin{aligned}\hat{H}_- \psi_n^{(-)}(\xi) &= E_n^{(-)} \psi_n^{(-)}(\xi) \\ \hat{H}_+ \psi_n^{(+)}(\xi) &= E_n^{(+)} \psi_n^{(+)}(\xi)\end{aligned}$$

Comme  $\hat{H}_- = \hat{A}^+ \hat{A}^-$  et  $\hat{H}_+ = \hat{A}^- \hat{A}^+$ , on peut former

$$\begin{aligned}\hat{H}_-(\hat{A}^+ |\psi_n^{(+)}\rangle) &= \hat{A}^+ \hat{A}^- \hat{A}^+ |\psi_n^{(+)}\rangle \\ &= \hat{A}^+ \hat{H}_+ |\psi_n^{(+)}\rangle \\ &= E_n^{(+)} (\hat{A}^+ |\psi_n^{(+)}\rangle)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\hat{H}_+(\hat{A}^- |\psi_n^{(-)}\rangle) &= \hat{A}^- \hat{A}^+ \hat{A}^- |\psi_n^{(-)}\rangle \\ &= \hat{A}^- \hat{H}_- |\psi_n^{(-)}\rangle \\ &= E_n^{(-)} (\hat{A}^- |\psi_n^{(-)}\rangle)\end{aligned}$$

Rappelons que  $E_0^{(-)} = 0$ . Pour  $n \neq 0$ , on constate que  $\hat{A}^- |\psi_n^{(-)}\rangle$  est état propre de  $\hat{H}_+$  avec la valeur propre  $E_n^{(-)}$ . On peut noter  $\hat{A}^- |\psi_n^{(-)}\rangle = |\psi_m^{(+)}\rangle$ . On a donc  $E_m^{(+)} = E_n^{(-)}$ , ce qui prouve qu'en dehors de l'état fondamental  $E_0^{(-)}$ , tous les niveaux de  $\hat{H}_-$  et de  $\hat{H}_+$  coïncident, ce que l'on peut écrire :

$$E_n^{(+)} = E_{n+1}^{(-)}$$

Notons que nous avons assuré  $E_0^{(-)} = 0$  par construction. Dans le cas général où l'on se donne un superpotentiel  $\Phi(\xi)$ , trois cas de figure peuvent se présenter :

• S'il existe un état propre normalisable de  $\hat{H}_-$ , déterminé par  $\hat{A}^-|\psi_0^{(-)}\rangle = 0$ , alors  $\hat{A}^+\hat{A}^-|\psi_0^{(-)}\rangle = 0$  et  $|\psi_0^{(-)}\rangle$  correspond à l'état fondamental d'énergie nulle  $E_0^{(-)} = 0$  de  $\hat{H}_-$ . Inversement, si  $E_0^{(-)} = 0$ , la valeur nulle de l'élément de matrice  $\langle\psi_0^{(-)}|\hat{A}^+\hat{A}^-|\psi_0^{(-)}\rangle = 0$  assure que  $\hat{A}^-|\psi_0^{(-)}\rangle = 0$ . Toutes les valeurs propres de  $\hat{H}_-$  autres que l'état fondamental  $E_0^{(-)}$  sont aussi valeurs propres de  $\hat{H}_+$ .

• En revanche, s'il existe un état propre normalisable de  $\hat{H}_+$ , solution de  $\hat{A}^+|\psi_0^{(+)}\rangle = 0$ , le raisonnement précédent peut être reproduit *mutatis mutandis*.

• On peut enfin envisager qu'il n'existe pas d'état normalisable solution de  $\hat{A}^-|\psi\rangle = 0$  ou de  $\hat{A}^+|\psi\rangle = 0$ . Dans ce cas, les deux spectres commencent à une valeur strictement positive et se correspondent deux à deux.

On peut déterminer la forme du superpotentiel dans chacune des trois situations précédentes par des considérations très générales. La première situation correspond au cas d'un état fondamental  $E_0^{(-)} = 0$  associé à une fonction d'onde  $\psi_0^{(-)}(\xi)$  donnée par :

$$\psi_0^{(-)}(\xi) \sim \exp -\frac{\sqrt{2m}}{\hbar} \int_0^\xi \Phi(x) dx$$

Pour que celle-ci soit normalisable, on impose la condition suivante (en omettant le facteur positif  $\sqrt{2m}/\hbar$ ) :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\xi \exp -2 \int_0^\xi \Phi(x) dx < \infty$$

ce qui exige les comportements asymptotiques suivants :

$$\lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} \int_0^\xi \Phi(x) dx \rightarrow +\infty$$

afin d'assurer une décroissance exponentielle à l'infini et une convergence de cette intégrale. En nous limitant au cas d'un superpotentiel non oscillant à l'infini et ne présentant pas de singularité, il existe toujours une borne finie  $A$  telle que, pour  $x > A$ ,  $\Phi(x)$  reste de signe constant. Ainsi

$$\lim_{\xi \rightarrow +\infty} \int_0^\xi \Phi(x) dx = \int_0^A \Phi(x) dx + \lim_{\xi \rightarrow \infty} \int_A^\xi \Phi(x) dx \rightarrow +\infty$$

La première intégrale du membre de droite apporte une contribution finie. Le comportement asymptotique divergent est donc assuré par la seconde intégrale, ce qui exige  $\Phi(x) > 0$  pour  $x > A$ . De même, si  $\Phi(x)$  est de signe constant pour  $x < B$  où  $B$  a une valeur finie, un argument identique impose que  $\Phi(x)$  soit négatif pour  $x < B$ .

Si aucune des deux fonctions

$$\exp -\frac{\sqrt{2m}}{\hbar} \int_0^\xi \Phi(x) dx \quad \text{et} \quad \exp +\frac{\sqrt{2m}}{\hbar} \int_0^\xi \Phi(x) dx$$

n'est normalisable, cela correspond à un superpotentiel de signe identique en  $\pm\infty$ .

Revenons à la situation initiale. La correspondance entre les fonctions d'onde se fait par l'intermédiaire des opérateurs  $\hat{A}^\pm$  :

$$\hat{A}^- \psi_{n+1}^{(-)}(\xi) \sim \psi_n^{(+)}(\xi)$$

Le coefficient est déterminé, comme dans le cas de l'oscillateur harmonique, en formant la norme

$$\begin{aligned} \|\hat{A}^- |\psi_{n+1}^{(-)}\rangle\|^2 &= \langle \psi_{n+1}^{(-)} | \hat{A}^+ \hat{A}^- | \psi_{n+1}^{(-)} \rangle \\ &= \langle \psi_{n+1}^{(-)} | \hat{H}_- | \psi_{n+1}^{(-)} \rangle \\ &= E_{n+1}^{(-)} \end{aligned}$$

$$\| |\psi_n^{(+)}\rangle \|^2 = 1$$

d'où

$$\psi_n^{(+)}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{E_{n+1}^{(-)}}} \hat{A}^-(\xi) \psi_{n+1}^{(-)}(\xi)$$

On obtient de même :

$$\psi_{n+1}^{(-)}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{E_n^{(+)}}} \hat{A}^+(\xi) \psi_n^{(+)}(\xi)$$

La connaissance d'un des deux spectres et des vecteurs propres normés correspondants détermine donc automatiquement le second spectre et les fonctions d'onde normées associées par l'intermédiaire des opérateurs  $\hat{A}^\pm$ .

