MUSIQUE

ET

MATHEMATIQUES

La musique est un exercice caché d'arithmétique

tel que l'esprit ignore qu'il compte (Leibnitz, 1712)

T.E.R. proposé par Christian MAUDUIT
et réalisé par Carine PASCAL et Nathalie TOMAS

Faculté des Sciences de Luminy, Université de la Méditerranée

Année universitaire 1999 - 2000

En 1712, Leibnitz (1646 – 1716) écrivait :

De même qu'on a coutume de dire que les primitifs - en arithmétique - sont incapables de compter au delà de trois, de même nos oreilles civilisées ne saisissent - en musique - que des rapports tirés des nombres 1,2,3 et 5 ; si elles étaient mieux exercées, elles seraient en mesure d'aller jusqu'à 7.

Peut être y parviendront-elles un jour?

Mais en revanche, il y a peu de chances que l'homme puisse jamais accéder aux nombres 11 et13. Il faut donc penser que la raison des consonances réside dans l'accord des mouvements vibratoires. ***La musique est un exercice caché d'arithmétique tel que l'esprit ignore qu'il compte****. Cette ignorance provient du fait qu'il y a, dans les perceptions confuses ou non sensibles, quelque chose qu'on ne peut saisir distinctement.*

Il est faux de prétendre qu'il n'y a rien dans l'âme que la conscience ne connaisse ; ***l'âme, lors même qu'elle ne sent pas qu'elle compte, éprouve néanmoins le résultat de son calcul secret: soit qu'elle se délecte aux consonances, soit qu'elle subisse la blessure des dissonances, ce qu'elle ressent résulte des rapports numériques.***

De même, au XVIII^{ème} siècle, Euler (1707 – 1783) définissait la musique comme *la science de combiner les sons de manière qu'il en résulte une harmonie agréable* et il ajoutait que *toute perfection fait naître le plaisir* et que *les choses dans lesquelles nous découvrons un manque de perfection ou une imperfection nous déplaisent.*

Mais cette conception d'art de l'harmonie remonte en fait à l'Antiquité. En effet, Pythagore (VI^{ème} siècle av. J.C.) en a été l'initiateur, et nombreux sont ceux qui, au fil des siècles, ont repris et discuté cette notion. On retrouve notamment Zarlino au XVI^{ème} siècle et, bien évidemment, Euler.

A partir de là, il est clair qu'il existe un lien étroit entre la musique et les mathématiques. En nous appuyant sur leurs études musicales, et en y rattachant divers résultats mathématiques, nous nous proposons de vous en convaincre.

I – INTRODUCTION
MUSICALE ET MATHEMATIQUE

1 – Introduction mathématique

2 – Introduction musicale

II – LES GAMMES PYTHAGORICIENNES

1 – Le cycle des quintes ?

2 – La spirale des quintes !

IV – DE L'HARMONIE A L'ENHARMONIE

I – INTRODUCTION
MATHEMATIQUE ET MUSICALE

Commençons par présenter un certain nombre de notions, mathématiques d'une part, musicales d'autre part.

1 – Introduction mathématique

Nous allons nous limiter ici à quelques définitions et théorèmes utiles sur les fractions continues.

a) Les fractions continues :

Définition :

Une fraction continue (simple) est une expression de la forme :

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \dots}}}$$

ce que nous écrirons plus commodément $[a_0 ; a_1, a_2, a_3\dots]$.

$a_0, a_1, a_2, a_3\dots a_n\dots$ sont appelés les quotients partiels. S'ils sont en nombre fini (resp. infini), on dira que la fraction continue est finie (resp. infinie).

Nous supposerons de plus que $\forall n \in \mathbb{N}, a_n \in \mathbb{N}$.

$[a_0 ; a_1, a_2, a_3\dots a_n]$ est la n-ième convergente.

Premiers résultats :

Théorème I-1.1 : Si p_n et q_n sont définis par

$$\begin{cases} p_0 = a_0,\ p_1 = a_1 a_0 + 1,\ p_n = a_n p_{n-1} + p_{n-2}\ (n \geq 2) \\ q_0 = 1,\ q_1 = a_1,\ q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2}\ (n \geq 2) \end{cases}$$

alors $\forall\, n \in \mathbb{N},\ q_n \in \mathbb{N}^*$ et $[a_0 ; a_1, a_2, a_3\dots a_n] = \frac{p_n}{q_n}$.

<u>Preuve</u> : - pour n = 0, $q_0 = 1 \in \mathbb{N}^*$ et $[a_0] = \frac{a_0}{1} = \frac{p_0}{q_0}$.

- pour n = 1, $q_1 = a_1 \in \mathbb{N}^*$ et $[a_0, a_1] = a_0 + \frac{1}{a_1} = \frac{a_0a_1 + 1}{a_1} = \frac{p_1}{q_1}$.

- supposons la propriété vraie jusqu'au rang n = k. Alors,

$q_{k+1} = a_{k+1}q_k + q_{k-1} \in \mathbb{N}^*$ et

$$[a_0 ; a_1, a_2, a_3\ldots a_{k+1}] = [a_0 ; a_1, a_2, a_3\ldots a_{k-1}, a_k + \frac{1}{a_{k+1}}]$$

$$= \frac{(a_k + \frac{1}{a_{k+1}})p_{k-1} + p_{k-2}}{(a_k + \frac{1}{a_{k+1}})q_{k-1} + q_{k-2}}, \text{ par hypothèse de récurrence.}$$

$$= \frac{(a_{k+1}a_k + 1)p_{k-1} + a_{k+1}p_{k-2}}{(a_{k+1}a_k + 1)q_{k-1} + a_{k+1}q_{k-2}}$$

$$= \frac{a_{k+1}(a_kp_{k-1} + p_{k-2}) + p_{k-1}}{a_{k+1}(a_kq_{k-1} + q_{k-2}) + q_{k-1}}$$

$$= \frac{a_{k+1}p_k + p_{k-1}}{a_{k+1}q_k + q_{k+1}}$$

$$= \frac{p_{k+1}}{q_{k+1}}$$

et le théorème est démontré, par récurrence sur n.

ÿ

Théorème I-1.2 : $p_nq_{n-1} – p_{n-1}q_n = (-1)^{n-1}$, n $\geq$ 1.

<u>Preuve</u> : - pour n = 1, $p_1q_0 – p_0q_1 = a_1a_0 + 1 – a_0a_1 = 1 = (-1)^0$

- supposons le théorème vérifié pour n = k. Alors,

$$\begin{aligned} p_{k+1}q_k – p_kq_{k+1} &= (a_{k+1}p_k + p_{k-1})q_k – p_k(a_{k+1}q_k + q_{k-1}) \\ &= p_{k-1}q_k – p_kq_{k-1} \\ &= (-1)^k \end{aligned}$$

et le théorème est démontré, par récurrence sur n.

ÿ

b) L'algorithme des fractions continues :

<u>Construction</u> :

Soit x un nombre réel et $a_0 = \lfloor x \rfloor$. Alors

$$x = a_0 + \varepsilon_0, \quad 0 \leq \varepsilon_0 < 1.$$

Si $\varepsilon_0 \neq 0$, nous pouvons poser $a_1 = \lfloor \frac{1}{\varepsilon_0} \rfloor$ et

$$\frac{1}{\varepsilon_0} = a_1 + \varepsilon_1, \quad 0 \leq \varepsilon_1 < 1.$$

Si $\varepsilon_1 \neq 0$, nous pouvons poser $a_2 = \left\lfloor \frac{1}{\varepsilon_1} \right\rfloor$ et

$$\frac{1}{\varepsilon_1} = a_2 + \varepsilon_2, \quad 0 \leq \varepsilon_2 < 1.$$

Et ainsi de suite… aussi longtemps que $\varepsilon_n \neq 0$.

D'où, $x = a_0 + \cfrac{1}{\cfrac{1}{\varepsilon_0}} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{\cfrac{1}{\varepsilon_1}}} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \dots}} = \dots$

où $a_0 \in \mathbb{Z}$ et $a_1, a_2\ldots \in \mathbb{N}^*$.

Conséquence :

Théorème I-1.3 : - Si x est un nombre irrationnel, alors il admet un développement en fraction continue infinie, ou, ce qui revient au même,

- Si x admet un développement en fraction continue finie, alors x est un nombre rationnel.

Preuve : Supposons que l'algorithme soit fini.

Alors $x = [a_0 ; a_1, a_2, a_3, \dots a_n]$.

- pour $n = 0$, $x = a_0 \in \mathbb{N}$
- supposons la propriété vraie pour $n = k$. Alors,

$$[a_0 ; a_1, a_2, a_3\ldots a_{k+1}] = a_0 + \frac{1}{A}, \text{ où } A = [a_1 ; a_2, a_3\ldots a_{k+1}] = \frac{A_1}{A_2}$$

$$= a_0 + \cfrac{1}{\cfrac{A_1}{A_2}}$$

$$= \frac{a_0A_1 + A_2}{A_1} \in \mathbb{Q}$$

et, par récurrence, la propriété est vérifiée pour tout $n \in \mathbb{N}$.

ÿ

Le cas particulier des logarithmes :

Soit $x = \log_p q$, $1 < p < q$, P.G.C.D $(p, q) = 1$. Soit r_n défini par $r_{-2} = q$, $r_{-1} = p$ et $r_n = \dfrac{r_{n-2}}{{r_{n-1}}^{a_n}}$.

Alors $\varepsilon_n = \dfrac{\ln r_{n-2}}{\ln r_{n-1}} - a_n$. En effet,

- pour $n = 0$, $\varepsilon_0 = \dfrac{\ln q}{\ln p} - a_0$
- pour $n = 1$, $\varepsilon_0 = \dfrac{\ln q - a_0 \ln p}{\ln p} = \dfrac{\ln \frac{q}{p^{a_0}}}{\ln p} = \dfrac{\ln r_0}{\ln p}$ donc $\dfrac{1}{\varepsilon_0} = \dfrac{\ln p}{\ln r_0}$ et $\varepsilon_1 = \dfrac{\ln p}{\ln r_0} - a_1$

- pour n = 2, $\varepsilon_1 = \dfrac{\ln \dfrac{p}{r_0^{a_1}}}{\ln r_0} = \dfrac{\ln r_1}{\ln r_0}$ donc $\dfrac{1}{\varepsilon_1} = \dfrac{\ln r_0}{\ln r_1}$ et $\varepsilon_2 = \dfrac{\ln r_0}{\ln r_1} - a_2$

- supposons la propriété vérifiée au rang n = k. Alors,

$\varepsilon_k = \dfrac{\ln r_{k-2}}{\ln r_{k-1}} - a_k = \dfrac{\ln \dfrac{r_{k-2}}{r_{k-1}^{a_k}}}{\ln r_{k-1}} = \dfrac{\ln r_k}{\ln r_{k-1}}$ donc $\dfrac{1}{\varepsilon_k} = \dfrac{\ln r_{k-1}}{\ln r_k}$ et $\varepsilon_{k+1} = \dfrac{\ln r_{k-1}}{\ln r_k} - a_{k+1}$ et la propriété est vérifiée, par récurrence sur n.

c) Propriétés :

> Théorème I-1.4 : Soient $(x_n, y_n) = ((-1)^{n-1}p_n, (-1)^n q_n)$.
>
> Soit $(r_n)_{n\in N}$ définie par $r_{-2} = q$, $r_{-1} = p$ et $r_n = \dfrac{r_{n-2}}{r_{n-1}^{a_n}}$.
>
> Alors,
>
> i) $r_n = p^{x_n} q^{y_n}$ et c'est une suite strictement décroissante tendant vers 1,
>
> ii) $r_n' = \dfrac{2}{r_n}$ est une suite strictement croissante tendant vers 2.

<u>Preuve</u> : *1) lemme 1 : Soit $a_k' = [a_k\ ; a_{k+1}, \dots]$. Alors,*

i) $a_k' = a_k + \dfrac{1}{a_{k+1}'} = \dfrac{a_{k+1}'a_k + 1}{a_{k+1}'}$,

ii) $a_k < a_k' < a_k + 1$

2) lemme 2 : Si p_n' et q_n' sont définis par

$$\begin{cases} p_0' = a_0',\ p_1' = a_1'a_0 + 1,\ p_n' = a_n'p_{n-1} + p_{n-2} \ (n \geq 2) \\ q_0' = 1,\ q_1' = a_1',\ q_n' = a_n'q_{n-1} + q_{n-2} \ (n \geq 2) \end{cases}$$

alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $x = [a_0\ ; a_1, a_2, a_3, \dots] = \dfrac{p_n'}{q_n'}$.

- pour n = 0, $x = a_0' = \dfrac{p_0'}{q_0'}$.
- pour n = 1, $x = a_0'$

  $= \dfrac{a_1'a_0 + 1}{a_1'}$, d'après le lemme 1

  $= \dfrac{p_1'}{q_1'}$.
- supposons le lemme vérifié pour n = k. Alors,

$$x = \frac{a_k'p_{k-1} + p_{k-2}}{a_k'q_{k-1} + q_{k-2}} = \frac{\dfrac{a_{k+1}'a_k + 1}{a_{k+1}'}\,p_{k-1} + p_{k-2}}{\dfrac{a_{k+1}'a_k + 1}{a_{k+1}'}\,q_{k-1} + q_{k-2}}$$, d'après le lemme 1

$$= \frac{a_{k+1}'(a_k p_{k-1} + p_{k-2}) + p_{k-1}}{a_{k+1}'(a_k q_{k-1} + q_{k-2}) + q_{k-1}} = \frac{a_{k+1}'p_k + p_{k-1}}{a_{k+1}'q_k + q_{k-1}}$$, d'après le théorème I-1.1

Et, le lemme est démontré, par récurrence sur n.

3) lemme 3 : pour tout $n \geq 1$, $q_n \geq q_{n-1}$.

- pour n = 0, $q_0 = 1$, $q_1 = a_1 \geq 1$.
- pour $n \geq 2$, $q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2} \geq q_{n-1} + 1$.

4) lemme 4 : $p_n - q_n \log_p q$ a le signe de $(-1)^{n-1}$.

D'après le lemme 2, $\log_p q = \dfrac{a_{n+1}' p_n + p_{n-1}}{a_{n+1}' q_n + q_{n-1}}$.

Donc, $\log_p q - \dfrac{p_n}{q_n} = \dfrac{p_{n-1}q_n - p_n q_{n-1}}{q_n(a_{n+1}' q_n + q_{n-1})} = \dfrac{(-1)^n}{q_n(a_{n+1}' q_n + q_{n-1})}$.

De plus, $\log_p q - \dfrac{p_0}{q_0} = \log_p q - a_0 = \dfrac{1}{a_1{}'}$.

Ainsi, nous avons $\log_p q - \dfrac{p_n}{q_n} = \dfrac{(-1)^n}{q_n q_{n+1}{}'}$ ou $p_n - q_n \log_p q = \dfrac{(-1)^{n-1}}{q_{n+1}{}'}$.

5) lemme 5 : i) $\dfrac{1}{2q_{n+1}} < |p_n - q_n \log_p q| < \dfrac{1}{q_{n+1}}$

ii) $\dfrac{1}{q_{n+2}} < |p_n - q_n \log_p q| < \dfrac{1}{q_{n+1}}$

$| p_n - q_n \log_p q| = \dfrac{1}{q_{n+1}{}'}$.

Or, $q_{n+1}' = a_{n+1}' q_n + q_{n-1} < (a_{n+1} + 1)q_n + q_{n-1}$, d'après le lemme 1

$= q_{n+1} + q_n$, d'après le théorème I-1.1

$\leq 2q_{n+1}$, d'après le lemme 4

De la même façon, $q_{n+1}' = q_{n+1} + q_n$

$\leq a_{n+2}q_{n+1} + q_n$

$= q_{n+2}$, d'après le théorème I-1.1

Parallèlement, $q_{n+1}' = a_{n+1}' q_n + q_{n-1} > a_{n+1}q_n + q_{n-1}$, d'après le lemme 1

$= q_{n+1}$, d'après le théorème I-1.1

6) $r_n = p^{x_n} q^{y_n}$:

- pour n = 0, $r_0 = \dfrac{q}{p^{a_0}}$
- supposons la propriété vérifiée jusqu'au rang n = k. Alors,

$r_{k+1} = \dfrac{r_{k-1}}{r_k^{a_{k+1}}} = \dfrac{p^{x_{k-1}} q^{y_{k-1}}}{(p^{x_k} q^{y_k})^{a_{k+1}}} = p^{x_{k-1} - a_{k+1} x_k} q^{y_{k-1} - a_{k+1} y_k} = p^{x_{k+1}} q^{y_{k+1}}$ et la propriété est démontrée, par récurrence sur n.

7) $(r_n)_{n \in IN}$ est strictement décroissante et converge vers 1 :

$\dfrac{\ln r_{n+1}}{\ln r_n} = \dfrac{x_{n+1} + y_{n+1}\log_p q}{x_n + y_n \log_p q} = -\dfrac{p_{n+1} - q_{n+1}\log_p q}{p_n - q_n \log_p q}$

Or, d'après le lemme 5, $\dfrac{1}{q_{n+2}} < |p_n - q_n \log_p q|$ et $|p_{n+1} - q_{n+1}\log_p q| < \dfrac{1}{q_{n+2}}$, donc

$\dfrac{|p_{n+1} - q_{n+1}\log_p q|}{|p_n - q_n \log_p q|} < 1$.

D'où, $\dfrac{\ln r_{n+1}}{\ln r_n} < 1$ et la suite $(r_n)_{n\in IN}$ est strictement décroissante.

De plus, $\dfrac{\ln r_n}{\ln p} = x_n + y_n \log_p q = (-1)^{n+1}(p_n - q_n \log_p q) > 0$, d'après le lemme 4.

Or ln p > 0, car nous avons choisi p > 1.

D'où $r_n > 1$, i.e.$(r_n)_{n\in IN}$ est bornée par 1.

Nous en déduisons donc que $(r_n)_{n\in IN}$ est convergente.

Mais, d'après le lemme 5, $\dfrac{1}{2q_{n+1}} < |p_n - q_n \log_p q| < \dfrac{1}{q_{n+1}}$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2q_{n+1}} < x_n + y_n \log_p q < \frac{1}{q_{n+1}}$$

$$\Leftrightarrow p^{1/(2|y_{n+1}|)} < r_n < p^{1/|y_{n+1}|}$$

Il en résulte que $(r_n)_{n\in IN}$ converge vers 1.

8) $(r_n')_{n\in IN}$ est strictement croissante et converge vers 2 :

Immédiat.

ÿ

Théorème I-1.5 : Soit n fixé. Alors, pour $m \leq n-1$, $r_m = r_{n-1}^{s_{n-m-1}} \times r_n^{t_{n-m-2}}$, où $t_{-1} = 0$, s_n et t_n sont respectivement les dénominateurs des convergentes successives de $[1, a_n, a_{n-1}\dots a_1]$ et $[1, a_{n-1}, a_{n-2}\dots a_1]$.

<u>Preuve</u> :
- pour m = n-1, $r_{n-1} = r_{n-1}^{1} \times r_n^{0}$
- pour m = n-2, $r_{n-2} = r_{n-1}^{a_n} \times r_n$
- pour m = n-3, $r_{n-3} = r_{n-2}^{a_{n-1}} \times r_{n-1} = (r_{n-1}^{a_n} \times r_n)^{a_{n-1}} \times r_{n-1} = r_{n-1}^{a_n a_{n-1}+1} \times r_n^{a_{n-1}}$
- pour m = n-4, $r_{n-4} = r_{n-3}^{a_{n-2}} \times r_{n-2} = (r_{n-1}^{a_n a_{n-1}+1} \times r_n^{a_{n-1}})^{a_{n-2}} \times r_{n-1}^{a_n} \times r_n$
  $= r_{n-1}^{(a_n a_{n-1}+1)a_{n-2}+a_n} \times r_n^{a_{n-1}a_{n-2}+1}$
- supposons la propriété démontrée jusqu'au rang m = n-k, alors

$r_{n-(k+1)} = r_{n-k}^{a_{n-k+1}} \times r_{n-k+1} = (r_{n-1}^{s_{k-1}} \times r_n^{t_{k-2}})^{a_{n-k+1}} \times (r_{n-1}^{s_{k-2}} \times r_n^{t_{k-3}})$

$= r_{n-1}^{a_{n-k+1}s_{k-1}+s_{k-2}} \times r_n^{a_{n-k+1}t_{k-2}+t_{k-3}} = r_{n-1}^{s_k} \times r_n^{t_{k-1}}$

et le théorème est démontré, par récurrence sur k.