Dans un système unidimensionnel, la fonction d'onde  $\psi_{n+1}^{(-)}$  possède  $n+1$  nœuds,  $\psi_n^{(+)}$  en possède  $n$ . Les opérateurs  $\hat{A}^-$  et  $\hat{A}^+$  apparaissent ainsi comme des opérateurs qui annihilent ou créent un nœud. Les hamiltoniens  $\hat{H}_-$  et  $\hat{H}_+$  ayant des spectres identiques (au fondamental  $E_0^{(-)}$  près), ils sont dits *partenaires supersymétriques*.

▷ *Exemple de construction d'un partenaire supersymétrique.* La méthode développée au paragraphe précédent permet de déduire d'un modèle soluble la solution de l'hamiltonien superpartenaire correspondant. Considérons à titre d'exemple le cas du puits rectangulaire infini de largeur  $L$ . L'équation de Schrödinger s'écrit

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \psi_n(x) = E_n \psi_n(x) \quad 0 < x < L$$

ou encore

$$\psi_n''(x) + k_n^2 \psi_n(x) = 0 \quad , \quad k_n^2 = \frac{2mE_n}{\hbar^2}$$

Elle admet pour solution générale

$$\psi_n(x) = A_n \cos k_n x + B_n \sin k_n x$$

Les conditions aux limites déterminent la quantification du vecteur d'onde et la forme des fonctions d'onde

$$\psi_n(0) = 0 \text{ soit } A_n = 0$$

$$\psi_n(L) = 0 \text{ soit } k_n L = n\pi, \quad n \in \mathbb{N}^*$$

La valeur  $n = 0$  est exclue, car elle conduit à une fonction d'onde identiquement nulle sans intérêt physique. En ajoutant de plus la condition de normation

$$\int_0^L \psi_n^*(x) \psi_n(x) dx = 1$$

on obtient finalement

$$E_n = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2mL^2} (n+1)^2, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{(n+1)\pi x}{L}$$

Le décalage sur l'indice  $n$  permet de noter  $E_0$  l'état fondamental.

Le superpotentiel est défini à partir de  $\psi_0(x)$  :

$$E_0 = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2mL^2}, \quad \psi_0(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{\pi x}{L}$$

d'où

$$\psi_0'(x) = \frac{\pi}{L} \sqrt{\frac{2}{L}} \cos \frac{\pi x}{L}$$

qui donne :

$$\Phi(x) = -\frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{\pi}{L} \cotg \frac{\pi x}{L} \quad 0 < x < L$$

On en déduit le potentiel superpartenaire

$$\begin{aligned} V_+(x) &= \frac{\hbar^2 \pi^2}{2mL^2} \cotg^2 \frac{\pi x}{L} - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\pi}{L} \frac{(-1)}{\sin^2 \frac{\pi x}{L}} \frac{\pi}{L} \\ &= \frac{\hbar^2 \pi^2}{2mL^2} \left( \frac{2}{\sin^2 \pi x/L} - 1 \right) \end{aligned}$$

ainsi que l'hamiltonien correspondant :

$$\widehat{\mathcal{H}}_+ = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{\hbar^2 \pi^2}{mL^2} \left( \frac{1}{\sin^2 \pi x/L} - \frac{1}{2} \right)$$

Les niveaux d'énergie sont donnés par

$$E_n^{(+)} = E_{n+1}^{(-)} = E_{n+1} - E_0 = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2mL^2} [(n+2)^2 - 1]$$

et les fonctions d'onde associées par

$$\begin{aligned} \psi_n^{(+)}(x) &= \frac{1}{\sqrt{E_{n+1}^{(-)}}} \left( \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{d}{dx} + (-) \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{\pi}{L} \cotg \frac{\pi x}{L} \right) \psi_{n+1}^{(-)}(x) \\ &= \left( \frac{\hbar^2 \pi^2}{2mL^2} [(n+2)^2 - 1] \right)^{-1/2} \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \sqrt{\frac{2}{L}} \left( \frac{d}{dx} - \frac{\pi}{L} \cotg \frac{\pi x}{L} \right) \sin \frac{(n+2)\pi x}{L} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{L} [(n+2)^2 - 1]^{-1/2} \left\{ (n+2) \cos \frac{(n+2)\pi x}{L} - \sin \frac{(n+2)\pi x}{L} \cotg \frac{\pi x}{L} \right\} \end{aligned}$$

L'état fondamental et le premier niveau excité sont en particulier donnés par :

$$\begin{aligned} \psi_0^{(+)}(x) &= \frac{1}{L} \sqrt{\frac{2}{3}} \left[ 2 \cos \frac{2\pi x}{L} - 2 \cos^2 \frac{\pi x}{L} \right] \\ &= -\frac{1}{L} \frac{1}{\sqrt{6}} \sin^2 \frac{\pi x}{L} \end{aligned}$$

$$\psi_1^{(+)}(x) = \frac{1}{2L} \left[ 3 \cos \frac{3\pi x}{L} - \sin \frac{3\pi x}{L} \cotg \frac{\pi x}{L} \right]$$

### Facteur de Landé de l'électron

Considérons le problème de Landau d'un électron doté d'un spin  $\hat{\mathbf{s}} = \frac{1}{2} \hbar \hat{\boldsymbol{\sigma}}$  et placé dans un champ magnétique uniforme  $\mathbf{B} = B_0 \mathbf{u}_z$ . L'opérateur vectoriel  $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$  est défini à partir des matrices de Pauli :

$$\vec{\sigma} = \hat{\sigma}_x \mathbf{u}_x + \hat{\sigma}_y \mathbf{u}_y + \hat{\sigma}_z \mathbf{u}_z$$

$$\hat{\sigma}_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \hat{\sigma}_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \hat{\sigma}_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

En physique classique, à une particule de charge  $q$ , de masse  $m$  et de moment cinétique  $\mathbf{L}$ , on associe un moment magnétique  $\boldsymbol{\mu} = \frac{q}{2m} \mathbf{L} = \gamma_0 \mathbf{L}$  en assimilant la

trajectoire circulaire de la charge  $q$  à une petite boucle de courant.  $\gamma_0$  est le rapport gyromagnétique.