ÿ

2 – Introduction musicale

a) Un petit peu de physique :

Un son musical est caractérisé par trois éléments (outre sa durée), à savoir :

- une *hauteur* ou fréquence.

On dira qu'un son A est plus <u>aigu</u> (resp. <u>grave</u>) qu'un son B si la fréquence de A est plus grande (resp. petite) que celle de B.

- une *intensité*, liée à l'amplitude de la vibration sonore,

- un *timbre*, lié à la forme de cette vibration.

Nous pensons là au théorème de Fourier, selon lequel un son complexe de fréquence f est produit par une vibration qui est la somme de plusieurs vibrations de type sinusoïdales ou sons purs (le fondamental de fréquence f et les harmoniques de fréquence 2f, 3f...).

<u>Nous ne nous intéresserons qu'aux hauteurs des sons</u>. Plus précisément, nous identifierons deux sons de même fréquence et nous ne distinguerons pas non plus les sons audibles de ceux qui ne le sont pas.

b) Les intervalles :

<u>Définition</u> :

La loi de Weber, loi psycho-physiologique, nous apprend que l'oreille est sensible, non aux différences, mais aux rapports de fréquences des sons, ce qui nous conduit à poser la relation suivante sur l'ensemble $(\mathbb{R}_+^*)^2$ des couples de sons :

$$\boxed{(f_1,f_2)\ \Re_1\ (f_3,f_4) \Leftrightarrow \frac{f_2}{f_1} = \frac{f_4}{f_3}}$$

On a là une relation d'équivalence et les classes modulo $\Re_1$ sont appelées intervalles.

<u>Notations – Exemples</u> :

Théorème I-2.1 : Tout intervalle admet un représentant unique de la forme (1,k).

<u>Preuve</u> : Considérons une des classes ; pour tout couple (f_1,f_2) de la classe, le rapport $\frac{f_2}{f_1}$ est le même : c'est un réel strictement positif k.

ÿ

Nous noterons I_k l'intervalle correspondant et I l'ensemble des intervalles :

$$I_k = \{(f, kf),\ f \in \mathbb{R}_+^*\}$$
$$I = \{I_k,\ k \in \mathbb{R}_+^*\}$$

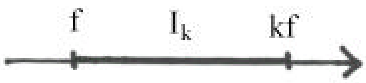
Ainsi,

I_1 est l'ensemble des couples	(f,f) ; cet intervalle est appelé	unisson,
I_2	(f,2f)	octave
$I_{3/2}$	(2f,3f)	quinte
$I_{4/3}$	(3f,4f)	quarte
$I_{5/4}$	(4f,5f)	tierce
$I_{9/8}$	(8f,9f)	seconde…

Nous pouvons également convenir de noter le son kf comme :

$$kf = f + I_k.$$

Et, pour pouvoir comparer visuellement les intervalles, il est possible de représenter sur la droite réelle l'égalité précédente par :



où I_k est un segment dont la mesure algébrique est proportionnelle au logarithme de k (dans une base quelconque) pour que l'on ait :

$$\text{Mes alg } (I_k + I_{k'}) = \text{Mes alg } (I_k) + \text{Mes alg } (I_{k'}).$$

Nous trouverons encore intérêt à numéroter les octaves. Soit le son de fréquence f. Nous conviendrons de dire que n est le numéro de l'octave $(2^n f, 2^{n+1} f)$.

Propriétés fondamentales :

$$\text{La loi} \times : (\mathbb{R}_+^*)^2 \times (\mathbb{R}_+^*)^2 \longrightarrow (\mathbb{R}_+^*)^2$$
$$(k_1,k_2) \times (k_3,k_4) \longmapsto (k_1k_3,\ k_2k_4)$$

étant compatible avec $\Re_1$, on peut additionner les intervalles de la manière suivante :

$$\boxed{I_k + I_{k'} = I_{kk'}}$$

L'application $k \longmapsto I_k$ de $\mathbb{R}_+^*$ sur I est un isomorphisme de $(\mathbb{R}_+^*, \times)$ sur (I, +), ce qui nous amènera, à notre convenance, à parler des <u>intervalles comme éléments de I ou de $\mathbb{R}_+^*$</u>.

Et, il est immédiat que :

Théorème I-2.2 : (I,+) est un groupe.

Si I est un sous-groupe propre de $\mathbb{R}_+^*$, on dira que c'est une échelle musicale. A titre d'exemples :

- L'échelle de Pythagore est $<2,3> = \{2^n.3^m, n \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{Z}\}$, c'est-à-dire le sous-groupe multiplicatif de $\mathbb{R}_+^*$ engendré par 2 et 3,
- L'échelle de Zarlino est <2,3,5>,
- L'échelle officielle, dite échelle tempérée, ou échelle de Werckmeister, est $<2^{1/12}>$,
- L'échelle de Cordier est $<\frac{3^{1/7}}{2^{1/7}}>$.

c) La consonance :

En musique, la consonance est une notion prépondérante.

Définition :

Nous dirons qu'un intervalle est consonant s'il est formé par deux sons que l'oreille n'éprouve pas le besoin de dissocier. Un intervalle dissonant au contraire est formé par deux sons que l'oreille éprouve le besoin de dissocier, pour aboutir à une consonance.

Ceci a été très bien formulé par L. EULER en 1766, lorsqu'il affirmait que *l'organe de l'ouïe est accoutumé de prendre pour proportion simple toutes les proportions qui n'en diffèrent que fort peu, de sorte que la différence soit quasi imperceptible.*

Observations :

Or, selon une étude du psychologue C. STUMPF (1848-1936),

- 75 % des auditeurs sans formation perçoivent comme un son unique deux sons simultanés à l'octave,
- 50 % réagissent de même à la quinte,
- 33 % à la quarte,
- 25 % à la tierce,
- 10 % à la seconde.

Si le nombre

$$h\left(\frac{p}{q}\right) = \sup(p,q)$$

est défini comme étant la hauteur de la fraction irréductible p/q, on a, par ordre de «pureté » décroissante :

nom	fraction	hauteur	Pourcentage de C. Stumpf
octave	$\frac{2}{1}$	2	75 %
quinte	$\frac{3}{2}$	3	50 %
quarte	$\frac{4}{3}$	4	33 %
tierce	$\frac{5}{4}$	5	25 %
seconde	$\frac{9}{8}$	9	10 %

Conclusion :

A cet égard, la notion d'échelle musicale naturelle, comme sous-ensemble de $\mathbb{Q}_+^*$ contenant 2, ne peut être omise.
Et, parmi les échelles citées précédemment en exemple, seules les échelles de Pythagore et Zarlino sont naturelles.

d) Les notes :

Définition :

Nous avons pu noter que les sons de fréquences f et 2f se fondent particulièrement bien, ce qui nous conduit à identifier de proche en proche les sons de fréquence f, 2f, 4f… 2^nf… ($n \in \mathbb{N}$) et $\frac{f}{2}, \frac{f}{4} \dots \frac{f}{2^p}$ ($p \in \mathbb{N}$).
D'où la relation $\Re_2$ que nous définissons sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\boxed{f_1 \,\Re_2\, f_2 \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{Z},\ f_2 = 2^n f_1}$$

$\Re_2$ est de façon évidente une relation d'équivalence et les classes modulo $\Re_2$, i.e.

$$\{2^n f,\ n \in \mathbb{Z}\}$$

sont appelées notes.

Propriétés fondamentales :

Théorème I-2.3 : Toute note admet un représentant unique appartenant à $[f, 2f[$, $\forall f \in \mathbb{R}_+^*$.

En effet, soit f' une de ses fréquences, il est clair que $\exists!\, n \in \mathbb{N},\ 2^n \leq \frac{f'}{f} < 2^{n+1}$

$$\Leftrightarrow 2^n f \leq f' < 2^{n+1} f$$

$$\Leftrightarrow f \leq \frac{f'}{2^n} < 2f.$$

Notations :

Soient f_1 et f_2 deux notes distinctes et soient n_1 et n_2 les représentants, uniques, appartenant à $[f,2f[$, de f_1 et f_2 respectivement. On peut établir sur $\mathbb{R}_+^*$ la relation d'ordre strict $\mathfrak{R}_3$ définie par :

$$\boxed{f_1 \,\mathfrak{R}_3\, f_2 \Leftrightarrow n_1 < n_2}$$

Conventionnellement, la note la plus petite est appelée DO et on a donné le nom RE, MI, FA, SOL, LA, SI à six autres notes telles que :

DO < RE < MI < FA < SOL < LA < SI < DO

Soit N_0 = {DO, RE, MI, FA, SOL, LA, SI}. N_0 est l'ensemble des notes naturelles.

Si besoin est, on peut également nommer d'autres notes :

Soient $(k_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}_+^*$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $N_n = N_{n-1} \cup \{f_1$ telles que $f_1 \,\mathfrak{R}_3\, f_2$, $f_1 \notin N_{n-1}$, $f_2 \in N_{n-1}$ et $\frac{f_2}{f_1} = k_{n-1}\} \cup \{f_2$ telles que $f_1 \,\mathfrak{R}_3\, f_2$, $f_1 \in N_{n-1}$, $f_2 \notin N_{n-1}$ et $\frac{f_2}{f_1} = k_{n-1}'\}$.

- Si f_1 est telle que $f_1 \,\mathfrak{R}_3\, f_2$, $f_1 \notin N_n$, $f_2 \in N_n$ et $\frac{f_2}{f_1} = k_n$, on note

$f_1 = f_2{}^b$, où ^{b} est un bémol.

Soient $B_0 = \varnothing$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $B_n = \{f_1$ telles que $f_1 \,\mathfrak{R}_3\, f_2$, $f_1 \notin N_{n-1}$, $f_2 \in N_{n-1}$ et $\frac{f_2}{f_1} = k_{n-1}\}$. Alors, $B = \cup B_n$ est l'ensemble des notes bémolisées.

- Si f_2 est telle que $f_1 \,\mathfrak{R}_3\, f_2$, $f_1 \in N_n$, $f_2 \notin N_n$ et $\frac{f_2}{f_1} = k_n'$, on note

$f_2 = f_1{}^\#$, où $^\#$ est un dièse.

Soient $D_0 = \varnothing$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $D_n = \{f_2$ telles que $f_1 \,\mathfrak{R}_3\, f_2$, $f_1 \in N_{n-1}$, $f_2 \notin N_{n-1}$ et $\frac{f_2}{f_1} = k_{n-1}'\}$. Alors, $D = \cup D_n$ est l'ensemble des notes diésées.

- $B \cup D$ forment l'ensemble des notes altérées.

Ainsi, et plus musicalement parlant, un bémol (resp. un dièse) est un signe d'altération que l'on place derrière une note pour indiquer qu'elle est plus grave (resp. plus aiguë) que la note naturelle correspondante.

Enfin, nous affecterons à tout son le numéro de son octave, ce qui nous permettra de distinguer les différents sons d'une même classe de notes.

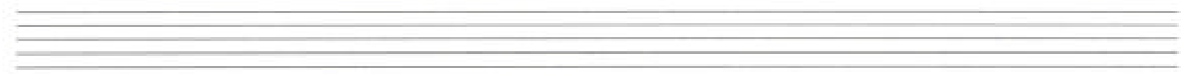
e) Les gammes :

Définition :

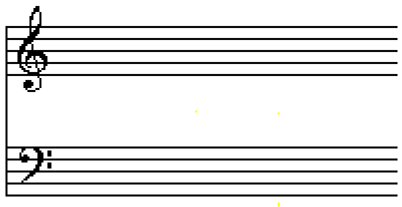
Si le violon, le violoncelle… peuvent émettre des sons quelconques (dans les limites de leur diapason), il existe par contre des instruments tels que le piano, l'orgue… qui ne peuvent produire qu'un nombre limité de sons. Aussi, la solution est de ne prendre qu'un nombre fini de notes : c'est ce que l'on appelle une gamme musicale.

La portée :

Une portée se présente comme suit :



Pour pouvoir placer un son quelconque de la gamme, il nous suffira que soit repéré l'un d'entre eux, le son d'origine en quelque sorte. Le repérage du son d'origine se fait grâce à une clé :



- la clé de sol 2° ligne qui fixe la position du sol 3 sur la 2° ligne de la portée,

- la clé de fa 4° ligne qui fixe celle du fa 2 sur la 4° ligne de la portée.

f) Le tempérament :

On parle de tempérament pour désigner l'ajustement des intervalles, notamment dans les divers systèmes d'accordage des instruments.

Ainsi, si la gamme est divisée en intervalles égaux, on parlera de tempérament égal, alors que si les intervalles qui la composent sont inégaux, on parlera de tempérament inégal.

En résumé, construire une gamme se ramènera à déterminer n réels $f_0 = f$, $f_1 \ldots f_{n-1}$ appartenant à l'intervalle $[f, 2f[$.
Une question se pose pourtant : lesquels ? C'est justement ce à quoi nous nous proposons de répondre dans cette étude, et c'est là tout le problème du tempérament musical.
Les méthodes utilisées à différentes époques pour construire des gammes constitueront, dans chacune de nos parties, une base musicale propice à des considérations mathématiques.

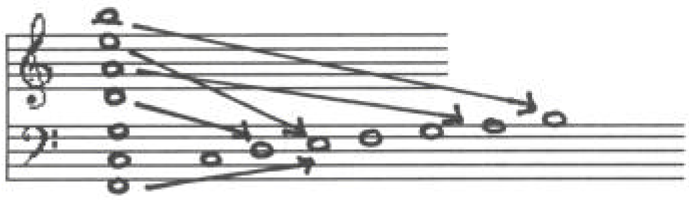
II – LES GAMMES PYTHAGORICIENNES

Les Chinois ont fondé leur système musical sur la flûte de bambou ; les Grecs ont construit le leur sur la lyre. Ni les uns ni les autres n'avaient les moyens techniques de s'occuper de la fréquence des sons, phénomène vibratoire. Pourtant, ils se sont aperçus que deux cordes ou tuyaux de rapport de longueur $\frac{3}{2}$ produisaient des sons particulièrement consonants.

Partant de cette observation, posons-nous la question suivante : est-il possible de construire des gammes basées sur ce rapport ?
Pour y répondre, nous devrons de toute évidence nous placer dans l'échelle naturelle de Pythagore, qui, rappelons-le, n'est autre que le sous-groupe multiplicatif de $\mathbb{Q}_+^*$ engendré par 2 et 3.

1 – Le cycle des quintes ?

L'invention du *cycle des quintes* est attribuée à Pythagore (572-480 av. J.C). La méthode consiste en une <u>progression de quintes ramenées à l'octave</u>. Celles-ci peuvent êtres ascendantes, descendantes ou alternées.
Schématiquement, la démarche est la suivante :



a) Le cycle des quintes ascendantes :

Plus précisément, on part d'un son de fréquence $f_0 = f$, puis on construit la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} f_{n+1} = \frac{3}{2} f_n \ \text{si} \ \frac{3}{2} f_n < 2f \\ f_{n+1} = \dfrac{\frac{3}{2} f_n}{2} \ \text{si} \ \frac{3}{2} f_n \geq 2f \end{cases}$$

Les termes successifs de la suite seront de la forme

$$f_n = \frac{3^n}{2^n} \times \frac{1}{2^p} f$$

p étant défini comme l'entier (unique) tel que $f_n \in [f,2f[$.

En effet, - pour n=0, $f_0 = \frac{3^0}{2^0} \times \frac{1}{2^0}$ f

- pour n=1, $\frac{3}{2} f_0 = \frac{3}{2} f < 2f$, donc $f_1 = \frac{3}{2}$ f
- supposons que $f_n = \frac{3^n}{2^n} \times \frac{1}{2^p}$ f et $f_n \in$ [f,2f[. Deux cas sont possibles :

Si $f \leq f_n < \frac{4}{3} f$, alors $\frac{3}{2} f \leq \frac{3}{2} f_n < 2f$ et $f_{n+1} = \frac{3^{n+1}}{2^{n+1}} \times \frac{1}{2^p}$ f.

Si $\frac{4}{3} f \leq f_n < 2f$, alors $2f \leq \frac{3}{2} f_n < 3f$ ou $f \leq \frac{\frac{3}{2} f_n}{2} < \frac{3}{2} f$, et donc $f_{n+1} = \frac{3^{n+1}}{2^{n+1}} \times \frac{1}{2^{p+1}}$ f.

Et, par récurrence sur n, la propriété est démontrée.

Ainsi, les 53 premiers termes de la suite f_n (utiles ultérieurement) sont :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
f_n	f	$\frac{3}{2}$ f	$\frac{3^2}{2^3}$ f	$\frac{3^3}{2^4}$ f	$\frac{3^4}{2^6}$ f	$\frac{3^5}{2^7}$ f	$\frac{3^6}{2^9}$ f	$\frac{3^7}{2^{11}}$ f	$\frac{3^8}{2^{12}}$ f	$\frac{3^9}{2^{14}}$ f	$\frac{3^{10}}{2^{15}}$ f	$\frac{3^{11}}{2^{17}}$ f

12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
$\frac{3^{12}}{2^{19}}$ f	$\frac{3^{13}}{2^{20}}$ f	$\frac{3^{14}}{2^{22}}$ f	$\frac{3^{15}}{2^{23}}$ f	$\frac{3^{16}}{2^{25}}$ f	$\frac{3^{17}}{2^{26}}$ f	$\frac{3^{18}}{2^{28}}$ f	$\frac{3^{19}}{2^{30}}$ f	$\frac{3^{20}}{2^{31}}$ f	$\frac{3^{21}}{2^{33}}$ f	$\frac{3^{22}}{2^{34}}$ f	$\frac{3^{23}}{2^{36}}$ f	$\frac{3^{24}}{2^{38}}$ f

25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37
$\frac{3^{25}}{2^{39}}$ f	$\frac{3^{26}}{2^{41}}$ f	$\frac{3^{27}}{2^{42}}$ f	$\frac{3^{28}}{2^{44}}$ f	$\frac{3^{29}}{2^{45}}$ f	$\frac{3^{30}}{2^{47}}$ f	$\frac{3^{31}}{2^{49}}$ f	$\frac{3^{32}}{2^{50}}$ f	$\frac{3^{33}}{2^{52}}$ f	$\frac{3^{34}}{2^{53}}$ f	$\frac{3^{35}}{2^{55}}$ f	$\frac{3^{36}}{2^{57}}$ f	$\frac{3^{37}}{2^{58}}$ f

38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
$\frac{3^{38}}{2^{60}}$ f	$\frac{3^{39}}{2^{61}}$ f	$\frac{3^{40}}{2^{63}}$ f	$\frac{3^{41}}{2^{64}}$ f	$\frac{3^{42}}{2^{66}}$ f	$\frac{3^{43}}{2^{68}}$ f	$\frac{3^{44}}{2^{69}}$ f	$\frac{3^{45}}{2^{71}}$ f	$\frac{3^{46}}{2^{72}}$ f	$\frac{3^{47}}{2^{74}}$ f	$\frac{3^{48}}{2^{76}}$ f	$\frac{3^{49}}{2^{77}}$ f	$\frac{3^{50}}{2^{79}}$ f

51	52
$\frac{3^{51}}{2^{80}}$ f	$\frac{3^{52}}{2^{82}}$ f

b) Le cycle des quintes descendantes :

De la même manière, on peut construire la suite $(f_n)_{n\in \mathbb{N}}$ où $f_0 = f$ et

$$\begin{cases} f_{n+1} = \frac{2}{3} f_n \text{ si } \frac{2}{3} f_n \geq f \\ f_{n+1} = \frac{2}{3} f_n \times 2 \text{ si } f_n < f \end{cases}$$

c'est-à-dire la suite de terme général $f_n = \frac{2^n}{3^n} \times 2^p f$ où p est l'entier tel que $f_n \in [f,2f[$ et les 41 premiers termes (utiles ultérieurement) sont :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
f_n	f	$\frac{2^2}{3} f$	$\frac{2^4}{3^2} f$	$\frac{2^5}{3^3} f$	$\frac{2^7}{3^4} f$	$\frac{2^8}{3^5} f$	$\frac{2^{10}}{3^6} f$	$\frac{2^{12}}{3^7} f$	$\frac{2^{13}}{3^8} f$	$\frac{2^{15}}{3^9} f$	$\frac{2^{16}}{3^{10}} f$	$\frac{2^{18}}{3^{11}} f$

12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
$\frac{2^{20}}{3^{12}} f$	$\frac{2^{21}}{3^{13}} f$	$\frac{2^{23}}{3^{14}} f$	$\frac{2^{24}}{3^{15}} f$	$\frac{2^{26}}{3^{16}} f$	$\frac{2^{27}}{3^{17}} f$	$\frac{2^{29}}{3^{18}} f$	$\frac{2^{31}}{3^{19}} f$	$\frac{2^{32}}{3^{20}} f$	$\frac{2^{34}}{3^{21}} f$	$\frac{2^{35}}{3^{22}} f$	$\frac{2^{37}}{3^{23}} f$	$\frac{2^{39}}{3^{24}} f$

25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37
$\frac{2^{40}}{3^{25}} f$	$\frac{2^{42}}{3^{26}} f$	$\frac{2^{43}}{3^{27}} f$	$\frac{2^{45}}{3^{28}} f$	$\frac{2^{46}}{3^{29}} f$	$\frac{2^{48}}{3^{30}} f$	$\frac{2^{50}}{3^{31}} f$	$\frac{2^{51}}{3^{32}} f$	$\frac{2^{53}}{3^{33}} f$	$\frac{2^{54}}{3^{34}} f$	$\frac{2^{56}}{3^{35}} f$	$\frac{2^{58}}{3^{36}} f$	$\frac{2^{59}}{3^{37}} f$

38	39	40
$\frac{2^{61}}{3^{38}} f$	$\frac{2^{62}}{3^{39}} f$	$\frac{2^{64}}{3^{40}} f$

c) Le cycle alterné des quintes :

Soit $q\in \mathbb{N}$.
Il est enfin possible de définir la suite $(f_n)_{n\in \mathbb{N}}$ où $f_0 = f$,

$$\text{Si } n \leq q, \begin{cases} f_{n+1} = \frac{3}{2} f_n \text{ si } \frac{3}{2} f_n < 2f \\ f_{n+1} = \frac{\frac{3}{2} f_n}{2} \text{ si } \frac{3}{2} f_n \geq 2f \end{cases}$$

$$\text{Si } n > q, \begin{cases} f_{n+1} = \frac{2}{3} f_{n-q} \text{ si } \frac{2}{3} f_{n-q} \geq f \\ f_{n+1} = \frac{2}{3} f_{n-q} \times 2 \text{ si } f_{n-q} < f \end{cases}$$

qui n'est autre que la suite de terme général :

$$\begin{cases} f_n = \dfrac{3^n}{2^n} \times \dfrac{1}{2^p}\ f, \text{ si } n \leq q \\ f_n = \dfrac{2^{n-q}}{3^{n-q}} \times 2^p\ f, \text{ si } n > q \end{cases}$$

où p est l'entier tel que $f_n \in [f,2f[$.