En mécanique quantique, on introduit une relation équivalente en remplaçant les vecteurs par des opérateurs et en introduisant un facteur  $g$  qui dépend de la particule, appelé facteur de Landé, et qui n'est pas déterminé dans le cadre d'une théorie non relativiste (cf le chapitre sur l'équation de Dirac) :  $\hat{\boldsymbol{\mu}} = g\gamma_0\hat{\mathbf{L}}$ . Dans le cas de l'électron de spin  $\hat{\mathbf{s}}$ , on obtient :

$$\hat{\boldsymbol{\mu}}_e = g \left( -\frac{|q|}{2m} \right) \frac{1}{2} \hbar \hat{\boldsymbol{\sigma}} = -\frac{1}{2} g \mu_B \hat{\boldsymbol{\sigma}}$$

où  $\mu_B = \frac{|q_e| \hbar}{2m_e}$  est le magnéton de Bohr, unité naturelle de moment magnétique à l'échelle atomique en mécanique quantique. Le facteur de Landé de l'électron a été initialement introduit pour des raisons expérimentales :  $g \simeq 2$ . Le problème présente alors une propriété de supersymétrie intéressante (quoique anecdotique !). C'est tout de même la première situation réaliste dans laquelle des propriétés de supersymétrie se manifestent.

L'interaction du moment magnétique avec un champ  $\mathbf{B}$  dirigé suivant l'axe  $z$  est décrite par une énergie potentielle

$$\hat{U}_B = -\hat{\boldsymbol{\mu}}_e \mathbf{B} = \frac{1}{2} g \mu_B B \hat{\sigma}_z$$

Elle dépend de l'état de spin  $\uparrow$  et  $\downarrow$  de l'électron suivant la direction  $Oz$  du champ.

On représente alors l'électron par un spineur à deux composantes :

$$\langle \mathbf{r} | \Psi \rangle = \psi_{\uparrow}(\mathbf{r}) | \uparrow \rangle + \psi_{\downarrow}(\mathbf{r}) | \downarrow \rangle, \quad | \uparrow \rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad | \downarrow \rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\text{ou } \Psi(\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} \psi_{\uparrow}(\mathbf{r}) \\ \psi_{\downarrow}(\mathbf{r}) \end{pmatrix}$$

$\psi_{\uparrow}(\mathbf{r})$  (respectivement  $\psi_{\downarrow}(\mathbf{r})$ ) étant la fonction d'onde spatiale de l'électron dans l'état propre associé à la valeur propre  $+1$  (respectivement  $-1$ ) de  $\hat{\sigma}_z$ .

Pour écrire l'équation de Schrödinger, on rappelle qu'en mécanique classique on peut associer à une charge  $q$  placée dans un champ électromagnétique  $(\mathbf{E}, \mathbf{B})$  dérivant des potentiels  $(\phi, \mathbf{A})$

$$\mathbf{E} = -\mathbf{grad} \phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t},$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{rot} \mathbf{A}$$

un lagrangien

$$L = \frac{1}{2} m \mathbf{v}^2 - q(\phi(\mathbf{r}, t) - \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \mathbf{v}).$$

En appliquant les équations de Lagrange

$$\sum_i \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} \right) = 0$$

au lagrangien, on obtient effectivement la force de Lorentz :

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \wedge \mathbf{B}).$$

En posant  $\boldsymbol{\pi} = m\mathbf{v}$  la quantité de mouvement, on obtient l'impulsion canonique :

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = m\dot{q}_i + qA_i$$

$$\mathbf{p} = \boldsymbol{\pi} + q\mathbf{A}$$

L'hamiltonien classique se déduit d'une transformation de Legendre :

$$H = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L = \frac{\boldsymbol{\pi}^2}{2m} + q\phi$$

soit, en fonction de l'impulsion :

$$H = \frac{1}{2m} (\mathbf{p} - q\mathbf{A})^2 + q\phi.$$

En vertu du principe de correspondance, on obtient l'hamiltonien du système quantique en représentation  $\mathbf{r}$  en remplaçant  $\mathbf{p}$  par  $\hat{\mathbf{p}} = -i\hbar\vec{\nabla}$  et  $\mathbf{r}$  par  $\hat{\mathbf{r}} = \mathbf{r}$ , soit :

$$\hat{H} = \frac{1}{2m} \left( -i\hbar\vec{\nabla} - q\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \right)^2 + q\phi(\mathbf{r}, t).$$

L'équation du mouvement prend en compte l'énergie d'interaction, elle s'écrit sous la forme :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2m} \left( -i\hbar\vec{\nabla} - q\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \right)^2 \hat{\mathbf{1}} \Psi(\mathbf{r}, t) + q\phi(\mathbf{r}, t) \hat{\mathbf{1}} \Psi(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{2}g\mu_B B \hat{\sigma}_z \Psi(\mathbf{r}, t) \\ = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \hat{\mathbf{1}} \Psi(\mathbf{r}, t) \end{aligned}$$

Il s'agit de l'équation de Pauli rencontrée plus tôt dans ce cours ( $\hat{\mathbf{1}}$  est la matrice unité ( $2 \times 2$ )).

Dans le problème considéré, le potentiel électrostatique est constant et peut être choisi nul et, dans le cas des états stationnaires, l'équation de Pauli devient :

$$\frac{1}{2m} \left( -i\hbar\vec{\nabla} - q\mathbf{A}(\mathbf{r}) \right)^2 \hat{\mathbf{1}} \begin{pmatrix} \psi_{\uparrow}(\mathbf{r}) \\ \psi_{\downarrow}(\mathbf{r}) \end{pmatrix} + \frac{1}{2}g\mu_B B \hat{\sigma}_z \begin{pmatrix} \psi_{\uparrow}(\mathbf{r}) \\ \psi_{\downarrow}(\mathbf{r}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_{\uparrow} & \psi_{\uparrow}(\mathbf{r}) \\ E_{\downarrow} & \psi_{\downarrow}(\mathbf{r}) \end{pmatrix}$$

D'autre part, un champ uniforme  $\mathbf{B} = B\mathbf{u}_z$  dérive d'un potentiel vecteur de la forme  $\mathbf{A}' = \frac{1}{2}\mathbf{B} \wedge \mathbf{r} = \frac{1}{2}B(x\mathbf{u}_y - y\mathbf{u}_x)$  (jauge cylindrique). En faisant un choix de jauge tel que  $\mathbf{A} = \mathbf{A}' - \vec{\nabla}\Lambda$  où  $\Lambda(x, y) = \frac{1}{4}B(x^2 + y^2)$ , on obtient un potentiel vecteur  $\mathbf{A} = -By\mathbf{u}_x$  qui présente l'avantage de ne dépendre que d'une seule variable spatiale  $y$  (on parle de jauge de Landau).



L'équation de Pauli devient :

$$\frac{1}{2m} \left[ (\hat{p}_x - |q| By)^2 + \hat{p}_y^2 + \hat{p}_z^2 \right] \hat{\mathbf{1}} \begin{pmatrix} \psi_{\uparrow}(\mathbf{r}) \\ \psi_{\downarrow}(\mathbf{r}) \end{pmatrix} + \frac{1}{2} g \mu_B B \hat{\sigma}_z \begin{pmatrix} \psi_{\uparrow}(\mathbf{r}) \\ \psi_{\downarrow}(\mathbf{r}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_{\uparrow} & \psi_{\uparrow}(\mathbf{r}) \\ E_{\downarrow} & \psi_{\downarrow}(\mathbf{r}) \end{pmatrix}$$

où  $\hat{p}_\alpha = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \alpha}$ . On peut l'écrire sous la forme de deux équations stationnaires découplées

$$\hat{H}_{\pm} \psi^{(\pm)}(\mathbf{r}) = E^{(\pm)} \psi^{(\pm)}(\mathbf{r})$$

avec

$$\hat{H}_{\pm} = \frac{1}{2m} \left[ (\hat{p}_x - |q| By)^2 + \hat{p}_y^2 + \hat{p}_z^2 \right] \pm \frac{1}{2} g \mu_B B$$

$$\psi^{(\pm)}(\mathbf{r}) = \psi_{\uparrow, \downarrow}(\mathbf{r})$$

$$E^{(\pm)} = E_{\uparrow, \downarrow}$$

Chacun des hamiltoniens  $\hat{H}_{\pm}$  commute avec  $\hat{p}_x$  et  $\hat{p}_z$ . On peut donc chercher des fonctions d'onde sous la forme d'états propres communs à  $\hat{H}_{\pm}$ ,  $\hat{p}_x$  et  $\hat{p}_z$  :

$$\psi^{(\pm)}(x, y, z) = \exp\left(\frac{i}{\hbar}(p_x x + p_z z)\right) \chi(y)$$

où  $p_x$  et  $p_z$  sont les valeurs propres de  $\hat{p}_x$  et  $\hat{p}_z$ .

À l'aide de l'expression  $\hat{p}_y = -i\hbar \frac{\partial}{\partial y}$ , on obtient :

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \chi}{dy^2} + \frac{1}{2} m \left( \frac{|q| B}{m} \right)^2 \left( y - \frac{p_x}{|q| B} \right)^2 \chi(y) = \left( E^{(\pm)} - \frac{p_z^2}{2m} \mp \frac{1}{2} g \mu_B B \right) \chi(y)$$

On reconnaît l'équation d'un oscillateur harmonique de pulsation  $\omega_c = \frac{|q| B}{m}$ , décalé par rapport à l'origine de  $y_0 = \frac{p_x}{|q| B}$ , et dont les niveaux d'énergie sont donnés par :

$$\left( n + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega_c = E_n^{(\pm)} - \frac{p_z^2}{2m} \mp \frac{1}{2} g \mu_B B$$

Dans le cas d'un mouvement plan,  $p_z = 0$ , et on obtient les niveaux

$$E_{\uparrow, \downarrow} = E_n^{(\pm)} = \left( n + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega_c \pm \frac{1}{4} g \hbar \omega_c$$

Les niveaux d'énergie  $E_{\uparrow}$  et  $E_{\downarrow}$  constituent deux spectres d'oscillateurs harmoniques décalés l'un par rapport à l'autre de  $2 \times \frac{1}{4} g = \frac{1}{2} g$ . Si  $g \neq 2$ , les deux spectres ne coïncident pas, alors que pour  $g = 2$ , les niveaux coïncident à l'exception de  $E_0^{(-)}$ . Les hamiltoniens  $\hat{H}_{\uparrow}$  et  $\hat{H}_{\downarrow}$  sont alors partenaires supersymétriques l'un de l'autre.

On sait qu'en réalité le facteur de Landé de l'électron n'est pas exactement égal à 2<sup>(36)</sup>, la supersymétrie n'est donc en réalité qu'approximative.

### Digression.

L'écriture de l'équation de Schrödinger sous la forme

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dx^2} + \left( \Phi^2(x) - \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \Phi'(x) \right) \psi(x) = E\psi(x)$$

n'est pas nouvelle. Au XVIII<sup>ème</sup> siècle, Riccati<sup>(\*)</sup> propose une solution de l'équation différentielle non linéaire suivante :

$$w'(x) + q(x)w^2(x) + p(x) = 0$$

Le changement de variable

$$q(x)w(x) = \frac{y'(x)}{y(x)} = \frac{d}{dx} \ln y(x)$$

conduit en effet à une équation différentielle linéaire du second ordre :

$$\left( \frac{1}{q(x)} y'(x) \right)' + p(x)y(x) = 0$$

Si  $q(x) = -\frac{2m}{\hbar^2}$  et  $p(x) = V_-(x)$ , cette équation n'est autre que l'équation de Schrödinger pour la fonction d'onde dans l'état fondamental  $y(x) = \psi_0(x)$  dans un potentiel  $V_-(x)$ . On a alors :

$$V_-(x) = \frac{2m}{\hbar^2} w(x) - w'(x) = \Phi^2(x) - \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \Phi'(x)$$

si l'on pose  $w(x) = \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \Phi(x)$ , alors

$$\psi_0(x) \sim \exp + \int q(x)w(x) dx = \exp - \frac{\sqrt{2m}}{\hbar} \int \Phi(x) dx.$$

<sup>(36)</sup> La valeur du facteur de Landé de l'électron constitue à l'heure actuelle l'une des meilleures confirmations de l'électrodynamique quantique, puisque l'accord avec l'expérience est remarquable :

$$g = 2(1 + a) = 2 \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{\alpha}{\pi} - 0.328\,478\dots \left( \frac{\alpha}{\pi} \right)^2 + 1.183\dots \left( \frac{\alpha}{\pi} \right)^3 + \dots \right) \\ = 2.002\,319\,304\,718\, (564)$$

où le premier terme est dû à Dirac et le deuxième à Schwinger.  $\alpha = \frac{e^2}{\hbar c}$  est la constante de structure fine,  $\alpha \simeq 1/137$ . Les valeurs théorique et expérimentale de  $a$  sont :

$$a_{\text{th}} = 1\,159\,652\,359\, (282) \cdot 10^{-12} \\ a_{\text{exp}} = 1\,159\,652\,410\, (200) \cdot 10^{-12}$$

(C. Itzykson et J.B. Zuber, Quantum field theory, Singapore : Mac Graw Hill, 1980 pp. 348-349).