Si q = 2, les 7 premiers termes de la suite sont :

n	0	1	2	3	4	5	6
f_n	f	$\frac{3}{2}f$	$\frac{3^2}{2^3}f$	$\frac{2^2}{3}f$	$\frac{2^4}{3^2}f$	$\frac{2^5}{3^3}f$	$\frac{2^7}{3^4}f$

et si q = 5, les 7 premiers termes de la suite sont alors :

n	0	1	2	3	4	5	6
f_n	f	$\frac{3}{2}f$	$\frac{3^2}{2^3}f$	$\frac{3^3}{2^4}f$	$\frac{3^4}{2^6}f$	$\frac{3^5}{2^7}f$	$\frac{2^2}{3}f$

2 – La spirale des quintes !

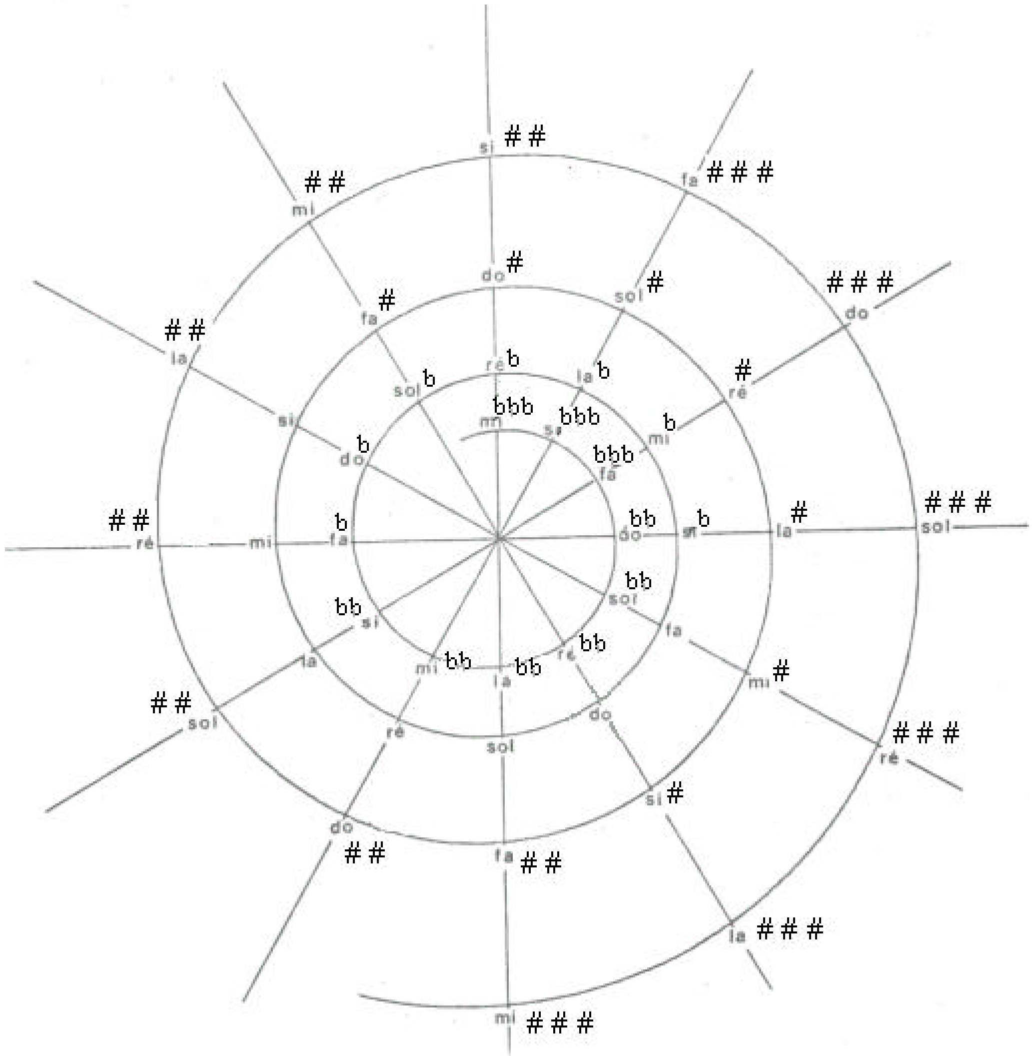
a) Enoncé du problème :

Nous voulons construire une gamme, c'est-à-dire un nombre fini de notes. Voyons donc si la suite $(f_n)_{n\in \mathbb{N}}$ est périodique i.e. si l'on peut trouver un entier n tel que $f_n = f_0$, ce qui revient, dans tous les cas, à chercher deux entiers n et p tels que :

$$\boxed{\frac{3^n}{2^n} \times \frac{1}{2^p} = 1}$$

ou encore $3^n = 2^{n+p}$.
Or, 3^n étant impair et 2^{n+p} étant pair, il est clair que le cycle des quintes n'existe pas !

Dès lors, on préfère parler de spirale des quintes.
Et, l'illustration suivante suffira à nous convaincre totalement de la pertinence d'une telle notion :



Remarquons que sur un même rayon de la spirale se trouvent des notes qui correspondent à une seule touche sur un piano.

b) La solution du musicien :

Les musiciens de l’Antiquité et du Moyen-Age, aussi bien occidentaux qu’orientaux, ont trouvé comme solution d’arrêter la progression par quinte lorsqu’ils revenaient dans un « voisinage », plus ou moins grand, du son dont ils étaient partis.
Ainsi, des octaves constituées de 2, 3, 4, 5, 6, 7…etc… notes ont vu le jour.

La gamme diatonique de Pythagore :

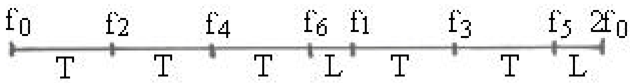
Choisissons tout d’abord de procéder par quintes ascendantes. En identifiant $f_7 = \frac{3^7}{2^{11}}$ et f_0, nous répartissons les 7 sons suivants dans l’octave :

n	0	1	2	3	4	5	6
f_n	f	$\frac{3}{2}$ f	$\frac{3^2}{2^3}$ f	$\frac{3^3}{2^4}$ f	$\frac{3^4}{2^6}$ f	$\frac{3^5}{2^7}$ f	$\frac{3^6}{2^9}$ f

ou, dans l’ordre croissant :

n	0	2	4	6	1	3	5
f_n	f	$\frac{3^2}{2^3}$ f	$\frac{3^4}{2^6}$ f	$\frac{3^6}{2^9}$ f	$\frac{3}{2}$ f	$\frac{3^3}{2^4}$ f	$\frac{3^5}{2^7}$ f

La représentation linéaire est la suivante :



Les intervalles entre deux sons consécutifs sont de deux types :

- $\frac{f_2}{f_0} = \frac{f_4}{f_2} = \frac{f_6}{f_4} = \frac{f_3}{f_1} = \frac{f_5}{f_3} = \frac{3^2}{2^3} = T$
- $\frac{f_1}{f_6} = \frac{2f_0}{f_5} = \frac{2^8}{3^5} = L$

et sont respectivement appelés <u>ton pythagoricien</u> (T) et <u>limma pythagoricien</u> (L).

Parallèlement, et au lieu de procéder par quintes ascendantes, nous aurions pu procéder par quintes descendantes ou même prendre q quintes ascendantes et 6-q quintes descendantes, où $q \in \{0,1,2,3,4,5,6\}$.
Ces 7 possibilités constituent en fait les 7 modes grecs primitifs, qui se différenciaient donc les uns des autres par la succession des intervalles, chacun apportant ainsi un caractère différent :

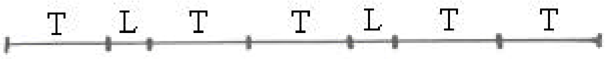
- q = 6 : mode hypolydien,
- q = 5 : mode lydien,
- q = 4 : mode hypophrygien,
- q = 3 : mode phrygien,
- q = 2 : mode hypodorien,
- q = 1 : mode dorien,
- q = 0 : mode mixolydien.

Ces différents modes ont fini par n'en former plus que deux :

- <u>le mode mineur</u> (2 quintes ascendantes) :

n	0	2	5	3	1	6	4
f_n	f	$\frac{3^2}{2^3}f$	$\frac{2^5}{3^3}f$	$\frac{2^2}{3}f$	$\frac{3}{2}f$	$\frac{2^7}{3^4}f$	$\frac{2^4}{3^2}f$

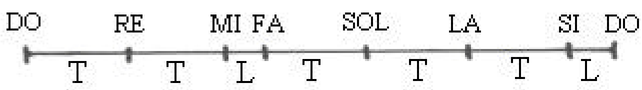
que l'on peut représenter comme suit :



- <u>le mode majeur</u> (5 quintes ascendantes) :

n	0	2	4	6	1	3	5
f_n	f DO	$\frac{3^2}{2^3}f$ RE	$\frac{3^4}{2^6}f$ MI	$\frac{2^2}{3}f$ FA	$\frac{3}{2}f$ SOL	$\frac{3^3}{2^4}f$ LA	$\frac{3^5}{2^7}f$ SI

que l'on peut représenter comme suit :



Cette gamme est appelée <u>tonalité de DO majeur</u> ou gamme diatonique de Pythagore (du grec dia = par et tonos = tons) et c'est celle qui a finalement servi de référence. C'est pourquoi, il nous arrivera de nous y rapporter par la suite, pour nommer les notes.

<u>Généralités</u> :

Soit $\varepsilon \in [0,1[$. Un premier enjeu est de trouver n et p entiers tels que $\frac{3^n}{2^{n+p}} = 1+\varepsilon$ ou $2-\varepsilon$. Distinguons les deux cas :

- si $\frac{3^n}{2^{n+p}} = 1+\varepsilon$, alors $\varepsilon = \frac{3^n}{2^{n+p}} - 1$
- si $\frac{3^n}{2^{n+p}} = 2-\varepsilon$, alors $\varepsilon = 2 - \frac{3^n}{2^{n+p}}$.

On prendra alors :

$$\boxed{\varepsilon = \min\left(\frac{3^n}{2^{n+p}} - 1,\ 2 - \frac{3^n}{2^{n+p}}\right)}$$

en remarquant que $\frac{3^n}{2^{n+p}} - 1 < 2 - \frac{3^n}{2^{n+p}} \Leftrightarrow \frac{3^n}{2^{n+p}} < \frac{3}{2}$.

On va bien sûr chercher à ce que ε soit le plus petit possible. Un petit programme (cf. annexe) nous donne les résultats suivants :

Quintes ascendantes

n	ε
5	0,10156250
7	**0,06787109**
12	**0,01364326**
41	0,02279490
53	**0,00209031**

Quintes descendantes

n	ε
5	**0,05349794**
7	0,12711477
12	0,02691926
41	**0,01152885**
53	0,00417191

On peut noter que :

- d'une part, l'approximation par 5 ou 41 quintes descendantes est meilleure que celle par 5 ou 41 quintes ascendantes, alors que l'approximation par 7, 12 ou 53 quintes ascendantes est meilleure que celle par 7, 12 ou 53 quintes descendantes, et que,
- d'autre part, l'approximation par 7 quintes est moins bonne que par 5 quintes descendantes.

Un second enjeu est de rechercher des intervalles consonants et donc, d'après la corrélation établie en introduction, de déterminer des fractions de hauteur minimale.
Pourtant, d'après l'étude du mode phrygien (3 quintes ascendantes), à savoir :

n	0	2	6	4	1	3	5
f_n	f	$\frac{3^2}{2^3}$ f	$\frac{2^5}{3^3}$ f	$\frac{2^2}{3}$ f	$\frac{3}{2}$ f	$\frac{3^3}{2^4}$ f	$\frac{2^4}{3^2}$ f

nous voyons que sup $(2^5, 3^3) = 2^5 < 3^4 =$ sup $(3^4, 2^6)$ et que sup $(2^4, 3^2) = 2^4 < 3^5 =$ sup $(3^5, 2^7)$. Autrement dit, le mi et le si de ce mode sont de plus petite hauteur que ceux du mode majeur.

A partir de là, une question (ouverte) paraît pourtant légitime, à savoir : *pourquoi avoir choisi le mode lydien, plutôt que le mode phrygien, comme mode de référence ?*

c) La solution du mathématicien :

Minimisation de l'erreur d'approximation :

L'équation $\frac{3^n}{2^n} = 2^p$, où n et p sont des entiers relatifs de même signe est équivalente à $\frac{\ln \frac{3}{2}}{\ln 2} = \frac{p}{n} \Leftrightarrow \log_2 \frac{3}{2} = \frac{p}{n} \Leftrightarrow \log_2 3 - \log_2 2 = \frac{p}{n}$. Ou mieux :

$$\boxed{\log_2 3 = \frac{p+n}{n}}.$$

Nous avons constaté p. 21 que cette équation n'admet aucune solution dans $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, mais la méthode des fractions continues décrite dans l'introduction va nous permettre d'approcher au mieux $\log_2 3$ par des rationnels.

Utilisons-la pour écrire $\log_2 3$ sous la forme :

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{a_4 + \cfrac{1}{a_5 + \cfrac{1}{a_6 + \cfrac{1}{a_{7} + \dots}}}}}}}$$

0° QUOTIENT PARTIEL : $2^1 < 3 < 2^2$, donc $1 < \frac{\ln 3}{\ln 2} < 2$ et $\underline{a_0 = 1}$. De plus, la suite$(r_n)_{n\in \mathbb{N}}$ nous permet de poser $r_0 = \frac{3}{2^1}$ et on a $\frac{1}{\frac{\ln 3}{\ln 2} - 1} = \frac{\ln 2}{\ln \frac{3}{2}} = \frac{\ln 2}{\ln r_0}$.

1° QUOTIENT PARTIEL : $r_0^1 < 2 < r_0^2$, donc $1 < \frac{\ln 2}{\ln r_0} < 2$ et $\underline{a_1 = 1}$. De plus, $r_1 = \frac{2}{r_0^1} = \frac{4}{3}$, et on a $\frac{1}{\frac{\ln 2}{\ln r_0} - 1} = \frac{\ln \frac{3}{2}}{\ln \frac{4}{3}} = \frac{\ln r_0}{\ln r_1}$.

2° QUOTIENT PARTIEL : $r_1^1 < r_0 < r_1^2$, donc $1 < \frac{\ln r_0}{\ln r_1} < 2$ et $\underline{a_2 = 1}$. En posant $r_2 = \frac{r_0}{r_1^1} = \frac{9}{8}$, on a $\frac{1}{\frac{\ln r_0}{\ln r_1} - 1} = \frac{\ln \frac{4}{3}}{\ln \frac{9}{8}} = \frac{\ln r_1}{\ln r_2}$.

3° QUOTIENT PARTIEL : $r_2^2 < r_1 < r_2^3$, donc $2 < \dfrac{\ln r_1}{\ln r_2} < 3$ et $\underline{a_3 = 2}$. Avec $r_3 = \dfrac{r_1}{r_2^2} = \dfrac{256}{243}$, on a $\dfrac{1}{\dfrac{\ln r_1}{\ln r_2} - 1} = \dfrac{\ln \dfrac{9}{8}}{\ln \dfrac{256}{243}} = \dfrac{\ln r_2}{\ln r_3}$.

4° QUOTIENT PARTIEL : $r_3^2 < r_2 < r_3^3$, donc $2 < \dfrac{\ln r_2}{\ln r_3} < 3$ et $\underline{a_4 = 2}$. On a $r_4 = \dfrac{r_2}{r_3^2} = \dfrac{531441}{524288}$.

Donc, $\dfrac{1}{\dfrac{\ln r_2}{\ln r_3} - 1} = \dfrac{\ln \dfrac{256}{243}}{\ln \dfrac{531441}{524288}} = \dfrac{\ln r_3}{\ln r_4}$.

5° QUOTIENT PARTIEL : $r_4^3 < r_3 < r_4^4$, donc $3 < \dfrac{\ln r_3}{\ln r_4} < 4$ et $\underline{a_5 = 3}$.

6° QUOTIENT PARTIEL : on trouve $\underline{a_6 = 1}$.
7° QUOTIENT PARTIEL : on trouve $\underline{a_7 = 5}$.

Nous avons donc : $\log_2 3 = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{5 + \ldots}}}}}}}$

et nous obtenons les convergentes :

0° CONVERGENTE : $\dfrac{p_0}{q_0} = \dfrac{a_0}{1} = \dfrac{1}{1}$,
1° CONVERGENTE : $\dfrac{p_1}{q_1} = \dfrac{a_1 a_0 + 1}{a_1} = \dfrac{2}{1}$,
2° CONVERGENTE : $\dfrac{p_2}{q_2} = \dfrac{a_2 p_1 + p_0}{a_2 q_1 + q_0} = \dfrac{3}{2}$,
3° CONVERGENTE : $\dfrac{p_3}{q_3} = \dfrac{a_3 p_2 + p_1}{a_3 q_2 + q_1} = \dfrac{8}{5}$,
4° CONVERGENTE : $\dfrac{p_4}{q_4} = \dfrac{a_4 p_3 + p_2}{a_4 q_3 + q_2} = \dfrac{19}{12}$,
5° CONVERGENTE : $\dfrac{p_5}{q_5} = \dfrac{a_5 p_4 + p_3}{a_5 q_4 + q_3} = \dfrac{65}{41}$,
6° CONVERGENTE : $\dfrac{p_6}{q_6} = \dfrac{a_6 p_5 + p_4}{a_6 q_5 + q_4} = \dfrac{84}{53}$,
7° CONVERGENTE : $\dfrac{p_7}{q_7} = \dfrac{a_7 p_6 + p_5}{a_7 q_6 + q_5} = \dfrac{485}{306}$… etc…

Dans l'« équation » $\frac{3^n}{2^n} = 2^p$, le nombre n représente le nombre de quintes qui « boucleraient » p octaves. Donc, dans les convergentes, le dénominateur représente ce même nombre n de quintes.

Ainsi, on trouve les valeurs :

$$\boxed{n = 1, 2, 5, 12, 41, 53, 306\ldots}$$

Des quintes ascendantes ou descendantes ?

Rappelons que l'on veut approximer $\frac{3^n}{2^{n+p}}$ ou $\frac{2^{n+p}}{3^n}$ à 1, ce qui revient à chercher les entiers n et p tels que $\log_2 3 = \frac{p+n}{n}$ ou encore $\log_2 3 = \frac{-(p+n)}{-n}$.

Il reste donc à savoir s'il est préférable de choisir l'un plutôt que l'autre, c'est à dire de prendre des quintes ascendantes ou descendantes. C'est ce que nous allons déterminer maintenant :

- <u>cas n = 1</u> : on a p = 0 et p = 1. Donc les meilleures approximations de 1 sont $\frac{3}{2}$ ou $\frac{2}{3}$, et $\frac{3}{2^2}$ ou $\frac{2^2}{3}$. Or, $\frac{2}{3}$ et $\frac{3}{2^2}$ sont strictement inférieur à 1 et n'appartiennent donc pas à [1,2[. Par conséquent, on choisira $\frac{3}{2}$ et $\frac{2^2}{3}$.
- <u>cas n = 2</u> : les approximations de 1 sont $\frac{3^2}{2^3}$ ou $\frac{2^3}{3^2}$. Nous choisirons, selon le même principe, $\frac{3^2}{2^3}$.
- <u>cas n = 5</u> : de la même façon, on choisira $\frac{2^8}{3^5}$ plutôt que $\frac{3^5}{2^8}$.
- <u>cas n = 12</u> : on prend $\frac{3^{12}}{2^{19}}$ plutôt que $\frac{2^{19}}{3^{12}}$. Cette différence entre 12 quintes et 7 octaves est appelée comma pythagoricien.
- <u>cas n = 41</u> : on conserve $\frac{2^{65}}{3^{41}}$ et non $\frac{3^{41}}{2^{65}}$.
- <u>cas n = 53</u> : on sélectionne $\frac{3^{53}}{2^{84}}$ et non son inverse… etc…

En résumé, l'approximation que l'on fait en assimilant $\frac{3^n}{2^{n+p}}$ à 1 est d'autant meilleure qu'elle est le résultat de 1 quinte ascendante, 1 quinte descendante, 2 quintes ascendantes, 5 quintes descendantes, 12 quintes ascendantes, 41 quintes descendantes ou 53 quintes ascendantes… etc…
Et, si l'on ne retrouve pas la valeur n = 7, c'est pour la simple raison que l'approximation par 7 quintes est moins bonne que celle obtenue par 5 quintes descendantes.
Nous retrouvons les conclusions du tableau de la page 25 !

D'après le théorème I-1.4, nous savons que ce sont en fait les r_0, r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6… trouvés lors du calcul des quotients partiels de $\log_2 3$. Nous les noterons donc ainsi.
De plus, nous savons que nous avons construit une suite du groupe G = <2,3>. Il s'agit de la suite

$$\boxed{2 > \frac{3}{2} > \frac{2^2}{3} > \frac{3^2}{2^3} > \frac{2^8}{3^5} > \frac{3^{12}}{2^{19}} > \frac{2^{65}}{3^{41}} > \frac{3^{53}}{2^{84}} > \ldots > 1}$$

La notion de comma :

Par analogie avec la notion de comma pythagoricien, toutes ces différences entre succession de quintes et succession d'octaves seront appelées des commas.
La suite précédente est donc la suite des commas de G = <2,3>, c'est-à-dire des meilleures approximations de 1.
On remarque que ces approximations sont d'autant meilleures que les puissances de 3 sont grandes.

Donnons la définition suivante :

Soit G = <2,3> et $c \in G$. Nous dirons que c est un comma de G si et seulement si :
i) $c \neq 1$
ii) $g \in G \setminus \{1\}$ et $|\log g| < |\log c|$ entraînent $h(g) > h(c)$.

Et, d'après [F], on a :

Théorème II-2.1 : c est un comma de G si et seulement si c'est un r_n.

Construction d'un groupe quotient :

L'ensemble $H_n = \langle r_n \rangle$ est un sous-groupe (commutatif, donc distingué) du groupe multiplicatif G = <2, 3>. Nous nous proposons d'étudier le groupe quotient G/H_n, qui n'est autre que l'ensemble des classes $xH_n = \{y \in G, y = xh, h \in H_n\}$ où $x \in G$.

- G/H_n est définie comme étant la gamme abstraite.

Théorème II-2.2 : G/H_n est un groupe isomorphe à $\mathbb{Z}$ qui est engendré par la classe de r_{n-1}.

Preuve : D'après le théorème I-1.4, $r_n = p^{x_n} q^{y_n}$, avec $(x_n, y_n) = ((-1)^{n-1}p_n, (-1)^n q_n)$.

1) Il est équivalent de démontrer, en notation additive, que $\mathbb{Z}^2/\mathbb{Z}(x_n, y_n)$ est un groupe qui est engendré par la classe de (x_{n-1}, y_{n-1}) isomorphe à $\mathbb{Z}$:
G et $\mathbb{Z}^2$ étant commutatifs, H_n et $K_n = (x_n,y_n)\mathbb{Z}$ sont respectivement des sous-groupes distingués de l'un et de l'autre et on peut définir les quotients G/H_n et $\mathbb{Z}^2/K_n$.

Construisons le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge] (G, \bullet) \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "i"'] & (\mathbb{Z}^2, +) \arrow[d, "j"] \\ G/H_n \arrow[r, "f_2"] & \mathbb{Z}^2/K_n \end{tikzcd}$$

$g = 2^x 3^y$ $\qquad$ $f_1(g) = (x,y)$

$i(g) = \hat{g}$ $\qquad$ $j \circ f_1(g) = \overline{f_1(g)}$

f_1 est un morphisme de groupe : $f_1(g_1 g_2) = f_1(p^{x_1}q^{y_1}p^{x_2}q^{y_2}) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) = (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = f(g_1) + f(g_2)$.

f_1 est bijective : elle est surjective, de façon évidente,

elle est injective, car $\mathrm{Ker}\, f_1 = \{g,\ f_1(g) = (0,0)\} = 1$

La définition du diagramme est correcte : si $g_1 g_2^{-1} \in H_n$, alors

$$f(g_1 g_2^{-1}) \in f(H_n) \subseteq K_n$$

$$\Leftrightarrow f(g_1) - f(g_2)^{-1} \in K_n$$

et on a bien $f_2(\hat{g}) = \overline{f_1(g)}$.

f_2 est un morphisme de groupe :

$f_2(\hat{g}_1\ \hat{g}_2) = f_2(\widehat{g_1 g_2}) = \overline{f_1(g_1 g_2)} = \overline{f_1(g_1) + f_1(g_2)} = \overline{f_1(g_1)} + \overline{f_1(g_2)} = f_1(\hat{g}_1) + f_2(\hat{g}_2)$.

f_2 est bijective : elle est surjective, de façon évidente,

elle est injective, car : $\mathrm{Ker}\, f_2 = \{\hat{g},\ \overline{f_1(g)} = \overline{0}\ \} = \{\hat{g},\ f_1(g) \in K_n\} = \{\hat{g}, g \in H_n\} = \{\hat{0}\}$.

Par conséquent, f_2 est un isomorphisme.

2) Générateur :

Dire que (a, b) est générateur de $\mathbb{Z}^2/(x_n, y_n)\mathbb{Z}$ revient à dire que tout $(x,y) \in \mathbb{Z}^2$ s'écrit $(x, y) = h(a, b) + k(x_n, y_n)$, donc que (a, b) et (x_n, y_n) constituent une base de $\mathbb{Z}^2$.

Or, d'après le théorème I-1.2, $x_n y_{n-1} - x_{n-1} y_n = (-1)^{n-1}$, donc (x_n, y_n) et (x_{n-1}, y_{n-1}) sont linéairement indépendants.

Donc, on peut prendre $(a, b) = (x_{n-1}, y_{n-1})$.

3) Isomorphisme :

Considérons l'application $\phi : (\mathbb{Z}, +) \longrightarrow (< \overline{(x_{n-1}, y_{n-1})} >, +)$. Il s'agit, de toute

$$n \longmapsto n\, \overline{(x_{n-1}, y_{n-1})}$$

évidence d'un morphisme de groupe surjectif.

Par conséquent, si $\mathrm{Ker}\, \phi = \{n \in \mathbb{Z},\ n\, \overline{(x_{n-1}, y_{n-1})} = 0\} = \{0\}$, alors on aura $< \overline{(x_{n-1}, y_{n-1})} > \approx \mathbb{Z}$.

Supposons qu'il existe $n \neq 0$ tel que $n\,\overline{(x_{n-1}, y_{n-1})} = \overline{0}$

$$\Leftrightarrow n(x_{n-1}, y_{n-1}) \in (x_n, y_n)\mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} nx_{n-1} = lx_n \\ ny_{n-1} = ly_n \end{cases}, l \in \mathbb{Z}$$

Donc, $nl(x_n y_{n-1} - x_{n-1} y_n) = 0$.

Si $l = 0$, alors $(x_{n-1}, y_{n-1}) = (0, 0)$ ce qui est impossible, par définition de (x_n, y_n).

Si $l \neq 0$, alors $x_n y_{n-1} - x_{n-1} y_n = 0$, ce qui, d'après le théorème I-1.2, est impossible.

ÿ

- Les représentants de plus petite hauteur des différentes classes d'équivalence, i.e. des éléments de G modulo H_n, seront appelés notes abstraites .

- Soit $\overline{x} \in G/H_n$ une note abstraite. On appellera degré de $\overline{x}$ le nombre $d \in \mathbb{Z}$ tel que $\overline{x} = \overline{r_{n-1}}^{\,d}$.

- Si xH_n et $x'H_n$ sont deux notes abstraites, l'intervalle abstrait qu'elles déterminent est, par définition, $\frac{x'}{x} H_n$.

Théorème II-2.3 : on peut additionner les intervalles abstraits et $yH_n + y'H_n = yy'H_n$

Preuve : En effet, si $\frac{y_1}{y_2} H_n = \frac{y_1'}{y_2'} H_n$ et $\frac{z_1}{z_2} H_n = \frac{z_1'}{z_2'} H_n$, alors $\frac{y_1}{y_2} = \frac{y_1'}{y_2'} h$, $h \in H_n$ et $\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1'}{z_2'} h'$, $h' \in H_n$, et donc $\frac{y_1\, z_1}{y_2\, z_2} = \frac{y_1'\, z_1'}{y_2'\, z_2'} hh'$, $hh' \in H_n$, c'est-à-dire $\frac{y_1\, z_1}{y_2\, z_2} H_n = \frac{y_1'\, z_1'}{y_2'\, z_2'} H_n$.

Donc, la définition est correcte.

ÿ

- Enfin, l'ensemble des notes abstraites (ou des intervalles abstraits) forme la gamme chromatique associée à la gamme abstraite G/H_n. On la notera Γ_n.

Recherche de représentants de plus petite hauteur :

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $H_n = \langle r_n \rangle = \langle \frac{3^{q_n}}{2^{p_n}} \rangle$ où q_n et $p_n \in \mathbb{Z}$. Soit $x = \frac{3^q}{2^p}$, avec q et $p \in \mathbb{Z}$. Si q et q_n sont de même signe et $q < q_n$, alors x sera appelé résidu de xH_n.

Commençons par construire la suite $(r_n')_{n \in \mathbb{N}}$ des meilleures approximations de 2 à partir de la suite $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des meilleures approximations de 1 :

$$\frac{1}{2} < \frac{2}{3} < \frac{3}{2^2} < \frac{2^3}{3^2} < \frac{3^5}{2^8} < \frac{2^{19}}{3^{12}} < \frac{3^{41}}{2^{65}} < \frac{2^{84}}{3^{53}} < \ldots < 1$$

ou, ce qui revient au même, la suite :

$$1 < \frac{2^2}{3} < \frac{3}{2} < \frac{2^4}{3^2} < \frac{3^5}{2^7} < \frac{2^{20}}{3^{12}} < \frac{3^{41}}{2^{64}} < \frac{2^{85}}{3^{53}} < \ldots < 2.$$

Nous l'utiliserons au cours des démonstrations qui suivent.

Lemme 1 : Soient $n \in \mathbb{N}$ et $H = \langle r_n \rangle = \langle \frac{3^{q_n}}{2^{p_n}} \rangle$ où q_n et $p_n \in \mathbb{Z}$.
Soit $x \geq 1$, $x = \frac{3^q}{2^p}$ avec q et $p \in \mathbb{Z}$.
Soient $m \in \mathbb{N}$ et $y = x\, r_n^{\,m}$.
Alors $y \geq 1$.

Preuve : On se place dans les hypothèses du lemme.
Pour m = 0, y = x et la propriété est vraie.
Supposons la propriété vérifiée au rang m, i.e. $x\, r_n^{\,m} \geq 1$. Alors, on a $y = x\, r_n^{\,m}\, r_n \geq r_n$. Or, $r_n > 1$, et la propriété est vérifiée au rang m+1.
Par récurrence sur m, le lemme est démontré.
ÿ

Lemme 2 : Nous faisons les mêmes hypothèses que précédemment, en supposant de plus que x est un résidu de xH_n.
Alors, l'élément de plus petite hauteur de l'ensemble $\{y \in G,\ y = x \times r_n^{\,m},\ m \in \mathbb{N}\}$ est x.

Preuve : Supposons les hypothèses vérifiées.
Si n pair, alors $r_n = \frac{3^{q_n}}{2^{p_n}}$ avec q_n et $p_n \in \mathbb{N}$, $x = \frac{3^q}{2^p}$ avec q et $p \in \mathbb{N}$, $q < q_n$ et

$$y = \frac{3^{q + q_n m}}{2^{p + p_n m}}.$$

$x \geq 1$, donc $2^p \leq 3^q$.
D'après le lemme 1, $y \geq 1$, donc $2^{p + p_n m} \leq 3^{q + q_n m}$.
De plus, $3^q \leq 3^{q + q_n m}$. Par conséquent, x est de plus petite hauteur que y.

Si n impair, alors $r_n = \frac{2^{p_n}}{3^{q_n}}$ avec q_n et $p_n \in \mathbb{N}$, $x = \frac{2^p}{3^q}$ avec q et p $\in \mathbb{N}$, $q < q_n$ et

$y = \frac{2^{p+p_n^m}}{3^{q+q_n^m}}$.

$x \geq 1$, donc $3^q \leq 2^p$.

D'après le lemme 1, $y \geq 1$, donc $3^{q+q_n^m} \leq 2^{p+p_n^m}$.

De plus, $2^p \leq 2^{p+p_n^m}$. Par conséquent x est de plus petite hauteur que y.

ÿ

> Lemme 3 : Soient $n \in \mathbb{N}$ et $H_n = <r_n> = <\frac{3^{q_n}}{2^{p_n}}>$ où q_n et $p_n \in \mathbb{Z}$.
>
> Soit $x \in [1,2[$, $x = \frac{3^q}{2^p}$ avec q et p $\in \mathbb{Z}$, x résidu de xH_n.
>
> Alors $x\, r_n \in [1,2[$ et $\frac{x}{r_n} \in [1,2[$.

<u>Preuve</u> : On se place dans les hypothèses du lemme.

- *1° CAS : soit $y = x\, r_n$.*

Alors, $r_n \leq y$. Or $r_n > 1$ et la première inégalité est vérifiée.

Reste à montrer que $y < 2$, i.e. $x < \frac{2^{p_n+1}}{3^{q_n}} = r_n$'.

Or, x étant un résidu de xH_n, on a $q < q_n$.

Donc, $x \leq r'_{n-1}$, car $r'_{n-1} = \frac{3^{q'}}{2^{p'}}$ où q', p' $\in \mathbb{N}$ et $q' < q_n$.

D'où $x < r'_n$ et la seconde inégalité est vérifiée.

- *2° CAS : soit $y = \frac{x}{r_n}$.*

Alors, $y < \frac{2}{r_n}$. Or, $\frac{1}{r_n} < 1$, donc la seconde inégalité est vérifiée.

Reste à montrer que $1 \leq \frac{x}{r_n}$, i.e. $x \geq r_n$.

Or, x étant un résidu de xH_n, on a $q < q_n$. D'où $x \geq r_n$, par construction de la suite $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$, et la première inégalité est vérifiée.

ÿ

> Lemme 4 : Soient $n \in \mathbb{N}$ et $H_n = <r_n> = <\frac{3^{q_n}}{2^{p_n}}>$ où q_n et $p_n \in \mathbb{Z}$.
>
> Soit $x \in [1,2[$, $x = \frac{3^q}{2^p}$ avec q et p $\in \mathbb{Z}$, x résidu de xH_n.
>
> Soient $m < 0$ et $y = x\, r_n^m$.
>
> Alors, l'élément de plus petite hauteur de l'ensemble $\{y \in G, y = x \times r_n^m, m < 0\}$ est x ou $\frac{x}{r_n}$ et il appartient à [1,2[.

Preuve : Supposons les hypothèses vérifiées.

- *Si n pair*, alors $r_n = \dfrac{3^{q_n}}{2^{p_n}}$ avec q_n et $p_n \in \mathbb{N}$, $x = \dfrac{3^q}{2^p}$ avec q et p $\in \mathbb{N}$, $q < q_n$.

Pour m = -1, $y = \dfrac{x}{r_n} = \dfrac{3^q}{2^p} \times \dfrac{2^{p_n}}{3^{q_n}} = \dfrac{2^{p_n - p}}{3^{q_n - q}}$.

$x \geq 1$, donc $2^p \leq 3^q$.
D'après le lemme 3, $y \geq 1$, donc $3^{q_n - q} \leq 2^{p_n - p}$.
Et, $3^q \leq 2^{p_n - p} \Leftrightarrow 2^p 3^q \leq 2^{p_n}$.

Ainsi, x est de plus petite hauteur que $\dfrac{x}{r_n}$ si et seulement si $2^p 3^q \leq 2^{p_n}$.

Pour m < -1, $y = x\, r_n^{\,m} = \dfrac{x}{r_n} r_n^{\,m+1}$. Or, d'après le lemme 2, $\dfrac{x}{r_n}$ est un élément de plus petite hauteur que y, ce qui nous ramène au cas m = -1.

- *Si n impair*, alors $r_n = \dfrac{2^{p_n}}{3^{q_n}}$ avec q_n et $p_n \in \mathbb{N}$, $x = \dfrac{2^p}{3^q}$ avec q et p $\in \mathbb{N}$, $q < q_n$.

Pour m = -1, $y = \dfrac{x}{r_n} = \dfrac{2^p}{3^q} \times \dfrac{3^{q_n}}{2^{p_n}} = \dfrac{3^{q_n - q}}{2^{p_n - p}}$.
$x \geq 1$, donc $3^q \leq 2^p$.
D'après le lemme 3, $y \geq 1$, donc $2^{p_n - p} \leq 3^{q_n - q}$.
Et, $2^p \leq 3^{q_n - q} \Leftrightarrow 2^p 3^q \leq 3^{q_n}$.

Ainsi, x est de plus petite hauteur que $\dfrac{x}{r_n}$ si et seulement si $2^p 3^q \leq 3^{q_n}$.

Pour m < -1, $y = x\, r_n^{\,m} = \dfrac{x}{r_n} r_n^{\,m+1}$. Or, d'après le lemme 2, $\dfrac{x}{r_n}$ est un élément de plus petite hauteur que y, ce qui nous ramène au cas m = -1.

Enfin, $x \in [1,2[$ par hypothèse et $\dfrac{x}{r_n} \in [1,2[$ d'après le lemme 3.

ÿ

Lemme 5 : Soit $n \in \mathbb{N}$, n pair. Les conditions $2^p 3^q \leq 2^{p_n}$ et $2^p 3^q \leq 3^{q_n}$ sont équivalentes.