(\*) *Jacopo Francesco Riccati* 1676-1754

**16****Supersymétrie et invariance de forme****Introduction**

Combinée à la mécanique quantique supersymétrique qui permet de définir des partenaires supersymétriques à partir d'un superpotentiel, la condition d'invariance de forme, lorsqu'elle est satisfaite par ces partenaires, permet la détermination du spectre et des états propres d'un problème physique par simple application de méthodes algébriques.

**Invariance de forme des potentiels superpartenaires**

▷ *Hypothèse d'invariance de forme des partenaires supersymétriques.* Considérons deux potentiels partenaires supersymétriques  $V_+(\xi)$  et  $V_-(\xi)$ . Les hamiltoniens associés

$$\hat{H}_\pm = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{d\xi^2} + V_\pm(\xi)$$

ont des spectres identiques à l'exception de  $E_0^{(-)} = 0$ . Supposons de plus qu'ils obéissent à la condition d'invariance de forme suivante :

$$V_+(\xi, a_0) = V_-(\xi, a_1) + R(a_1)$$

où  $a_0$  représente un jeu de paramètres,  $a_1 = f(a_0)$  et où la fonction  $R(a_1)$  est indépendante de la variable  $\xi$ . On peut alors écrire une relation entre les deux hamiltoniens :

$$\hat{H}_+(a_0) = \hat{H}_-(a_1) + R(a_1)$$

de sorte que

$$\begin{aligned}\hat{H}_+(a_0)\psi_0^{(-)}(\xi, a_1) &= (E_0^{(-)}(a_1) + R(a_1))\psi_0^{(-)}(\xi, a_1) \\ &= R(a_1)\psi_0^{(-)}(\xi, a_1)\end{aligned}$$

ce qui entraîne

$$\begin{aligned}\psi_0^{(+)}(\xi, a_0) &= \psi_0^{(-)}(\xi, a_1), \\ E_0^{(+)}(a_0) &= R(a_1).\end{aligned}$$

En mettant d'autre part à profit la correspondance entre les spectres, on obtient l'énergie du premier niveau excité de  $H_-$  :

$$E_1^{(-)}(a_0) = E_0^{(+)}(a_0) = R(a_1)$$

ainsi que la fonction d'onde associée,

$$\begin{aligned}\psi_1^{(-)}(\xi, a_0) &= \frac{1}{\sqrt{E_0^{+}(a_0)}}\hat{A}^+(a_0)\psi_0^{(+)}(\xi, a_0) \\ &= \frac{1}{\sqrt{R(a_1)}}\hat{A}^+(a_0)\psi_0^{(-)}(\xi, a_1)\end{aligned}$$

où  $\psi_0^{(-)}(\xi, a_1)$  est donnée par le superpotentiel  $\Phi(\xi)$  et par la relation  $a_1 = f(a_0)$  qui découle de l'invariance de forme.

▷ *Hiérarchie de partenaires invariants de forme.* En généralisant à un niveau quelconque :

$$\begin{aligned}\psi_n^{(+)}(\xi, a_0) &= \psi_n^{(-)}(\xi, a_1), \\ E_n^{(+)}(a_0) &= E_n^{(-)}(a_1) + R(a_1).\end{aligned}$$

Cela suggère de réitérer le processus en définissant une famille d'hamiltoniens constituant des paires successives de partenaires supersymétriques, de manière à ce que le  $n$ ème niveau de  $\hat{H}_-$  corresponde à l'état fondamental du  $(n - 1)$ -ième hamiltonien :

$$\begin{aligned}\hat{H}^{(s)}(a_0) &= -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{d\xi^2} + V^{(s)}(\xi, a_0) \\ \hat{H}^{(s+1)}(a_0) &= -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{d\xi^2} + V^{(s+1)}(\xi, a_0) \\ V^{(s+1)}(\xi, a_0) &= V^{(s)}(\xi, a_1) + R(a_1)\end{aligned}$$

En notant  $\hat{H}^{(0)} = \hat{H}_-$  et  $\hat{H}^{(1)} = \hat{H}_+$ , on obtient ainsi une récurrence de la forme :

$$\begin{aligned}\hat{H}^{(0)}(a_0) &= -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{d\xi^2} + V_-(\xi, a_0) \\ \hat{H}^{(1)}(a_0) &= \hat{H}^{(0)}(a_1) + R(a_1) \\ \hat{H}^{(2)}(a_0) &= \hat{H}^{(1)}(a_1) + R(a_1) \\ &= \hat{H}^{(0)}(a_2) + R(a_2) + R(a_1) \\ &\vdots \\ \hat{H}^{(s)}(a_0) &= \hat{H}^{(0)}(a_s) + \sum_{k=1}^s R(a_k).\end{aligned}$$

Ces hamiltoniens successifs ne diffèrent finalement que par une constante additive et par la valeur des paramètres. Ils ont donc mêmes fonctions propres aux valeurs des paramètres près :

$$\psi_n^{(s)}(\xi, a_0) = \psi_n^{(s-1)}(\xi, a_1)$$

et leurs valeurs propres sont simplement décalées d'une valeur égale à la constante additive qui sépare les hamiltoniens :

$$E_n^{(s)}(a_0) = E_n^{(s-1)}(a_1) + R(a_1)$$

qui entraîne

$$E_n^{(s)}(a_0) = E_n^{(0)}(a_s) + \sum_{k=1}^s R(a_k)$$

et par ailleurs

$$E_n^{(s)}(a_0) = E_{n+1}^{(s-1)}(a_0) = \dots = E_{n+s}^{(0)}(a_0).$$

Le spectre de  $\hat{H}^{(0)}(a_0)$  est donc totalement déterminé :

$$E_s^{(0)}(a_0) = \sum_{k=1}^s R(a_k).$$

Les fonctions d'onde de  $\hat{H}^{(0)}(a_0)$  en découlent par généralisation et on obtient l'expression :

$$\begin{aligned}\psi_s^{(0)}(\xi, a_0) &= (E_s^{(0)}(a_0))^{-1/2} \hat{A}^+(a_0) \psi_{s-1}^{(0)}(\xi, a_1) \\ &= (E_s^{(0)}(a_0) E_{s-1}^{(0)}(a_1))^{-1/2} \hat{A}^+(a_0) \hat{A}^+(a_1) \psi_{s-2}^{(0)}(\xi, a_2) \\ &= \dots \\ &= \prod_{k=1}^s \left[ (E_k^{(0)}(a_{s-k}))^{-1/2} \hat{A}^+(a_{k-1}) \right] \psi_0^{(0)}(\xi, a_s)\end{aligned}$$