Preuve : Supposons n pair et $2^p 3^q \leq 2^{p_n}$. $r_n = \dfrac{3^{q_n}}{2^{p_n}} > 1$ donc $2^{p_n} < 3^{q_n}$. Donc $2^p 3^q \leq 3^{q_n}$.

Supposons n pair et $2^p 3^q > 2^{p_n}$. Alors, $2^p 3^q > 3^{q_n}$. En effet, admettons que l'on ait $2^p 3^q \leq 3^{q_n}$. Alors, $1 < \dfrac{2^p 3^q}{2^{p_n}} \leq \dfrac{3^{q_n}}{2^{p_n}}$, ce qui est impossible, d'après le théorème I-1.6.

ÿ

Résumons tout ceci :

Théorème II-2.4 : Soient $n \in \mathbb{N}$ et $H_n = \langle r_n \rangle = \langle \frac{3^{q_n}}{2^{p_n}} \rangle$ où q_n et $p_n \in \mathbb{Z}$.
Soit $x \in [1,2[$, $x = \frac{3^q}{2^p}$ avec q et $p \in \mathbb{Z}$, x résidu de xH_n.
Si $2^p3^q \leq 3^{q_n}$, x est le représentant de plus petite hauteur de xH_n et si $2^p3^q > 3^{q_n}$ c'est $\frac{x}{r_n}$.
Et, les représentants de plus petites hauteurs appartiennent à [1,2[.

3 – Les gammes de Pythagore

a) Les premières gammes :

- $G/\langle r_0 \rangle = G/\langle \frac{3}{2} \rangle = \{2^n3^m, n \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{Z}, \text{avec } 2 \equiv 3\}$

donc, $\Gamma_0 = \{2^n, n \in \mathbb{Z}\}$.

- $G/\langle r_1 \rangle = G/\langle \frac{2^2}{3} \rangle = \{2^n3^m, n \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{Z}, \text{avec } 2^2 \equiv 3\}$

$= \{\dots 2^{-1}, 3^{-1}, 1, 2, 3, 2.3, 2^2 \dots \text{avec } 2^2 \equiv 3\}$

donc, $\Gamma_1 = \{\dots 2^{-1}, 3^{-1}, 1, 2, 3, 6\dots\}$.

Par conséquent, les premières octaves de Γ_0 et Γ_1 sont constituées d'un unique intervalle, l'unisson.

- $G/\langle r_2 \rangle = G/\langle \frac{3^2}{2^3} \rangle = \{2^n3^m, n \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{Z}, \text{avec } 2^3 \equiv 3^2\}$.

Nous procédons par quintes ascendantes et en assimilant $\frac{3^2}{2^3}$ à 1, nous répartissons 2 sons dans l'octave :

n	0	1
f_n	f	$\frac{3}{2}$ f

On a bien sûr $1 < 3^2$ et $2\times3 < 3^2$, donc il s'agit de deux notes abstraites, d'après le théorème II-2.4, et cette octave est en fait la première octave de Γ_2.

On peut vérifier que l'intervalle $\frac{f_1}{f_0}$ est une quinte et que l'intervalle $\frac{2f_0}{f_1}$ est égal à $\frac{2^2}{3}$. Ainsi, entre deux sons consécutifs, on a bien l'intervalle abstrait $\frac{2^2}{3}$ ou r_1.

Passons à des gammes d'un plus grand intérêt.

b) La gamme pentatonique :

$G/\langle r_3 \rangle = G/\langle \frac{2^8}{3^5} \rangle = \{2^n 3^m, n \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{Z}, \text{ avec } 2^8 \equiv 3^5\}$.

Nous procédons par quintes descendantes et en assimilant $\frac{2^8}{3^5}$ à 1, nous répartissons 5 sons dans l'octave :

n	0	1	2	3	4
f_n	f	$\frac{2^2}{3}$ f	$\frac{2^4}{3^2}$ f	$\frac{2^5}{3^3}$ f	$\frac{2^7}{3^4}$ f

Appliquons le théorème II-2.4 . On a $1 < 3^5$, $2^2 \times 3 < 3^5$ et $2^4 \times 3^2 < 3^5$, ce qui nous certifie que les 3 premiers sons sont des notes abstraites. Au contraire, $2^5 \times 3^3 > 3^5$ et par suite $2^7 \times 3^4 > 3^5$, ce qui est suffisant pour affirmer que les 2 derniers sons n'en sont pas.
$\frac{2^5}{3^3} \times \frac{3^5}{2^8} = \frac{3^2}{2^3}$ et $\frac{2^7}{3^4} \times \frac{3^5}{2^8} = \frac{3}{2}$, donc les sons de fréquence $\frac{3^2}{2^3}$ f et $\frac{3}{2}$ f sont quant à eux des notes abstraites.
Nous avons ainsi déterminé la première octave de Γ_3 :

n	0	1	2	3	4
f_n	f	$\frac{2^2}{3}$ f	$\frac{2^4}{3^2}$ f	$\frac{3^2}{2^3}$ f	$\frac{3}{2}$ f

D'après le théorème I-1.5, nous savons que

$$\frac{2^2}{3} = \left(\frac{3^2}{2^3}\right)^2 \times \frac{2^8}{3^5} \text{ et } \frac{3}{2} = \left(\frac{3^2}{2^3}\right)^3 \times \frac{2^8}{3^5}.$$

De plus, $\frac{2^4}{3^2} = r_2' = \frac{2}{r_2} = \frac{\left(\frac{3^2}{2^3}\right)^5 \times \left(\frac{2^8}{3^5}\right)^2}{\frac{3^2}{2^3}} = \left(\frac{3^2}{2^3}\right)^4 \times \left(\frac{2^8}{3^5}\right)^2$.

Ces informations nous permettent de ranger la première octave de Γ_3 dans l'ordre croissant :

n	0	3	1	4	2
f_n	f	$\frac{3^2}{2^3}$ f	$\frac{2^2}{3}$ f	$\frac{3}{2}$ f	$\frac{2^4}{3^2}$ f

Nous pouvons vérifier que les intervalles entre deux sons consécutifs sont de deux types seulement :

- $\frac{f_3}{f_0} = \frac{f_4}{f_1} = \frac{2f_0}{f_2} = \frac{3^2}{2^3}$
- $\frac{f_1}{f_3} = \frac{f_2}{f_4} = \frac{2^5}{3^3}$

En représentation linéaire, nous aurons alors :

L'octave suivante est celle de la gamme pentatonique dite chinoise, qui a été très répandue en Chine, Pérou, ou encore en Ecosse :

n	0	1	2	3	4
f_n	f	$\frac{3}{2}f$	$\frac{9}{8}f$	$\frac{27}{16}f$	$\frac{81}{64}f$

Avant de poursuivre notre étude, soulignons que les gammes qui suivent n'ont jamais été que des gammes théoriques.

c) La gamme chromatique de Pythagore :

$G/\langle r_4\rangle = G/\langle\frac{3^{12}}{2^{19}}\rangle = \{2^n3^m, n \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{Z}, \text{avec } 2^{19} \equiv 3^{12}\}$.

Nous procédons par quintes ascendantes et en assimilant $\frac{3^{12}}{2^{19}}$ à 1, nous répartissons 12 sons dans l'octave :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
f_n	f	$\frac{3}{2}f$	$\frac{3^2}{2^3}f$	$\frac{3^3}{2^4}f$	$\frac{3^4}{2^6}f$	$\frac{3^5}{2^7}f$	$\frac{3^6}{2^9}f$	$\frac{3^7}{2^{11}}f$	$\frac{3^8}{2^{12}}f$	$\frac{3^9}{2^{14}}f$	$\frac{3^{10}}{2^{15}}f$	$\frac{3^{11}}{2^{17}}f$

Appliquons le théorème II-2.4. On a $3^6\times2^9 < 3^{12}$ et $3^7\times2^{11} > 3^{12}$, donc les 7 premières fréquences sont celles de notes abstraites alors que les 5 dernières ne le sont pas.

On a $\frac{3^7}{2^{11}}\times\frac{2^{19}}{3^{12}} = \frac{2^8}{3^5}$, $\frac{3^8}{2^{12}}\times\frac{2^{19}}{3^{12}} = \frac{2^7}{3^4}$, $\frac{3^9}{2^{14}}\times\frac{2^{19}}{3^{12}} = \frac{2^5}{3^3}$, $\frac{3^{10}}{2^{15}}\times\frac{2^{19}}{3^{12}} = \frac{2^4}{3^2}$ et $\frac{3^{11}}{2^{17}}\times\frac{2^{19}}{3^{12}} = \frac{2^2}{3}$.

Donc, au vu des calculs précédents, nous pouvons donner la première octave de Γ_4 :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
f_n	f	$\frac{3}{2}f$	$\frac{3^2}{2^3}f$	$\frac{3^3}{2^4}f$	$\frac{3^4}{2^6}f$	$\frac{3^5}{2^7}f$	$\frac{3^6}{2^9}f$	$\frac{2^8}{3^5}f$	$\frac{2^7}{3^4}f$	$\frac{2^5}{3^3}f$	$\frac{2^4}{3^2}f$	$\frac{2^2}{3}f$

D'après le théorème I-1.5, nous savons que :

$$\frac{3^2}{2^3} = \left(\frac{2^8}{3^5}\right)^2 \times \frac{3^{12}}{2^{19}} \ , \ \frac{2^2}{3} = \left(\frac{2^8}{3^5}\right)^5 \times \left(\frac{3^{12}}{2^{19}}\right)^2 \text{ et } \frac{3}{2} = \left(\frac{2^8}{3^5}\right)^7 \times \left(\frac{3^{12}}{2^{19}}\right)^3$$

De plus, $\frac{3^5}{2^7} = r_3' = \frac{2}{r_3} = \frac{\left(\frac{2^8}{3^5}\right)^{12} \times \left(\frac{3^{12}}{2^{19}}\right)^5}{\frac{2^8}{3^5}} = \left(\frac{2^8}{3^5}\right)^{11} \times \left(\frac{3^{12}}{2^{19}}\right)^5$

$$\frac{2^4}{3^2} = r_2' = \frac{2}{r_2} = \frac{\left(\frac{2^8}{3^5}\right)^{12} \times \left(\frac{3^{12}}{2^{19}}\right)^5}{\left(\frac{2^8}{3^5}\right)^2 \times \frac{3^{12}}{2^{19}}} = \left(\frac{2^8}{3^5}\right)^{10} \times \left(\frac{3^{12}}{2^{19}}\right)^4$$

Le théorème II-2.2 nous assure que $G/\langle\frac{3^{12}}{2^{19}}\rangle$ est engendré par la classe de $r_3 = \frac{2^8}{3^5}$.

Or, $\frac{3^2}{2^3} \times \frac{2^8}{3^5} = \frac{2^5}{3^3}$

$\frac{2^5}{3^3} \times \frac{2^8}{3^5} = \frac{2^{13}}{3^8}$ et $\frac{2^{13}}{3^8} \times \frac{3^{12}}{2^{19}} = \frac{3^4}{2^6}$

$\frac{2^2}{3} \times \frac{2^8}{3^5} = \frac{2^{10}}{3^6}$ et $\frac{2^{10}}{3^6} \times \frac{3^{12}}{2^{19}} = \frac{3^6}{2^9}$

$\frac{3}{2} \times \frac{2^8}{3^5} = \frac{2^7}{3^4}$

$\frac{2^7}{3^4} \times \frac{2^8}{3^5} = \frac{2^{15}}{3^9}$ et $\frac{2^{15}}{3^9} \times \frac{3^{12}}{2^{19}} = \frac{3^3}{2^4}$

Ceci nous permet de ranger la première octave de Γ_4 dans l'ordre croissant :

n	0	7	2	9	4	11	6	1	8	3	10	5
f_n	f DO	$\frac{2^8}{3^5}$ f RE^b	$\frac{3^2}{2^3}$ f RE	$\frac{2^5}{3^3}$f MI^b	$\frac{3^4}{2^6}$ f MI	$\frac{2^2}{3}$f FA	$\frac{3^6}{2^9}$ f FA$^\#$	$\frac{3}{2}$ f SOL	$\frac{2^7}{3^4}$f LA^b	$\frac{3^3}{2^4}$ f LA	$\frac{2^4}{3^2}$f SI^b	$\frac{3^5}{2^7}$ f SI

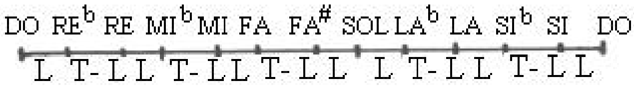
Une fois encore, on ne trouve que deux types d'intervalles successifs :

- $\frac{f_7}{f_0} = \frac{f_9}{f_2} = \frac{f_{11}}{f_4} = \frac{f_1}{f_6} = \frac{f_8}{f_1} = \frac{f_{10}}{f_3} = \frac{2f_0}{f_5} = \frac{2^8}{3^5} = L$
- $\frac{f_2}{f_7} = \frac{f_4}{f_9} = \frac{f_6}{f_{11}} = \frac{f_3}{f_8} = \frac{f_5}{f_{10}} = \frac{3^7}{2^{11}} = T - L$

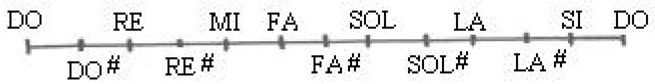
où T et L sont les ton et limma pythagoriciens définis lors de l'étude du cas n = 7.

On remarque que T – L > L, ce qui nous permet de choisir entre une note diésée et une note bémolisée. Nous y reviendrons dans quelques lignes.

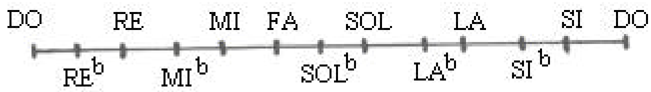
La représentation linéaire est la suivante :



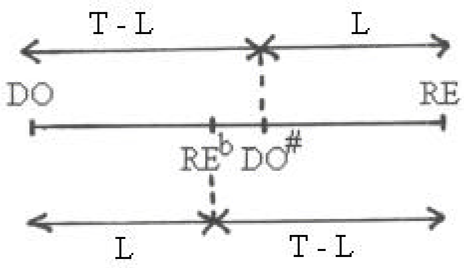
Si l'on avait procédé par quintes ascendantes uniquement (i.e. si l'on avait choisi les représentants de la forme $\frac{3^m}{2^n}$ avec $n \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{N}$), on aurait obtenu (après s'être ramené à DO majeur) les 5 notes diésées DO$^{\#}$, RE$^{\#}$, FA$^{\#}$, SOL$^{\#}$ et LA$^{\#}$:



De même, si l'on avait procédé par quintes descendantes uniquement (i.e. si l'on avait choisi les représentants de la forme $\frac{2^n}{3^m}$ avec $n \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{N}$), on aurait obtenu les 5 notes bémolisées RE^{b}, MI^{b}, SOL^{b}, LA^{b} et SI^{b} :



Ainsi, entre deux notes consécutives, on intercale deux notes, l'une diésée, l'autre bémolisée, selon la répartition suivante (nous avons pris DO-RE comme exemple, mais dans les quatre autres cas le résultat est similaire) :



On retrouve que l'intervalle (T–L) – L entre ces deux nouvelles notes correspond au rapport de fréquences $\dfrac{\frac{3^7}{2^{11}}}{\frac{2^8}{3^5}} = \dfrac{3^{12}}{2^{19}}$: c'est le comma pythagoricien (les deux notes appartiennent à la même classe).
Ceci étant dit, la spirale des quintes présentée p. 22 prend tout son sens.

d) La gamme de Janko :

$$G/<r_5> = G/<\frac{2^{65}}{3^{41}}> = \{2^n 3^m,\ n \in \mathbb{Z},\ m \in \mathbb{Z},\ \text{avec } 2^{63} \equiv 3^{41}\}.$$

La première octave de Γ_5 contient donc 41 degrés qui, rangés par ordre croissant, sont (cf. feuille de calcul en annexe) :

f	$\frac{3^{12}}{2^{19}}$ f	$\frac{2^{27}}{3^{17}}$ f	$\frac{2^{8}}{3^{5}}$ f	$\frac{3^{7}}{2^{11}}$ f	$\frac{3^{19}}{2^{30}}$ f	$\frac{2^{16}}{3^{10}}$ f	$\frac{3^{2}}{2^{3}}$ f	$\frac{3^{14}}{2^{22}}$ f	$\frac{2^{24}}{3^{15}}$ f	$\frac{2^{5}}{3^{3}}$ f	$\frac{3^{9}}{2^{14}}$ f	$\frac{2^{32}}{3^{20}}$ f
DO			RE^b				RE			MI^b		

$\frac{2^{13}}{3^{8}}$ f	$\frac{3^{4}}{2^{6}}$ f	$\frac{3^{16}}{2^{25}}$ f	$\frac{2^{21}}{3^{13}}$ f	$\frac{2^{2}}{3}$ f	$\frac{3^{11}}{2^{27}}$ f	$\frac{2^{29}}{3^{18}}$ f	$\frac{2^{10}}{3^{6}}$ f	$\frac{3^{6}}{2^{9}}$ f	$\frac{3^{18}}{2^{28}}$ f	$\frac{2^{18}}{3^{11}}$ f	$\frac{3}{2}$ f	$\frac{3^{13}}{2^{20}}$ f
	MI			FA				$FA^\#$			SOL	

$\frac{2^{26}}{3^{16}}$ f	$\frac{2^{7}}{3^{4}}$ f	$\frac{3^{8}}{2^{12}}$ f	$\frac{3^{20}}{2^{31}}$ f	$\frac{2^{15}}{3^{9}}$ f	$\frac{3^{3}}{2^{4}}$ f	$\frac{3^{15}}{2^{23}}$ f	$\frac{2^{23}}{3^{14}}$ f	$\frac{2^{4}}{3^{2}}$ f	$\frac{3^{10}}{2^{15}}$ f	$\frac{2^{31}}{3^{19}}$ f	$\frac{2^{12}}{3^{7}}$ f	$\frac{3^{5}}{2^{7}}$ f
	LA^b				LA			SI^b				SI

$\frac{3^{17}}{2^{26}}$ f	$\frac{2^{20}}{3^{12}}$ f

Il n'y a encore une fois que deux types d'intervalles successifs, qui sont $\frac{3^{12}}{2^{19}}$ et $\frac{2^{46}}{3^{29}}$ ou un intervalle abstrait, qui est $r_4 = \frac{3^{12}}{2^{19}}$.

e) La gamme de Mercator :

$$G/<r_6> = G/<\frac{3^{53}}{2^{84}}> = \{2^n 3^m,\ n \in \mathbb{Z},\ m \in \mathbb{Z},\ \text{avec } 2^{84} \equiv 3^{53}\}.$$

La première octave de Γ_6 contient donc 53 degrés qui, rangés par ordre croissant, sont (cf. feuille de calcul en annexe) :

f	$\frac{3^{12}}{2^{19}}$ f	$\frac{3^{24}}{2^{38}}$ f	$\frac{2^{27}}{3^{17}}$ f	$\frac{2^{8}}{3^{5}}$ f	$\frac{3^{7}}{2^{11}}$ f	$\frac{3^{19}}{2^{30}}$ f	$\frac{2^{35}}{3^{22}}$ f	$\frac{2^{16}}{3^{10}}$ f	$\frac{3^{2}}{2^{3}}$ f	$\frac{3^{14}}{2^{22}}$ f	$\frac{3^{26}}{2^{41}}$ f	$\frac{2^{24}}{3^{15}}$ f
DO				RE^b					RE			

$\frac{2^{5}}{3^{3}}$ f	$\frac{3^{9}}{2^{14}}$ f	$\frac{3^{21}}{2^{33}}$ f	$\frac{2^{32}}{3^{20}}$ f	$\frac{2^{13}}{3^{8}}$ f	$\frac{3^{4}}{2^{6}}$ f	$\frac{3^{16}}{2^{25}}$ f	$\frac{2^{40}}{3^{25}}$ f	$\frac{2^{21}}{3^{13}}$ f	$\frac{2^{2}}{3}$ f	$\frac{3^{11}}{2^{17}}$ f	$\frac{3^{23}}{2^{36}}$ f	$\frac{2^{29}}{3^{18}}$ f
MI^b					MI				FA			

$\frac{2^{10}}{3^6}$ f	$\frac{3^6}{2^9}$ f FA#	$\frac{3^{18}}{2^{28}}$ f	$\frac{2^{37}}{3^{23}}$ f	$\frac{2^{18}}{3^{11}}$ f	$\frac{3}{2}$ f SOL	$\frac{3^{13}}{2^{20}}$ f	$\frac{3^{25}}{2^{39}}$ f	$\frac{2^{26}}{3^{16}}$ f	$\frac{2^7}{3^4}$ f LA^b	$\frac{3^8}{2^{12}}$ f	$\frac{3^{20}}{2^{31}}$ f	$\frac{2^{34}}{3^{21}}$ f

$\frac{2^{15}}{3^9}$ f	$\frac{3^3}{2^4}$ f LA	$\frac{3^{15}}{2^{23}}$ f	$\frac{2^{42}}{3^{26}}$ f	$\frac{2^{23}}{3^{14}}$ f	$\frac{2^4}{3^2}$ f SI^b	$\frac{3^{10}}{2^{15}}$ f	$\frac{3^{22}}{2^{34}}$ f	$\frac{2^{31}}{3^{19}}$ f	$\frac{2^{12}}{3^7}$ f	$\frac{3^5}{2^7}$ f SI	$\frac{3^{17}}{2^{26}}$ f	$\frac{2^{39}}{3^{24}}$ f

$\frac{2^{20}}{3^{12}}$ f

Nous avons les deux intervalles successifs $\frac{3^{12}}{2^{19}}$ et $\frac{2^{65}}{3^{41}}$, c'est-à-dire l'intervalle abstrait $r_5 = \frac{2^{65}}{3^{41}}$.