▷ *Application à l'oscillateur harmonique.* L'application de ce formalisme, qui pourrait sembler indigeste, est en fait très simple. Considérons à nouveau l'exemple élémentaire de l'oscillateur harmonique :

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$$

La première étape consiste à déterminer un superpotentiel  $\Phi(x)$  tel que

$$\begin{aligned} V_-(x) &= \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 - E_0 \\ &= \Phi^2(x) - \frac{\hbar}{\sqrt{2m}}\Phi'(x) \end{aligned}$$

où  $E_0$  est a priori inconnu. La forme du potentiel montre que  $\Phi(x)$  doit être linéaire, de manière à restituer un potentiel quadratique en  $x$  par  $\Phi^2(x) = V(x)$ . On a donc :

$$\Phi(x) = \sqrt{\frac{m}{2}}\omega x$$

soit

$$V_-(x) = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 - \frac{1}{2}\hbar\omega$$

On a ainsi déterminé sans effort l'énergie de l'état fondamental :

$$E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega.$$

L'ensemble du spectre est tout aussi facilement déduit de la condition d'invariance de forme :

$$\begin{aligned} V_+(x) &= \Phi^2(x) + \frac{\hbar}{\sqrt{2m}}\Phi'(x) \\ &= \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 + \frac{1}{2}\hbar\omega \\ &= V_-(x) + \hbar\omega \end{aligned}$$

qui est bien de la forme requise, avec

$$\begin{aligned} a_0 &= \omega, \\ a_1 &= f(a_0) = a_0, \\ R(\omega) &= \hbar\omega \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} E_1^{(-)} &= R(a_1) = \hbar\omega \\ E_2^{(-)} &= R(a_2) + R(a_1) = 2\hbar\omega \\ &\dots \end{aligned}$$

et les niveaux  $E_n$  du potentiel  $V(x)$  initial sont bien donnés par l'expression habituelle :

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar\omega.$$

Les fonctions d'onde se calculent de même par les relations précédentes. Limitons-nous à l'état fondamental :

$$\begin{aligned} \psi_0(x) &\sim \exp - \frac{\sqrt{2m}}{\hbar} \int \sqrt{\frac{m}{2}} \omega x \, dx \\ &\sim \exp - \frac{1}{2} \frac{m\omega}{\hbar} x^2 \end{aligned}$$

qu'il convient ensuite de normer.

**Invariance de forme dans l'exemple  $\Phi(x) = \alpha \tanh \beta x$ .**

▷ *Condition d'invariance de forme.* L'exemple du superpotentiel  $\Phi(x) = \alpha \tanh \beta x$  a été traité dans le cadre de l'invariance de forme par Gendenshtein (1983). On suppose  $\alpha > 0$  et  $\beta > 0$ . Si ce n'était pas le cas, on aurait :

$$\Phi^2(x) - \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \Phi'(x) > \Phi^2(x) + \frac{\hbar}{2m} \Phi'(x)$$

ce qui conduirait à un hamiltonien  $\hat{H}_-$  dont le spectre en énergie serait supérieur à celui de  $\hat{H}_+$ . Pour assurer un état fondamental d'énergie nulle à  $H_-$ , on impose donc  $\alpha > 0$  :

$$\Phi^2(x) = \alpha^2 \tanh^2 \beta x = \alpha^2 \left(1 - \frac{1}{\cosh^2 \beta x}\right)$$

$$\frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \Phi'(x) = \frac{\alpha \hbar}{\sqrt{2m}} \frac{\beta}{\cosh^2 \beta x}$$

d'où

$$V_-(x) = \alpha^2 - \alpha \left(\alpha + \frac{\beta \hbar}{\sqrt{2m}}\right) \frac{1}{\cosh^2 \beta x}$$

$$V_+(x) = \alpha^2 - \alpha \left(\alpha - \frac{\beta \hbar}{\sqrt{2m}}\right) \frac{1}{\cosh^2 \beta x}$$

Ces potentiels superpartenaires satisfont à la condition d'invariance de forme :

$$\begin{aligned} V_+(x, \alpha) &= \alpha^2 - \alpha \left(\alpha - \frac{\beta \hbar}{\sqrt{2m}}\right) \frac{1}{\cosh^2 \beta x} \\ &= \alpha'^2 - \alpha' \left(\alpha' + \frac{\beta \hbar}{\sqrt{2m}}\right) \frac{1}{\cosh^2 \beta x} + R(\alpha') \\ &= V_-(x, \alpha') + R(\alpha') \end{aligned}$$

en posant

$$\alpha' = \alpha - \frac{\beta\hbar}{\sqrt{2m}}$$

et

$$\begin{aligned} R(\alpha') &= V_+(x, \alpha) - V_-(x, \alpha') \\ &= \alpha^2 - \alpha'^2 \\ &= \alpha^2 - \left( \alpha - \frac{\beta\hbar}{\sqrt{2m}} \right)^2. \end{aligned}$$

En utilisant les notations du paragraphe précédent, ces expressions deviennent :

$$\begin{aligned} a_0 &= \alpha \\ a_1 &= \alpha - \frac{\beta\hbar}{\sqrt{2m}} = a_0 - \frac{\beta\hbar}{\sqrt{2m}} \\ &\vdots \\ a_k &= a_0 - \frac{k\beta\hbar}{\sqrt{2m}} \\ R(a_k) &= a_{k-1}^2 - a_k^2. \end{aligned}$$

▷ *Niveaux d'énergie et fonctions d'onde.* Les niveaux d'énergie de  $\hat{H}_-$  sont donnés par :

$$\begin{aligned} E_n^{(-)}(\alpha) &= \sum_{k=1}^n (a_{k-1}^2 - a_k^2) \\ &= a_0^2 - a_n^2 \\ &= \alpha^2 - \left( \alpha - \frac{n\beta\hbar}{\sqrt{2m}} \right)^2. \end{aligned}$$

En laissant de côté la normation des fonctions d'onde, les premières d'entre elles s'écrivent :

$$\begin{aligned} \psi_0^{(-)}(x) &\sim \exp - \frac{\sqrt{2m}}{\hbar} \int \alpha \tanh \beta x \, dx \\ &\sim \exp - \frac{\sqrt{2m}}{\hbar} \frac{\alpha}{\beta} \ln \cosh \beta x \\ &\sim [\cosh \beta x]^{-\sqrt{2m}\alpha/\beta\hbar} \end{aligned}$$



On applique ensuite les opérateurs échelle :

$$\psi_1^{(-)}(x, a_0) \sim \hat{A}^+(a_0)\psi_0^{(-)}(x, a_1)$$

où

$$\hat{A}^+(a_0) = -\frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{d}{dx} + a_0 \tanh \beta x$$

soit

$$\psi_1^{(-)}(x) \sim \tanh \beta x [\cosh \beta x]^{\frac{-\sqrt{2m}}{\beta\hbar}} \left( \alpha - \frac{\beta\hbar}{\sqrt{2m}} \right)$$

On pourrait ensuite réitérer pour construire les états plus excités.

### Supersymétrie dans l'équation radiale de l'atome d'hydrogène

▷ *Superpartenaires.* L'équation de Schrödinger pour les états stationnaires de l'atome d'hydrogène s'écrit :

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left( \Delta_r - \frac{\hat{\mathbf{L}}^2}{\hbar^2 r^2} \right) \psi_n(r, \vartheta, \varphi) - \frac{e^2}{r} \psi_n(r, \vartheta, \varphi) = E_n \psi_n(r, \vartheta, \varphi)$$

Le problème présentant une symétrie sphérique, on pose  $\psi_n(r, \vartheta, \varphi) = \frac{1}{r} \chi_n(r) Y_\ell^m(\vartheta, \varphi)$  où les  $Y_\ell^m(\vartheta, \varphi)$  sont les harmoniques sphériques, états propres du moment cinétique :  $\hat{\mathbf{L}}^2 Y_\ell^m(\vartheta, \varphi) = \hbar^2 \ell(\ell+1) Y_\ell^m(\vartheta, \varphi)$ . La partie radiale du laplacien agissant sur la fonction radiale  $R_n(r) = \frac{1}{r} \chi_n(r)$  donne

$$\Delta_r \left( \frac{1}{r} \chi_n(r) \right) = \frac{1}{r} \frac{d^2 \chi_n}{dr^2}$$

ce qui conduit à l'équation radiale

$$\left( -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dr^2} + \frac{\hbar^2 \ell(\ell+1)}{2mr^2} - \frac{e^2}{r} \right) \chi_n(r) = E_n \chi_n(r)$$

C'est une équation de Schrödinger unidimensionnelle avec une énergie potentielle effective incluant une partie centrifuge :

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dr^2} + V_{\text{eff}}(r)$$

$$V_{\text{eff}}(r) = \frac{\hbar^2 \ell(\ell+1)}{2mr^2} - \frac{e^2}{r}$$

Dans le potentiel  $V_{\text{eff}}(r)$  interviennent un terme en  $\frac{1}{r}$  ainsi qu'un terme en  $\frac{1}{r^2}$ . Ils peuvent tous deux être obtenus à partir d'un superpotentiel de la forme  $\Phi(r) = \frac{\alpha}{r} + \beta$ ,

dont le carré produit des termes en  $\frac{1}{r^2}$  et  $\frac{1}{r}$  et dont la dérivée conduit aussi à un terme en  $\frac{1}{r^2}$ . La combinaison

$$\Phi^2(r) - \frac{\hbar}{\sqrt{2m}}\Phi'(r) = \left(\alpha^2 + \frac{\alpha\hbar}{\sqrt{2m}}\right) \frac{1}{r^2} + \frac{2\alpha\beta}{r} + \beta^2$$

conduit à identifier

$$\alpha^2 + \frac{\alpha\hbar}{\sqrt{2m}} = \frac{\hbar^2\ell(\ell+1)}{2m} \quad \text{et} \quad 2\alpha\beta = -e^2$$

soit, en posant  $\alpha = \frac{\hbar\gamma}{\sqrt{2m}}$  :

$$\begin{aligned} \gamma^2 + \gamma &= \ell(\ell+1) & \text{d'où} & \quad \gamma = \ell \\ \text{et} \quad \beta &= -\frac{e^2}{2\alpha} & \text{d'où} & \quad \beta = -\frac{e^2}{2} \frac{\sqrt{2m}}{\hbar\ell} \end{aligned}$$

On obtient ainsi le superpotentiel :

$$\Phi(r) = \frac{\hbar\ell}{\sqrt{2mr}} - \sqrt{\frac{m}{2}} \frac{e^2}{\hbar\ell}$$

Cependant, comme  $\alpha > 0$ , ce choix entraîne l'inégalité suivante :

$$V_-(r) = \Phi^2(r) - \frac{\hbar}{\sqrt{2m}}\Phi'(r) > V_+(r) = \Phi^2(r) + \frac{\hbar}{\sqrt{2m}}\Phi'(r)$$

c'est-à-dire un état fondamental  $E_0^{(-)} > E_0^{(+)}$ . Il convient alors de partir de  $V_+$  comme potentiel le plus bas auquel on doit identifier (à une constante près)  $V_{\text{eff}}(r)$ . La démarche précédente reproduite ici conduit à :

$$\Phi^2(r) + \frac{\hbar}{\sqrt{2m}}\Phi'(r) = \left(\alpha^2 - \frac{\hbar\alpha}{\sqrt{2m}}\right) \frac{1}{r^2} + \frac{2\alpha\beta}{r} + \beta^2$$

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{\hbar}{\sqrt{2m}}\gamma & \text{d'où} & \quad \gamma^2 - \gamma = \gamma(\gamma-1) = \ell(\ell+1) \\ & & \text{soit} & \quad \gamma = \ell+1 \\ & & \text{et} & \quad \beta = -\frac{e^2}{2} \frac{\sqrt{2m}}{\hbar(\ell+1)} \end{aligned}$$

d'où la forme du superpotentiel convenable :

$$\Phi(r) = \frac{\hbar(\ell+1)}{\sqrt{2mr}} - \sqrt{\frac{m}{2}} \frac{e^2}{\hbar(\ell+1)}$$

Remarquons que le choix  $\gamma = -(\ell + 1)$  aurait permis de conserver  $V_-(r)$  comme potentiel le plus bas. On obtient finalement les potentiels superpartenaires :

$$V_+(r) = \frac{\hbar^2 \ell(\ell + 1)}{2mr^2} - \frac{e^2}{r} + \frac{me^4}{2\hbar^2(\ell + 1)^2}$$

$$V_-(r) = \frac{\hbar^2(\ell + 1)(\ell + 2)}{2mr^2} - \frac{e^2}{r} + \frac{me^4}{2\hbar^2(\ell + 1)^2}$$