Au delà, le nombre de degrés des gammes est de 306… etc… ce qui en fait des gammes musicalement inutilisables. Nous ne les étudierons donc pas.

En résumé, si on parcourt le cycle des quintes, à partir d'une note initiale, on ne peut pas retomber sur une note identique à une octave supérieure, cette différence étant appelée comma.

Par conséquent, construire une gamme revient à introduire des approximations, en convenant d'identifier la note obtenue par un cycle de n quintes à celle obtenue par un saut de p octaves.

Mathématiquement, cela revient à imposer une relation $\frac{3^n}{2^{n+p}} = 1$ dans le sous-groupe multiplicatif de $\mathbb{Q}_+^*$ engendré par 2 et 3.

Et, les choix des meilleures approximations, comme contrainte quantitative d'une part, et des meilleures fractions – celles dont les numérateur et dénominateur sont les plus petits possibles –, comme contrainte qualitative d'autre part, n'ont-ils pas la pertinence des choix historiques ?

III – LES GAMMES ZARLINIENNES

Deux observations ont tourmenté les musiciens de la Renaissance. D'une part, si f, 3/2 f, 4/3 f et 9/8 f font partie de la gamme diatonique de Pythagore, il n'en est pas de même de 5/4 f. D'autre part, et outre l'aspect « horizontal » (déroulement des sons dans le temps), l'oreille perçoit l'aspect « vertical » (simultanéité des sons) de la musique.

Prenant conscience des faits, ceux-ci ont souhaité trouver des gammes qui tiennent compte de ces exigences nouvelles.

Posons donc à notre tour le problème : est-il possible de construire des gammes qui soient des « améliorations » des gammes pythagoriciennes ?
Pour y répondre, nous devrons de toute évidence nous placer dans l'échelle naturelle de Zarlino, c'est-à-dire le sous-groupe multiplicatif de $\mathbb{Q}_+^*$ engendré par 2, 3 et 5.

1 – Une succession d'accords parfaits majeur…

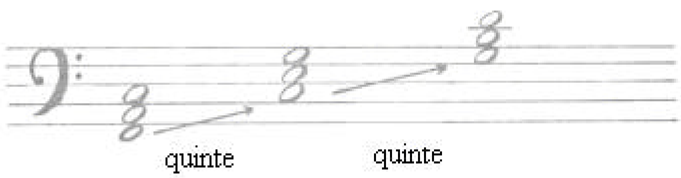
a) L'Accord Parfait Majeur :

Pour les musiciens, il y a <u>accord</u> dès que 3 sons au moins correspondant à des notes différentes, sont entendus simultanément.
C'est l'ensemble $\{f, \frac{5}{4} f, \frac{3}{2} f\}$ que les musiciens ont appelé <u>Accord Parfait Majeur</u> (A.P.M.).
Et le vénitien Gioseffo Zarlino (1517 - 1590) s'est illustré dans le choix de cet accord comme base créative.

b) Une succession alternée d'accords :

<u>Définition</u> :

Ainsi, la démarche consiste en une succession d'A.P.M. ascendants et/ou descendants ramenés à l'octave, ce qui signifie schématiquement :



Plus précisément, la méthode est la suivante :

Soit $q \in \mathbb{N}$.

On part d'un son de fréquence $f_0 = f$, puis on construit la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\text{Si } n \leq 2q, \begin{cases} f_{2k} = \dfrac{3^k}{2^k} \times \dfrac{1}{2^p} f \\ f_{2k+1} = \dfrac{5}{2^2} \times \dfrac{3^k}{2^k} \times \dfrac{1}{2^p} f \end{cases} \text{, où } k \leq q$$

$$\text{Si } n > 2q, \begin{cases} f_{2k} = \dfrac{2^{k-q}}{3^{k-q}} \times 2^p f \\ f_{2k-1} = \dfrac{2^{k-q-1}}{3^{k-q-1}} \times \dfrac{5}{3 \times 2} \times 2^p f \end{cases} \text{, où } k > q$$

p étant défini comme l'entier tel que $f_n \in [f,2f[$.

Ainsi, si q = 6, les 24 premiers termes de la suite (utiles ultérieurement) sont :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
f_n	f	$\frac{5}{2^2} f$	$\frac{3}{2} f$	$\frac{3 \times 5}{2^3} f$	$\frac{3^2}{2^3} f$	$\frac{3^2 \times 5}{2^5} f$	$\frac{3^3}{2^4} f$	$\frac{3^3 \times 5}{2^7} f$	$\frac{3^4}{2^6} f$

9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
$\frac{3^4 \times 5}{2^8} f$	$\frac{3^5}{2^7} f$	$\frac{3^5 \times 5}{2^{10}} f$	$\frac{3^6}{2^9} f$	$\frac{5}{3} f$	$\frac{2^2}{3} f$	$\frac{2 \times 5}{3^2} f$	$\frac{2^4}{3^2} f$	$\frac{2^3 \times 5}{3^3} f$	$\frac{2^5}{3^3} f$

19	20	21	22	23
$\frac{2^5 \times 5}{3^4} f$	$\frac{2^7}{3^4} f$	$\frac{2^6 \times 5}{3^5} f$	$\frac{2^8}{3^5} f$	$\frac{2^8 \times 5}{3^6} f$

Contrainte :

Nous voulons « améliorer » les gammes pythagoriciennes. Par conséquent, le nombre q d'A.P.M. ascendants ne sera autre que le nombre de quintes ascendantes qui constituent chacune d'elles. Ainsi,

- pour les gammes pythagoriciennes à 1 note, on choisira q = 0 ,

- la gamme pythagoricienne à 2 notes ayant été construite à partir d'une quinte ascendante. Nous choisirons donc q = 1,

- la gamme pentatonique ayant été formée à l'aide de deux quintes ascendantes et deux quintes descendantes, on prendra q = 2,

- la gamme diatonique de Pythagore ayant été obtenue par une succession de 5 quintes ascendantes et 1 quinte descendante, il va de soi que l'on optera pour q = 5,

- enfin, la gamme chromatique de Pythagore est issue d'une succession de 6 quintes ascendantes et 5 quintes descendantes, c'est pourquoi nous prendrons q = 6.

2 – … pour une amélioration qualitative ou quantitative des gammes pythagoriciennes

a) Enoncé du problème :

Partant d'une gamme pythagoricienne à n notes, nous obtenons, par la méthode ci-dessus, une gamme à 2n notes.
Et, se ramener à n notes revient, quitte à réindexer, à trouver, pour tout entier $j \in \{n \ldots 2n-1\}$, un entier $k \in \{0 \ldots n-1\}$ tel que $f_j = f_k$.

Si nous y parvenons, nous dirons que la gamme obtenue affine notre gamme de Pythagore et sinon, nous dirons que nous avons obtenu une nouvelle gamme, distinguant ainsi respectivement une amélioration qualitative d'une amélioration quantitative. En effet, dans le premier cas, le rapport entre le nombre de notes des gammes que nous allons construire et celui des gammes de Pythagore sera égal à 1. Sinon, nous serons dans le second cas.

b) La solution du musicien :

Généralités :

Les musiciens de la Renaissance ont choisi d'assimiler $\frac{3^4}{2^4 \times 5}$, appelé comma de Didyme, à 1.

Dès lors, et pour tout entier p, on a $f_k \times \left(\frac{3^4}{2^4 \times 5}\right)^p = f_k$.

Amélioration de la gamme diatonique de Pythagore :

Illustrons cette préférence par l'étude du cas q = 5. Nous répartissons les 14 notes suivantes dans l'octave :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
f_n	f	$\frac{5}{2^2}$ f	$\frac{3}{2}$ f	$\frac{3\times5}{2^3}$ f	$\frac{3^2}{2^3}$ f	$\frac{3^2\times5}{2^5}$ f	$\frac{3^3}{2^4}$ f	$\frac{3^3\times5}{2^7}$ f	$\frac{3^4}{2^6}$ f

9	10	11	12	13
$\frac{3^4\times5}{2^8}$ f	$\frac{3^5}{2^7}$ f	$\frac{5}{3}$ f	$\frac{2^2}{3}$ f	$\frac{2\times5}{3^2}$ f

Or, $\frac{3^7}{2^{11}} = 1$, par construction de la gamme diatonique de Pythagore, et $\frac{3^4}{2^4 \times 5} = 1$. On remarque alors que :

$$\frac{2^2}{3} = \frac{2^2}{3} \times \frac{2^4 \times 5}{3^4} \times \frac{3^7}{2^{11}} = \frac{3^2 \times 5}{2^5}$$
$$1 = 1 \times \frac{2^4 \times 5}{3^4} \times \frac{3^7}{2^{11}} = \frac{3^3 \times 5}{2^7}$$
$$\frac{3}{2} = \frac{3}{2} \times \frac{2^4 \times 5}{3^4} \times \frac{3^7}{2^{11}} = \frac{3^4 \times 5}{2^8}$$
$$\frac{3^2}{2^3} = \frac{3^2}{2^3} \times \frac{2^4 \times 5}{3^4} = \frac{2 \times 5}{3^2}$$

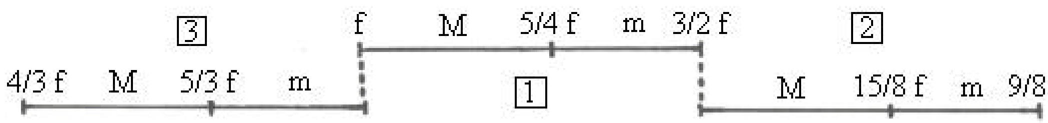
$$\frac{3^3}{2^4} = \frac{3^3}{2^4} \times \frac{2^4 \times 5}{3^4} = \frac{5}{3}$$
$$\frac{3^4}{2^6} = \frac{3^4}{2^6} \times \frac{2^4 \times 5}{3^4} = \frac{5}{2^2}$$
$$\frac{3^5}{2^7} = \frac{3^5}{2^7} \times \frac{2^4 \times 5}{3^4} = \frac{3 \times 5}{2^3}$$

Par conséquent, l'octave sera constituée de 7 notes, étant donné qu'elles sont équivalentes deux à deux. Il nous reste alors à choisir l'une plutôt que l'autre.
En fait, pour conserver les fractions les plus simples, et par là même des A.P.M. «intacts », nous n'avons qu'une solution, à savoir :

n	0	1	2	3	4	11	12
f_n	f	$\frac{5}{2^2}$ f	$\frac{3}{2}$ f	$\frac{3 \times 5}{2^3}$ f	$\frac{3^2}{2^3}$ f	$\frac{5}{3}$ f	$\frac{2^2}{3}$ f

Elle comporte trois accords :

$\boxed{1}$ un accord de base,
$\boxed{2}$ un accord fondé sur la note « la plus haute »
$\boxed{3}$ un accord fondé sur la note « la plus basse ».

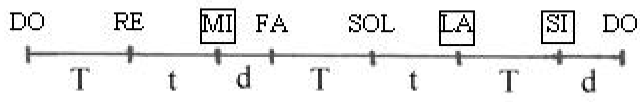


L'intervalle $I_{5/4}$ est la <u>tierce majeure zarlinienne</u> M, et la différence avec la quinte, soit $I_{6/5}$, est la <u>tierce mineure zarlinienne</u> m.

Dans l'ordre croissant, nous obtenons donc :

n	0	4	1	12	2	11	3
f_n	f DO	$\frac{3^2}{2^3}$ f RE	$\frac{5}{2^2}$ f MI	$\frac{2^2}{3}$ f FA	$\frac{3}{2}$ f SOL	$\frac{5}{3}$ f LA	$\frac{3 \times 5}{2^3}$ f SI

ce que la représentation linéaire suivante nous permet de visualiser :



Remarque : les notes encadrées sont plus basses d'un comma de Didyme que les notes correspondantes de la gamme diatonique de Pythagore.

Il y a trois types d'intervalles successifs :

- $I_{9/8}$: c'est le ton pythagoricien T, appelé ici <u>ton majeur zarlinien</u>,
- $I_{10/9}$: c'est le <u>ton mineur zarlinien</u> t,
- $I_{16/15}$: c'est le <u>demi-ton majeur zarlinien</u> d.

Cette gamme, qui affine la gamme diatonique de Pythagore, est appelée gamme diatonique de Zarlino.

c) La solution du mathématicien :

<u>La notion de comma</u> :

On peut définir les commas du groupe G = <2, 3, 5> comme on l'a fait précédemment. Ainsi,
soit G = <2, 3, 5> et $c \in G$. Nous dirons que c est un comma de G si et seulement si :

i) $c \neq 1$

ii) $g \in G \setminus \{1\}$ et $|\log g| < |\log c|$ entraînent $h(g) > h(c)$.

On peut vérifier que :

Théorème III-2.1 : Soit G = <2, 3, 5>. Si $c = \frac{q+1}{q} \in G$ avec $q \in \mathbb{Q}^*$, alors c est un comma de G.

<u>Preuve</u> : Soit $\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}_+^*$ telle que $\frac{m}{n} > 1$ et $\log \frac{m}{n} < \log \frac{q+1}{q}$. Nous voulons montrer que $h(\frac{m}{n}) > h(\frac{q+1}{q})$, c'est-à-dire $m > q + 1$:

On a $m > n$, donc $m \geq n+1$ et $\frac{m}{n} < \frac{q+1}{q}$, d'où $\frac{n+1}{n} \leq \frac{m}{n} < \frac{q+1}{q}$.

Or, la fonction $x \longmapsto \frac{x+1}{x}$ est décroissante sur $]0, +\infty[$, donc $n > q$.

D'où $m \geq n + 1 > q + 1$ et $c = \frac{q+1}{q}$ est un comma de G.

ÿ

Ce résultat nous permet de calculer un certain nombre de commas de G = <2, 3, 5> :

$2, \frac{3}{2}, \frac{2^2}{3} = \frac{4}{3}, \frac{5}{2^2} = \frac{5}{4}, \frac{2\times3}{5} = \frac{6}{5}, \frac{3^2}{2^3} = \frac{9}{8}, \frac{2\times5}{3^2} = \frac{10}{9}, \frac{2^4}{3\times5} = \frac{16}{15}, \frac{5^2}{2^3\times3} = \frac{25}{24}, \frac{\mathbf{3^4}}{\mathbf{2^4\times 5}} = \frac{81}{80}$ (comma de Didyme)... etc…

$\frac{2^8}{3^5} = \frac{\frac{243}{13}+1}{\frac{243}{13}}, \frac{3^{12}}{2^{19}} = \frac{\frac{524288}{7153}+1}{\frac{524288}{7153}}$… etc…

Pour chaque comma $r = 2^{\alpha}3^{\beta}$ de <2, 3>, nous chercherons un comma $r' = 2^{\alpha'}3^{\beta'}5^{\gamma'}$ de G = <2, 3, 5>

- qui « dépende » de 5, sans quoi nous n'aboutirons à aucune amélioration, et que l'on choisira donc parmi $\frac{5}{2^2}, \frac{2\times3}{5}, \frac{2\times5}{3^2}, \frac{2^4}{3\times5}, \frac{5^2}{2^3\times3}, \frac{3^4}{2^4\times5}$… etc…

- et qui satisfasse à la propriété suivante :

Si on pose

$$\begin{vmatrix} x & \alpha & \alpha' \\ y & \beta & \beta' \\ z & 0 & \gamma' \end{vmatrix} = \beta\gamma' x + \alpha\gamma' y + (\alpha\beta' - \alpha'\beta)z = \alpha'' x + \beta'' y + \gamma'' z$$

alors P.G.C.D. $(\alpha'', \beta'', \gamma'')$ = P.G.C.D. $(\beta\gamma', \alpha\gamma', \alpha\beta' - \alpha'\beta) = 1$.

(ce choix se justifiera au paragraphe suivant)

Nous définirons alors H = <r, r'>.

Construction d'un groupe quotient :

L'ensemble H = <r, r'> est un sous-groupe (commutatif, donc distingué) du groupe multiplicatif G = <2, 3, 5>. Nous nous proposons d'étudier le groupe quotient G/H, qui n'est autre que l'ensemble $\{x \in$ <2, 3, 5> avec $r \equiv 1$ et $r' \equiv 1\}$.

Théorème III-2.2 : Soit i la projection canonique de G dans G/H et soit P = i(<2, 3>). Alors, P est isomorphe au groupe quotient <2, 3>/<r>.

Preuve : Encore une fois, il est équivalent de démontrer le théorème en notation additive…

En multiplicatif, P = <2, 3>/<r, r'>.

Il devient alors en additif $P = \mathbb{Z}^2 \times \{0\}/(\alpha, \beta, 0)\mathbb{Z} + (\alpha', \beta', \gamma')\mathbb{Z}$

a) L'application $\mathbb{Z}^2/(\alpha, \beta)\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}^2 \times \{0\}/(\alpha, \beta, 0)\mathbb{Z}$ est de toute évidence un isomorphisme,

b) Soit $\phi : \mathbb{Z}^2 \times \{0\}/(\alpha, \beta, 0)\mathbb{Z} \longrightarrow P = \mathbb{Z}^2 \times \{0\}/(\alpha, \beta, 0)\mathbb{Z} + (\alpha', \beta', \gamma')\mathbb{Z}$.

$$\overline{(x, y, 0)} \longmapsto \widehat{(x, y, 0)}$$

- ϕ est un morphisme :

$$\begin{aligned}
\phi\left(\overline{(x_1, y_1, 0)} + \overline{(x_2, y_2, 0)}\right) &= \phi\left(\overline{(x_1, y_1, 0) + (x_2, y_2, 0)}\right) \\
&= \phi\left(\overline{(x_1 + x_2, y_1 + y_2, 0)}\right) \\
&= \widehat{(x_1 + x_2, y_1 + y_2, 0)} \\
&= \widehat{(x_1, y_1, 0)} + \widehat{(x_2, y_2, 0)} \\
&= \phi\left(\overline{(x_1, y_1, 0)}\right) + \phi\left(\overline{(x_2, y_2, 0)}\right)
\end{aligned}$$

- ϕ est bijective :

En effet, elle est surjective

et elle est injective :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ker}\,\phi &= \{\overline{(x, y, 0)}, \text{ telle que } \widehat{(x, y, 0)} = \phi(\overline{(x, y, 0)}) = \widehat{(0, 0, 0)}\} \\
&= \{\overline{(x, y, 0)}, \text{ telle que } (x, y, 0) = k(\alpha, \beta, 0) + l(\alpha', \beta', \gamma')\} \\
&= \{\overline{(x, y, 0)}, \text{ telle que } (x, y, 0) = k(\alpha, \beta, 0)\}, \text{ puisque } \gamma' \neq 0 \\
&= \{\overline{(0, 0, 0)}\}
\end{aligned}$$

Donc ϕ est un isomorphisme.

c) En résumé, $\mathbb{Z}^2/(\alpha, \beta)\mathbb{Z} \approx \mathbb{Z}^2 \times \{0\}/(\alpha, \beta, 0)\mathbb{Z} \approx \mathbb{Z}^2 \times \{0\}/(\alpha, \beta, 0)\mathbb{Z} + (\alpha', \beta', \gamma')\mathbb{Z} = P$.

ÿ

Théorème III-2.3 : i) Il existe $g = 2^a 3^b 5^c$ tel que $\begin{vmatrix} a & \alpha & \alpha' \\ b & \beta & \beta' \\ c & 0 & \gamma' \end{vmatrix} = \alpha''a + \beta''b + \gamma''c = \pm 1.$

ii) G/H est un groupe isomorphe à $\mathbb{Z}$ qui est engendré par la classe de g.

Preuve : i) r et r' ont été choisis de telle sorte que P.G.C.D. $(\alpha'', \beta'', \gamma'') = 1$, ce qui équivaut à affirmer l'existence de $(a, b, c) \in \mathbb{Z}^3$ tel que :

$$\alpha''a + \beta''b + \gamma''c = \pm 1,$$

en vertu du théorème de Bezout.

iii) Démontrons la seconde propriété :

1) Il est équivalent de démontrer, en notation additive, que $\mathbb{Z}^3/(a, b, 0)\mathbb{Z} + (a', b', g')\mathbb{Z}$ est un groupe qui est engendré par la classe de (a, b, c), isomorphe à $\mathbb{Z}$:

En effet, nous pouvons effectuer la même démarche que dans notre précédente construction (cf. démonstration du théorème II-2.2). Ainsi, nous réalisons le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} (G, \bullet) & \xrightarrow{\quad f_1 \quad} & (\mathbb{Z}^3, +) \\ g = 2^x 3^y 5^z & & f_1(g) = (x, y, z) \\ i \Big\downarrow & & \Big\downarrow j \\ G/H & \xrightarrow{\quad f_2 \quad} & \mathbb{Z}^3/K \\ i(g) = \hat{g} & & j \circ f_1(g) = \overline{f_1(g)} \end{array}$$

où f_2 est un isomorphisme et $K = (\alpha, \beta, 0)\mathbb{Z} + (\alpha', \beta', \gamma')\mathbb{Z}$.

2) Générateur :

Dire que (a, b, c) est générateur de *que* $\mathbb{Z}^3/(\alpha, \beta, 0)\mathbb{Z} + (\alpha', \beta', \gamma')\mathbb{Z}$ revient à dire que tout $(x, y, z) \in \mathbb{Z}^3$ s'écrit $(x, y, z) = h(a, b, c) + k/(\alpha, \beta, 0) + l(\alpha', \beta', \gamma')$, donc que (a, b, c), $(\alpha, \beta, 0)$ et $(\alpha', \beta', \gamma')$ constituent une base de $\mathbb{Z}^3$.

Or, $\begin{vmatrix} a & \alpha & \alpha' \\ b & \beta & \beta' \\ c & 0 & \gamma' \end{vmatrix} = \alpha''a + \beta''b + \gamma''c = \pm 1$, donc (a, b, c), $(\alpha, \beta, 0)$ et $(\alpha', \beta', \gamma')$ sont bien linéairement indépendants.

3) Isomorphisme :

Par analogie à la démonstration du théorème II-2.2, il suffit de montrer que $\{n \in \mathbb{Z}, n\ \overline{(a, b, c)} = \overline{0}\} = \{0\}$, auquel cas $< \overline{(a, b, c)} > \approx \mathbb{Z}$.

ÿ

Recherche des représentants de plus petite hauteur :

(Algorithme de réduction des degrés de Marc CHEMILLIER & Gérard DUCHAMP, Université de Caen & Université de Rouen.

Celui-ci est donné dans le cas général $G = <p_1, p_2 \ldots p_n>$, sous-groupe multiplicatif de $\mathbb{Q}_+^*$ engendré par les p_i. Nous allons l'adapter au cas particulier de G = <2, 3, 5>)

cf. feuille ce calcul en annexe.

Le sous-groupe multiplicatif <2, 3, 5> est isomorphe au groupe additif $\mathbb{Z}^3$: le triplet (x_1, x_2, x_3) représente la fraction $2^{x_1}3^{x_2}5^{x_3}$. Et, si $x = (x_1, x_2, x_3)$, nous noterons h(x) la hauteur de la fraction correspondant à x.

On a quotienté <2, 3, 5> par deux commas r_1 et r_2, de telle sorte que le quotient soit isomorphe à $\mathbb{Z}$, engendré par la classe de g.

Lemme 1 : Soit p : $x \longmapsto p(x) = \ln(h(x))$. L'application p est une norme.

Preuve : Nous devons montrer que 1) $\ln(h(x)) \geq 0$ et que $\ln(h(x)) = 0$ entraîne $x = 0$,
2) $\ln(h(kx)) = |k| \times \ln(h(x))$
3) $\ln(h(x+y)) \leq \ln(h(x)) + \ln(h(y))$

Ces conditions équivalent à
1) $h(x) \geq 1$ et $h(x) = 1$ entraîne $2^{x_1}3^{x_2}5^{x_3} = 1$
2) $h((2^{x_1}3^{x_2}5^{x_3})^k) = (h(2^{x_1}3^{x_2}5^{x_3}))^{|k|}$
3) $h(2^{x_1+y_1}3^{x_2+y_2}5^{x_3+y_3}) \leq h(2^{x_1}3^{x_2}5^{x_3})\, h(2^{y_1}3^{y_2}5^{y_3})$

Les deux premières assertions sont évidentes.
La troisième peut s'écrire aussi : $h(\frac{p''}{q''}) \leq h(\frac{p}{q})\, h(\frac{p'}{q'})$ où $p'' \leq pp'$ et $q'' \leq qq'$.
Or, $p'' \leq pp' \leq \sup(p, q) \sup(p', q')$ i.e. $\sup(p'', q'') \leq \sup(p, q) \sup(p', q')$.
$q'' \leq qq' \leq \sup(p, q) \sup(p', q')$.
ÿ

Soit $H = r_1 \mathbb{Z} + r_2 \mathbb{Z}$. Le triplet kg représente la puissance k-ième du générateur et on cherche un élément de kg + H de hauteur minimale. Or, le logarithme étant croissant, le problème revient à chercher un élément de kg + H de norme minimale pour p.

Lemme 2 : Soit h un vecteur de H tel que kg + h soit de norme minimale pour p. Alors, (k+1)g + h est de norme inférieure à celle de (k+1)g.

Preuve : $\| kg + h \|_p \leq \| kg \|_p$. Donc, $\| (k+1)g + h \|_p = \| (\frac{k+1}{k} - 1)\, kg + kg + h \|_p$

$$\leq (\frac{k+1}{k} - 1) \| kg \|_p + \| kg + h \|_p$$
$$\leq \frac{k+1}{k} \| kg \|_p$$
$$= \| (k+1)g \|_p$$

ÿ

Pour réduire (k+1)g, on peut donc commencer par effectuer la même réduction h que pour kg, c'est-à-dire se ramener à la réduction de $z = (k+1)g + h$.
On cherche alors les éléments t de H tels que $\| t + z \|_p \leq \| z \|_p$, ce qui équivaut à $t \in B_p(-z, \| z \|_p) \cap H$, où $B_p(-z, \| z \|_p)$ est la boule de centre $-z$ et de rayon $\| z \|_p$ pour la norme p.

Lemme 3 : La boule unité $B_p(1)$ de p est incluse dans la boule unité de la norme
$L(x) = \sup \{ |x_1| \ln 2, |x_2| \ln 3, |x_3| \ln 5 \}$

Preuve : Il suffit de le démontrer pour des boules unité centrées en 0.
Soit $t = 2^{t_1}3^{t_2}5^{t_3} \in B_p(0, 1) \Leftrightarrow \| t \|_p \leq 1 \Leftrightarrow h(t) \leq e \Leftrightarrow h(2^{t_1}3^{t_2}5^{t_3}) \leq 2$.
D'où, $2^{|t_1|} \leq 2$, $3^{|t_2|} \leq 2$ et $5^{|t_3|} \leq 2 \Leftrightarrow |t_1| \ln 2 \leq 1$, $|t_2| \ln 3 \leq 1$ et $|t_3| \ln 5 \leq 1$
$\Leftrightarrow \| t \|_L \leq 1 \Leftrightarrow t \in B_L(0, 1)$.
ÿ

Soit S l'ensemble des sommets du cube B_L (1). Les coordonnées de ces sommets dans la base canonique de $\mathbb{Z}^3$ sont $(\frac{1}{\ln 2}, \frac{1}{\ln 3}, \frac{1}{\ln 5})$, $(\frac{1}{\ln 2}, \frac{1}{\ln 3}, -\frac{1}{\ln 5})$, $(\frac{1}{\ln 2}, -\frac{1}{\ln 3}, \frac{1}{\ln 5})$, $(\frac{1}{\ln 2}, -\frac{1}{\ln 3}, -\frac{1}{\ln 5})$, $(-\frac{1}{\ln 2}, \frac{1}{\ln 3}, \frac{1}{\ln 5})$, $(-\frac{1}{\ln 2}, \frac{1}{\ln 3}, -\frac{1}{\ln 5})$, $(-\frac{1}{\ln 2}, -\frac{1}{\ln 3}, \frac{1}{\ln 5})$ et $(-\frac{1}{\ln 2}, -\frac{1}{\ln 3}, -\frac{1}{\ln 5})$.

On complète $\{r_1, r_2\}$ en une base R de $\mathbb{Z}^3$ et on décompose chaque sommet dans cette base. En notant s_j la composante de s sur r_j, on pose :

$$m_j = \sup_{s \in S} s_j$$

On a alors, de toute évidence :

> Lemme 4 : Soit X_j la jème coordonnée de x sur la base R. La boule unité B_L (1) est incluse dans la boule unité de la norme
>
> $$M(X) = \sup \left\{ \frac{|X_1|}{m_1}, \frac{|X_2|}{m_2}, \frac{|X_3|}{m_3} \right\}$$

Une boule pour la norme M est un pavé dont les arêtes sont parallèles aux vecteurs de la base R. Il est facile de réaliser informatiquement un parcours des éléments de ce pavé de coordonnées entières.

L'algorithme est le suivant :

1) *Formules de changement de base :* les coordonnées de r_1, r_2 et r_3 dans la base canonique de $\mathbb{Z}^3$ permettent d'obtenir les coordonnées x_j de x en fonction de ses coordonnées X_j dans la base R. On inverse ces formules, pour calculer l'expression des X_j en fonction des x_j.

2) *Calcul des m_j :* On parcourt l'ensemble S, en calculant à chaque fois les coordonnées s_j de s dans la base R, pour obtenir finalement les valeurs des m_j.

3) *Réduction :*

(a) On suppose que la réduction de kg est effectuée et soit h le vecteur de H obtenu, tel que kg + h soit de hauteur minimale. On pose z = (k+1)g + h.

(b) Soit r = p(z). On calcule les dimensions du pavé de H de centre –z et de rayon r pour la norme M, en prenant les coordonnées z_1, z_2, z_3 de z dans la base R, puis en calculant les valeurs $a_j = - z_j - rm_j$ et $b_j = - z_j + rm_j$. Le pavé obtenu est $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$.

(c) On parcourt ce pavé en énumérant tous ses éléments t de coordonnées entières sur la base R, et en calculant à chaque fois la hauteur h(t+z). Le vecteur t pour lequel la hauteur est minimale est tel que t+z est le représentant de (k+1)g, c'est-à-dire que h+t est le nouveau vecteur de réduction.

3 – Les gammes de Zarlino

N.B : Tous nos calculs sur la réduction des degrés se trouvent en annexe.

a) Approximation des premières gammes de Pythagore :

$$\begin{vmatrix} a & \alpha & \alpha' \\ b & \beta & \beta' \\ c & 0 & \gamma' \end{vmatrix} = \beta\gamma' a + \alpha\gamma' b + (\alpha\alpha' - \alpha'\beta)c = \alpha'' a + \beta'' b + \gamma'' c.$$

- $si\ r = \frac{3}{2}$, i.e. $(\alpha, \beta, 0) = (-1, 1, 0)$

Cherchons un deuxième comma :

- pour $r' = \frac{5}{2^2}$, $(\alpha', \beta', \gamma') = (-2, 0, 1)$, donc P.G.C.D. $(\alpha'', \beta'', \gamma'')$ = P.G.C.D. (1, 1, 2) = 1,
- pour $r' = \frac{2\times3}{5}$, $(\alpha', \beta', \gamma') = (1, 1, -1)$, donc P.G.C.D. $(\alpha'', \beta'', \gamma'')$ = P.G.C.D. (-1, -1, -2) = 1,
- pour $r' = \frac{2\times5}{3^2}$, $(\alpha', \beta', \gamma') = (1, -2, 1)$, donc P.G.C.D. $(\alpha'', \beta'', \gamma'')$ = P.G.C.D. (1, 1, 1) = 1,
- pour $r' = \frac{2^4}{3\times5}$, $(\alpha', \beta', \gamma') = (4, -1, -1)$, donc P.G.C.D. $(\alpha'', \beta'', \gamma'')$ = P.G.C.D. (-1, -1, -3) = 1,
- pour $r' = \frac{5^2}{2^3\times3}$, $(\alpha', \beta', \gamma') = (-3, -1, 2)$, donc P.G.C.D. $(\alpha'', \beta'', \gamma'')$ = P.G.C.D. (2, 2, 4) = $2 \neq \pm 1$,
- pour $r' = \frac{3^4}{2^4\times5}$, $(\alpha', \beta', \gamma') = (-4, 4, -1)$, donc P.G.C.D. $(\alpha'', \beta'', \gamma'')$ = P.G.C.D. (1, -1, 0) = 1.

Ainsi, nous pourrons indifféremment choisir $r' = \frac{5}{2^2}, \frac{2\times3}{5}, \frac{2\times5}{3^2}, \frac{2^4}{3\times5}$ ou $\frac{3^4}{2^4\times5}$.

Cherchons un générateur de $<2, 3, 5>/<\frac{3}{2}, r'>$:

Pour $r' = \frac{5}{2^2}, \frac{2\times3}{5}, \frac{2\times5}{3^2}, \frac{2^4}{3\times5}$ et $\frac{3^4}{2^4\times5}$, si (a, b, c) = (1, 0, 0), on a $\alpha'' a + \beta'' b + \gamma'' c = \alpha'' = \pm 1$, donc, d'après le théorème III-2.3, $\overline{g} = \overline{2}$ est un générateur.

En conclusion, pour toutes ces gammes, l'octave sera constituée d'un unique intervalle : l'unisson.

- *si* $r = \frac{2^2}{3}$, on a le tableau suivant :

r'	$\frac{5}{2^2}$	$\frac{2\times 3}{5}$	$\frac{2\times 5}{3^2}$	$\frac{2^4}{3\times 5}$	$\frac{5^2}{2^3\times 3}$	$\frac{3^4}{2^4\times 5}$
g	2	2	2	2	$\frac{5}{2^2}$	2

On remarque alors que seul r' = $\frac{5^2}{2^3\times 3}$ amène à un résultat intéressant. Plaçons-nous dans <2, 3, 5>/<$\frac{2^2}{3}$, $\frac{5^2}{2^3\times 3}$> = $\{2^x3^y5^z$, $x \in \mathbb{Z}$, $y \in \mathbb{Z}$, $z \in \mathbb{Z}$, avec $2^2 \equiv 3$ et $5^2 \equiv 2^3\times 3\}$.

$\overline{g} = \overline{\frac{5}{2^2}}$ est générateur et on a $\left(\frac{5}{2^2}\right)^2 \equiv \frac{2^3\times 3}{2^2\times 3} = 2$, donc nous répartissons deux sons dans l'octave :

n	0	1
f_n	f	$\frac{5}{2^2}$ f

Et, on constate sans grande difficulté que $\frac{5}{2^2}$ est bien un représentant de plus petite hauteur de sa classe.

Nous avons donc obtenu une nouvelle gamme, en améliorant Γ_1 de façon quantitative.

- *si* $r = \frac{3^2}{2^3}$, on peut établir le tableau suivant :

r'	$\frac{5}{2^2}$	$\frac{2\times 3}{5}$	$\frac{2\times 5}{3^2}$	$\frac{2^4}{3\times 5}$	$\frac{5^2}{2^3\times 3}$	$\frac{3^4}{2^4\times 5}$
g	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{2^2}$	$\frac{3}{2}$

Appliquons le théorème III-2.2. Si r' vaut $\frac{5}{2^2}$, $\frac{2\times 3}{5}$, $\frac{2\times 5}{3^2}$, ou $\frac{3^4}{2^4\times 5}$, alors <2, 3, 5>/<$\frac{3^2}{2^3}$, r'> est isomorphe à <2, 3>/<$\frac{3^2}{2^3}$>. Il suffit donc dans tous ces cas de vérifier si certains représentants de <2, 3>/<$\frac{3^2}{2^3}$> ne doivent pas être remplacés par des éléments de <2, 3, 5> de plus petite hauteur dans le groupe <2, 3, 5>/<$\frac{3^2}{2^3}$, r'>. Or, d'après l'algorithme de réduction, ce n'est pas le cas.

Ceci nous amène donc à l'étude du cas $r' = \dfrac{5^2}{2^3 \times 3}$.

Plaçons-nous dans $<2, 3, 5>/<\dfrac{3^2}{2^3}, \dfrac{5^2}{2^3 \times 3}> = \{2^x 3^y 5^z,\ x \in \mathbb{Z},\ y \in \mathbb{Z},\ z \in \mathbb{Z}$, avec $2^3 \equiv 3^2$ et $5^2 \equiv 2^3 \times 3\}$. Nous savons que $\overline{g} = \dfrac{5}{2^2}$ est générateur.

Or, $\left(\dfrac{5}{2^2}\right)^2 = \dfrac{5^2}{2^4}$ et $\dfrac{5^2}{2^4} \times \dfrac{2^3 \times 3}{5^2} = \dfrac{3}{2}$,

$\left(\dfrac{5}{2^2}\right)^3 = \dfrac{3}{2} \times \dfrac{5}{2^2} = \dfrac{3 \times 5}{2^3}$,

$\left(\dfrac{5}{2^2}\right)^4 = \dfrac{3^2}{2^2} = 2.$

Donc, nous répartissons les 4 sons suivants dans l'octave :

n	0	1	2	3
f_n	f	$\dfrac{5}{2^2}$ f	$\dfrac{3}{2}$ f	$\dfrac{3 \times 5}{2^3}$ f

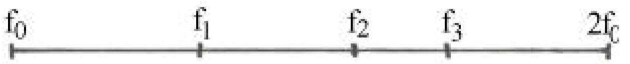
On remarque que ces valeurs correspondent à celles de la suite d'A.P.M. de la page 43.

Nous pouvons ensuite appliquer l'algorithme de réduction et nous obtenons l'octave suivante, rangée dans l'ordre croissant :

n	0	1	2	3
f_n	f	$\dfrac{5}{2^2}$ f	$\dfrac{3}{2}$ f	$\dfrac{5}{3}$ f

ce que la représentation linéaire suivante permet d'apprécier :

Ce faisant, nous avons obtenu une nouvelle gamme en améliorant quantitativement Γ_2.



Passons maintenant à des gammes d'un plus grand intérêt.

b) Amélioration de la gamme pentatonique :

Si $r = \frac{2^8}{3^5}$, on obtient le tableau suivant :

r'	$\frac{5}{2^2}$	$\frac{2\times3}{5}$	$\frac{2\times5}{3^2}$	$\frac{2^4}{3\times5}$	$\frac{5^2}{2^3\times3}$	$\frac{3^4}{2^4\times5}$
g	$\frac{3^2}{2^3}$	$\frac{3^2}{2^3}$	$\frac{3^2}{2^3}$	$\frac{3^2}{2^3}$	$\frac{2\times5}{3^2}$	$\frac{3^2}{2^3}$

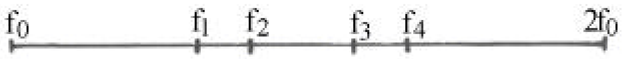
- Si $r' = \frac{5}{2^2}, \frac{2´3}{5}, \frac{2´5}{3^2}, \frac{2^4}{3´5}$ *ou* $\frac{3^4}{2^4´5}$

D'après le théorème III-2.2 , nous savons que pour ces valeurs de r', $<2, 3, 5>/<\frac{2^8}{3^5}, r'>$ est isomorphe à $<2, 3>/<\frac{2^8}{3^5}>$. L'algorithme de réduction nous assure que pour les trois derniers commas, certains représentants de $<2, 3>/<\frac{2^8}{3^5}>$ doivent être remplacés par des éléments de plus petite hauteur de $<2, 3, 5>/<\frac{2^8}{3^5}, r'>$.