▷ *Etat fondamental.* Le premier permet d'identifier immédiatement l'énergie de l'état fondamental de l'atome d'hydrogène. En effet, le spectre de l'hamiltonien

$$\hat{H}_+ = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dr^2} + V_+(r)$$

début à  $E_0^{(+)} = 0$  par construction, d'où l'on déduit

$$V_{\text{eff}}(r) = V_+(r) - \frac{me^4}{2\hbar^2(\ell + 1)^2}$$

$$= V_+(r) + E_0$$

soit

$$E_0 = -\frac{me^4}{2\hbar^2 n^2}, \quad n = \ell + 1$$

▷ *Condition d'invariance de forme, états excités.* D'autre part, la condition d'invariance de forme est réalisée par les potentiels superpartenaires :

$$V_-(r, \ell) = V_+(r, \ell + 1) + \frac{me^4}{2\hbar^2} \left( \frac{1}{(\ell + 1)^2} - \frac{1}{(\ell + 2)^2} \right)$$

soit

$$a_0 = \ell$$

$$a_1 = \ell + 1 = a_0 + 1$$

$$R(a_1) = \frac{me^4}{2\hbar^2} \left( \frac{1}{a_1^2} - \frac{1}{(a_1 + 1)^2} \right).$$

On en déduit l'expression des énergies des états excités de  $H_+$  :

$$E_n^{(+)} = \sum_{k=1}^n R(a_k)$$

$$= \frac{me^4}{2\hbar^2} \left[ \frac{1}{a_1^2} - \frac{1}{(a_1 + 1)^2} + \frac{1}{a_2^2} - \frac{1}{(a_2 + 1)^2} + \dots + \frac{1}{a_n} - \frac{1}{(a_n + 1)^2} \right]$$

$$= \frac{me^4}{2\hbar^2} \left[ \frac{1}{a_1^2} - \frac{1}{(a_n + 1)^2} \right]$$

et celle des niveaux d'énergie de l'atome d'hydrogène :

$$E_n = E_n^{(+)} + E_0 = -\frac{me^4}{2\hbar^2(\ell + n)^2}$$

▷ *Opérateurs échelle et fonctions d'onde.* Notons enfin que les opérateurs

$$\hat{A}^{\pm} = \mp \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{d}{dr} + \Phi(r)$$

qui factorisent l'équation radiale de l'atome d'hydrogène permettent, à un niveau  $n$  donné, d'augmenter ou de diminuer d'une unité le moment angulaire  $\ell$  de 0 à  $n-1$ . A chaque couple de valeurs consécutives  $\ell$  et  $\ell+1$ , correspond un couple d'hamiltoniens partenaires supersymétriques obéissant à la condition d'invariance de forme. L'état fondamental correspond ainsi à  $\ell = 0$ . Pour chaque valeur de  $\ell$ , le niveau le plus bas ne comprend aucun nœud, le niveau suivant comporte un nœud, etc... Rappelons qu'il s'agit des parties radiales modifiées  $rR(r) = \chi(r)$ .

Les fonctions d'onde s'obtiennent assez aisément dans ce formalisme. Par exemple, celle qui correspond à l'état fondamental s'écrit :

$$\begin{aligned} \chi_0(r) &\sim \exp + \frac{\sqrt{2m}}{\hbar} \int \Phi(r) dr \\ &\sim \exp \left[ \int \frac{\ell + 1}{r} dr - \int \frac{me^2}{\hbar^2(\ell + 1)} dr \right] \\ &\sim r^{\ell+1} \exp \left( -\frac{me^2}{\hbar^2(\ell + 1)} r \right) \end{aligned}$$

Le signe + dans l'exponentielle est dû au choix de  $V_+(r)$  comme potentiel de départ.

### Les potentiels solubles analytiquement

Les problèmes classiques solubles en termes de polynômes orthogonaux et de fonctions hypergéométriques forment une classe connue. Il est intéressant de noter que ces problèmes satisfont à l'hypothèse d'invariance de forme. La méthode présentée ici n'apporte donc pas de nouvelles solutions, mais permet de revisiter de manière très élégante (et simple) par des méthodes algébriques des problèmes déjà connus. Pour une littérature très abondante sur le sujet, on peut consulter les revues *American Journal of Physics* et *European Journal of Physics* à partir du début des années 1980.

Le tableau suivant présente une liste des potentiels obéissant à la condition d'invariance de forme.

**Tableau 16.1** Liste des potentiels obéissant à la condition d'invariance de forme.

Potentiel	Superpotentiel $\Phi(\xi)$	Niveaux $E_n^{(-)}$ ou $E_n^{(+)}$
Oscillateur harmonique 1d	$\sqrt{\frac{m}{2}}\omega x$	$n\hbar\omega$
Oscillateur harmonique 3d	$\sqrt{\frac{m}{2}}\omega r - \frac{(\ell+1)\hbar}{\sqrt{2mr}}$	$2n\hbar\omega$
Coulomb	$\sqrt{\frac{m}{2}} \frac{e^2}{\hbar(\ell+1)} - \frac{\hbar(\ell+1)}{\sqrt{2mr}}$	$\frac{me^4}{2\hbar^2} \left[ \frac{1}{(\ell+1)^2} - \frac{1}{(n+\ell+1)^2} \right]$
Morse I	$A - Be^{-\alpha x}$	$A^2 - \left( A - \frac{n\alpha\hbar}{\sqrt{2m}} \right)^2$
Morse II	$A \tanh \alpha x + \frac{B}{\cosh \alpha x}$	$A^2 - \left( A - \frac{n\alpha\hbar}{\sqrt{2m}} \right)^2$
Rosen Morse I	$A \tanh \alpha x + \frac{B}{A}$	$A^2 - \left( A - \frac{n\alpha\hbar}{\sqrt{2m}} \right)^2$ $+ B^2 \left[ \frac{1}{A^2} - \frac{1}{\left( A - \frac{n\alpha\hbar}{\sqrt{2m}} \right)^2} \right]$
Rosen Morse II	$A \coth \alpha x - \frac{B}{\sinh \alpha x}$	$A^2 - \left( A - \frac{n\alpha\hbar}{\sqrt{2m}} \right)^2$
Eckart I	$-A \coth \alpha x + \frac{B}{A}$	$A^2 - \left( A + \frac{n\alpha\hbar}{\sqrt{2m}} \right)^2$ $- B^2 \left[ \frac{1}{A^2} - \frac{1}{\left( A + \frac{n\alpha\hbar}{\sqrt{2m}} \right)^2} \right]$
Eckart II	$-A \cotg \alpha x + \frac{B}{\sin \alpha x}$	$\left( A + \frac{n\alpha\hbar}{\sqrt{2m}} \right)^2 - A^2$
Pöschl-Teller I	$A \tan \alpha x - B \cotg \alpha x$	$\left( A + B \frac{2n\alpha\hbar}{\sqrt{2m}} \right)^2 - (A+B)^2$
Pöschl-Teller II	$A \tanh \alpha x - B \coth \alpha x$	$(A-B)^2 - \left( A - B - \frac{2n\alpha\hbar}{\sqrt{2m}} \right)^2$