Ainsi, si $r' = \frac{2\times5}{3^2}$, nous répartissons les 5 sons suivants dans l'octave :

n	0	3	1	4	2
f_n	f	$\frac{5}{2^2}$ f	$\frac{2^2}{3}$ f	$\frac{3}{2}$ f	$\frac{2^3}{5}$ f

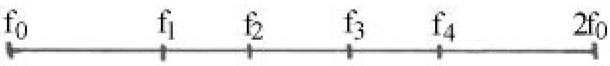
et la représentation linéaire est la suivante :



De même, si $r' = \frac{2^4}{3\times5}$ ou $\frac{3^4}{2^4\times5}$, l'octave se présente comme suit :

n	0	3	1	4	2
f_n	f	$\frac{2\times3}{5}$ f	$\frac{2^2}{3}$ f	$\frac{3}{2}$ f	$\frac{5}{3}$ f

ce que la représentation linéaire nous permet de visualiser :



Et, les gammes obtenues affinent la gamme pentatonique en l'améliorant de façon qualitative.

- *Si* $r' = \frac{5^2}{2^3 \times 3}$

Plaçons-nous dans $<2, 3, 5>/<\frac{2^8}{3^5}, \frac{5^2}{2^3 \times 3}> = \{2^x 3^y 5^z, x \in \mathbb{Z}, y \in \mathbb{Z}, z \in \mathbb{Z}$, avec $2^8 \equiv 3^5$ et $5^2 \equiv 2^3 \times 3\}$. Nous savons que $\overline{g} = \frac{2\times 5}{3^2}$ est générateur.

Or,

$$\left(\frac{2\times5}{3^2}\right)^2 = \frac{2\times5}{3^2}\times\frac{2\times5}{3^2}\times\frac{2^3\times3}{5^2}\times\frac{3^5}{2^8} = \frac{3^2}{2^3}$$

$$\left(\frac{2\times5}{3^2}\right)^3 = \frac{3^2}{2^3}\times\frac{2\times5}{3^2} = \frac{5}{2^2}$$

$$\left(\frac{2\times5}{3^2}\right)^4 = \frac{5}{2^2}\times\frac{2\times5}{3^2}\times\frac{2^3\times3}{5^2} = \frac{2^2}{3}$$

$$\left(\frac{2\times5}{3^2}\right)^5 = \frac{2^2}{3}\times\frac{2\times5}{3^2} = \frac{2^3\times5}{3^3}$$

$$\left(\frac{2\times5}{3^2}\right)^6 = \frac{2^3\times5}{3^3}\times\frac{2\times5}{3^2}\times\frac{2^3\times3}{5^2}\times\frac{3^5}{2^8} = \frac{3}{2}$$

$$\left(\frac{2\times5}{3^2}\right)^7 = \frac{3}{2}\times\frac{2\times5}{3^2} = \frac{5}{3}$$

$$\left(\frac{2\times5}{3^2}\right)^8 = \frac{5}{3}\times\frac{2\times5}{3^2}\times\frac{2^3\times3}{5^2} = \frac{2^4}{3^2}$$

$$\left(\frac{2\times5}{3^2}\right)^9 = \frac{2^4}{3^2}\times\frac{2\times5}{3^2}\times\frac{3^5}{2^8} = \frac{3\times5}{2^3}$$

Nous répartissons les 10 sons suivants dans l'octave, par analogie à la page 43 :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
f_n	f	$\frac{5}{2^2}$ f	$\frac{3}{2}$ f	$\frac{3\times5}{2^3}$ f	$\frac{3^2}{2^3}$ f	$\frac{5}{3}$ f	$\frac{2^2}{3}$ f	$\frac{2\times5}{3^2}$ f	$\frac{2^4}{3^2}$ f

9
$\frac{2^3\times5}{3^3}$ f

Nous pouvons alors appliquer l'algorithme de réduction et nous obtenons l'octave suivante, rangée dans l'ordre croissant :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
f_n	f	$\frac{2\times5}{3^2}$ f	$\frac{3^2}{2^3}$ f	$\frac{5}{2^2}$ f	$\frac{2^2}{3}$ f	$\frac{3^3}{2^2\times5}$ f	$\frac{3}{2}$ f	$\frac{5}{3}$ f	$\frac{2^4}{3^2}$ f

9
$\frac{3^2}{5}$ f

La représentation linéaire est la suivante :

Nous avons obtenu une nouvelle gamme en améliorant cette fois la gamme pentatonique de façon quantitative.

c) Amélioration de la gamme chromatique :

Si r = $\frac{3^{12}}{2^{19}}$, on obtient le tableau suivant :

r'	$\frac{5}{2^2}$	$\frac{2\times3}{5}$	$\frac{2\times5}{3^2}$	$\frac{2^4}{3\times5}$	$\frac{5^2}{2^3\times3}$	$\frac{3^4}{2^4\times5}$	$\frac{5^6}{2^6\times3^5}$
g	$\frac{2^8}{3^5}$	$\frac{2^8}{3^5}$	$\frac{2^8}{3^5}$	$\frac{2^8}{3^5}$	$\frac{3^4}{2^4\times5}$	$\frac{2^4}{3\times5}$	$\frac{3^4}{2^4\times5}$

- *Si r' =* $\frac{5}{2^2}, \frac{2\times3}{5}, \frac{2\times5}{3^2}$ *ou* $\frac{2^4}{3\times5}$

D'après le théorème III-2.2 , nous savons que pour ces valeurs de r', <2, 3, 5>/<$\frac{3^{12}}{2^{19}}$, r'> est isomorphe à <2, 3>/<$\frac{3^{12}}{2^{19}}$>. L'algorithme de réduction nous assure que pour les deux derniers commas, certains représentants de <2, 3>/<$\frac{3^{12}}{2^{19}}$> doivent être remplacés par des éléments de plus petite hauteur de <2, 3, 5>/<$\frac{3^{12}}{2^{19}}$, r'>.

Ainsi, si r' = $\frac{2\times5}{3^2}$, nous répartissons les 12 sons suivants dans l'octave :

n	0	7	9	2	8	11	1	4	10
f_n	f	$\frac{2^8}{3^5}$ f	$\frac{2^4}{3\times5}$ f	$\frac{5}{2^2}$ f	$\frac{2^5}{5^2}$ f	$\frac{2^2}{3}$ f	$\frac{3}{2}$ f	$\frac{5^2}{2^4}$ f	$\frac{2^3}{5}$ f

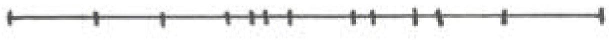
3	5	6
$\frac{3\times5}{2^3}$ f	$\frac{3^5}{2^7}$ f	$\frac{5^3}{2^6}$ f

et la représentation linéaire est la suivante :

De même, si r’ = $\frac{2^4}{3\times 5}$, l’octave se présente comme suit :

n	0	9	2	7	11	4	8	1	5	6	10	3
f_n	f	$\frac{2\times 5}{3^2}$ f	$\frac{2\times 3}{5}$ f	$\frac{2\times 3^4}{5^3}$ f	$\frac{2^2}{3}$ f	$\frac{3^3}{2^2\times 5}$ f	$\frac{5^2}{2\times 3^2}$ f	$\frac{3}{2}$ f	$\frac{5^3}{3^4}$ f	$\frac{3^4}{2\times 5^2}$ f	$\frac{5}{3}$ f	$\frac{3^2}{5}$ f

ce que la représentation linéaire nous permet de visualiser :



Les gammes obtenues affinent la gamme chromatique, au sens où on a trouvé des éléments de plus petite hauteur. Mais, au vu des représentations linéaires, on peut douter de leur intérêt musical.

- *Si r’ =* $\frac{3^4}{2^4\times 5}$

Plaçons-nous dans $<2, 3, 5>/<\frac{3^{12}}{2^{19}}, \frac{3^4}{2^4\times 5}>$ = $\{2^x3^y5^z$, $x \in \mathbb{Z}$, $y \in \mathbb{Z}$, $z \in \mathbb{Z}$, avec $2^{19} \equiv 3^{12}$ et $5\times 2^4 \equiv 3^4\}$. Nous savons que $\overline{g} = \frac{2^4}{3\times 5}$ est générateur.

Or, $\frac{2^4}{3\times 5} = \frac{2^4}{3\times 5} \times \frac{5\times 2^4}{3^4} = \frac{2^8}{3^5}$ (et $\frac{2^8}{3^5} \times \frac{5\times 2^4}{3^4} \times \frac{3^{12}}{2^{19}} = \frac{3^3\times 5}{2^7}$)

$\frac{2^8}{3^5} \times \frac{2^4}{3\times 5} \times \frac{5\times 2^4}{3^4} \times \frac{3^{12}}{2^{19}} = \frac{3^2}{2^3}$ (et $\frac{3^2}{2^3} \times \frac{5\times 2^4}{3^4} = \frac{2\times 5}{3^2}$)

$\frac{3^2}{2^3} \times \frac{2^4}{3\times 5} \times \frac{5\times 2^4}{3^4} = \frac{2^5}{3^3}$ (et $\frac{2^5}{3^3} \times \frac{5\times 2^4}{3^4} \times \frac{3^{12}}{2^{19}} = \frac{3^5\times 5}{2^{10}}$)

$\frac{2^5}{3^3} \times \frac{2^4}{3\times 5} \times \frac{5\times 2^4}{3^4} \times \frac{3^{12}}{2^{19}} = \frac{3^4}{2^6}$ (et $\frac{3^4}{2^6} \times \frac{5\times 2^4}{3^4} = \frac{5}{2^2}$)

$\frac{3^4}{2^6} \times \frac{2^4}{3\times 5} \times \frac{5\times 2^4}{3^4} = \frac{2^2}{3}$ (et $\frac{2^2}{3} \times \frac{5\times 2^4}{3^4} = \frac{2^6\times 5}{3^5}$)

$\frac{2^2}{3} \times \frac{2^4}{3\times 5} \times \frac{5\times 2^4}{3^4} \times \frac{3^{12}}{2^{19}} = \frac{3^6}{2^9}$ (et $\frac{3^6}{2^9} \times \frac{5\times 2^4}{3^4} = \frac{3^2\times 5}{2^5}$)

$\frac{3^6}{2^9} \times \frac{2^4}{3\times 5} \times \frac{5\times 2^4}{3^4} = \frac{3}{2}$ (et $\frac{3}{2} \times \frac{5\times 2^4}{3^4} = \frac{2^3\times 5}{3^3}$)

$\frac{3}{2} \times \frac{2^4}{3\times 5} \times \frac{5\times 2^4}{3^4} = \frac{2^7}{3^4}$ (et $\frac{2^7}{3^4} \times \frac{5\times 2^4}{3^4} \times \frac{3^{12}}{2^{19}} = \frac{3^4\times 5}{2^8}$)

$\frac{2^7}{3^4} \times \frac{2^4}{3\times 5} \times \frac{5\times 2^4}{3^4} \times \frac{3^{12}}{2^{19}} = \frac{3^3}{2^4}$ (et $\frac{3^3}{2^4} \times \frac{5\times 2^4}{3^4} = \frac{5}{3}$)

$$\frac{3^3}{2^4}\times\frac{2^4}{3\times5}\times\frac{5\times2^4}{3^4}=\frac{2^4}{3^2} \qquad \left(\text{et } \frac{2^4}{3^2}\times\frac{5\times2^4}{3^4}=\frac{2^8\times5}{3^6}\right)$$

$$\frac{2^4}{3^2}\times\frac{2^4}{3\times5}\times\frac{5\times2^4}{3^4}\times\frac{3^{12}}{2^{19}}=\frac{3^5}{2^7} \qquad \left(\text{et } \frac{3^5}{2^7}\times\frac{5\times2^4}{3^4}=\frac{3\times5}{2^3}\right)$$

$$\frac{3^5}{2^7}\times\frac{2^4}{3\times5}\times\frac{5\times2^4}{3^4}=2 \qquad \left(\text{et } 2\times\frac{5\times2^4}{3^4}=\frac{2^5\times5}{3^4}\right)$$

Notre octave sera donc constituée de 12 notes. On remarque de plus que celles-ci sont équivalentes à 12 autres. Mises ensemble, ces notes forment le tableau de la succession d'A.P.M. de la page 43. Ainsi, la construction du groupe quotient $<2, 3, 5>/<\frac{3^{12}}{2^{19}}, \frac{3^4}{2^4\times5}>$ nous a bien permis de réduire de moitié le cardinal de l'octave, ce que nous souhaitions.

Nous pouvons ensuite appliquer l'algorithme de réduction sur ces 11 premières valeurs et nous obtenons l'octave suivante, rangée dans l'ordre croissant :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
f_n	f	$\frac{2^4}{3\times5}$ f	$\frac{3^2}{2^3}$ f	$\frac{2\times3}{5}$ f	$\frac{5}{2^2}$ f	$\frac{2^2}{3}$ f	$\frac{5^2}{2\times3^2}$ f	$\frac{3}{2}$ f	$\frac{2^3}{5}$ f	$\frac{5}{3}$ f	$\frac{3^2}{5}$ f	$\frac{3\times5}{2^3}$ f

Et, la représentation linéaire qui suit nous permet de la visualiser :

Nous venons d'affiner la gamme chromatique, par une amélioration qualitative. Cette gamme est appelée la gamme chromatique de Zarlino.

- *Si* $r' = \frac{5^2}{2^3 \times 3}$, nous construisons une nouvelle gamme, dont la première octave est (cf. feuille de calcul en annexe) :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
f_n	f	$\frac{3^4}{2^4\times5}$ f	$\frac{2^8}{3^5}$ f	$\frac{2\times5}{3^2}$ f	$\frac{3^2}{2^3}$ f	$\frac{3^6}{2^7\times5}$ f	$\frac{2^5}{3^3}$ f	$\frac{5}{2^2}$ f	$\frac{3^4}{2^6}$ f

9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
$\frac{2^6\times5}{3^5}$ f	$\frac{2^2}{3}$ f	$\frac{3^3}{2^2\times5}$ f	$\frac{3^6}{2^9}$ f	$\frac{2^3\times5}{3^3}$ f	$\frac{3}{2}$ f	$\frac{3^5}{2^5\times5}$ f	$\frac{2^7}{3^4}$ f	$\frac{5}{3}$ f	$\frac{3^3}{2^4}$ f

19	20	21	22	23
$\frac{2^8\times5}{3^6}$ f	$\frac{2^4}{3^2}$ f	$\frac{3^2}{5}$ f	$\frac{3^5}{2^7}$ f	$\frac{2^5\times5}{3^4}$ f

- *Si r’* = $\frac{5^6}{2^6 \times 3^5}$, nous construisons là encore une nouvelle gamme, dont la première octave suit (cf. feuille de calcul en annexe) :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
f_n	f	$\frac{2^{11}}{3^4\times5^2}$ f	$\frac{3^4}{2^4\times5}$ f	$\frac{2^7}{5^3}$ f	$\frac{5^2}{2^3\times3}$ f	$\frac{2^8}{3^5}$ f	$\frac{3^3\times5}{2^7}$ f	$\frac{2^4}{3\times5}$ f	$\frac{3^3}{5^2}$ f

9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
$\frac{2^5\times5^2}{3^6}$ f	$\frac{3^2\times5^3}{2^{10}}$ f	$\frac{2\times5}{3^2}$ f	$\frac{3^2}{2^3}$ f	$\frac{2^8}{3^2\times5^2}$ f	$\frac{3^6}{2^7\times5}$ f	$\frac{5^3}{2^2\times3^3}$ f	$\frac{3\times5^2}{2^6}$ f	$\frac{2^5}{3^3}$ f	$\frac{3^5\times5}{2^{10}}$ f

19	20	21	22	23
$\frac{2\times3}{5}$ f	$\frac{2^{12}}{3^3\times5^3}$ f	$\frac{3^5}{2^3\times5^2}$ f	$\frac{2^2\times5^2}{3^4}$ f	$\frac{5}{2^2}$ f

En résumé, si on calque une succession d’accords parfaits majeurs sur les successions de quintes établies dans la partie précédente, on introduit des notes supplémentaires aux gammes de Pythagore.

Par conséquent, améliorer ces gammes de manière qualitative plutôt que quantitative revient à introduire de nouvelles approximations, convenablement choisies.

Mathématiquement, cela revient à imposer deux relations $\frac{3^n}{2^{n+p}} = 1$ et $2^x3^y5^z = 1$ dans le sous-groupe multiplicatif de $\mathbb{Q}_+^*$ engendré par 2, 3 et 5.

IV – DE L'HARMONIE A L'ENHARMONIE

Au XVIII^{ème} siècle, L.Euler (1707 – 1783) définissait lui aussi la musique comme *la science de combiner les sons de manière qu'il en résulte une harmonie agréable* et il ajoutait, comme nous l'avons vu précédemment, que *toute perfection fait naître le plaisir* et que *les choses dans lesquelles nous découvrons un manque de perfection ou une imperfection nous déplaisent.*
Euler étant Euler, il se lance vers 1731 dans la rédaction d'un monumental *Tentamen novae theoriae musicae, ex certissimis harmoniae principiis dilucide expositae,* se proposant entre autre de construire des « genres » (c'est-à-dire des gammes musicales) consonantes, donc simples, mais suffisamment riches pour permettre la création d'œuvres variées.

Pourtant, un siècle plus tôt, A.Werckmeister (1645 – 1706), en créant la gamme tempérée qui est la nôtre, sacrifiait volontairement cette exigence d'harmonie de manière à en satisfaire une autre, pleinement contemporaine : l'enharmonie.

Dès lors, on peut se demander quelle est la solution idéale, si tant est qu'il y en a une…

1 – Les gammes eulériennes

a) Introduction de la septième harmonique :

Dans *The langage of music,* D. Cooke formule la réflexion suivante concernant la spirale des quintes :

…whereas musically we want the equation :

$$\frac{3^{12}}{2^{19}} = 1,$$

the correct mathematical equation is

$$\frac{3^{12}}{2^{19}} = 1{,}014\ldots$$

Celle-ci résume totalement notre démarche : l'opération effectuée par les musiciens est en fait purement algébrique et revient simplement à imposer la relation $3^{12} \equiv 2^{19}$ dans le groupe commutatif <2, 3>, c'est-à-dire à construire l'épimorphisme (ou morphisme surjectif) :

$$\varphi_0 : \langle 2,3\rangle \longrightarrow \langle 2,3\rangle / \langle \frac{3^{12}}{2^{19}} \rangle$$

Or, nous avons vu que l'image de φ_0 est isomorphe à $\mathbb{Z}$.

Au delà, nous avons constaté que φ_0 se prolonge en un autre épimorphisme :

$$\varphi_1 : \langle 2, 3, 5\rangle \longrightarrow \langle 2, 3, 5\rangle / \langle \frac{3^{12}}{2^{19}}, \frac{3^4}{2^4 \times 5} \rangle$$

lequel possède la même propriété que φ_0.

On peut aller encore plus loin en construisant :

$$\varphi : <2,3,5,7> \longrightarrow <2,3,5,7>/<\frac{3^{12}}{2^{19}},\frac{3^4}{2^4\times 5},\frac{3^2\times 5^2}{2^5\times 7}>$$

qui conserve encore cette propriété d'isomorphisme à $\mathbb{Z}$.

En effet, on peut de toute évidence étendre la notion de comma à G = <2, 3, 5, 7> et le théorème III.2.1 nous assure que $\frac{3^2\times 5^2}{2^5\times 7} = \frac{225}{224}$ en est un.

Si l'on considère maintenant le groupe quotient de G par le sous-groupe H engendré par les trois fractions :

$$r = 2^{\alpha}3^{\beta},\ r' = 2^{\alpha'}3^{\beta'}5^{\gamma'} \text{ et } r'' = 2^{\alpha''}3^{\beta''}5^{\gamma''}7^{\delta''},$$

le théorème suivant se démontre comme le théorème III.2.3 :

Théorème IV.1.1 : 1) Posons $\begin{vmatrix} x & \alpha & \alpha' & \alpha'' \\ y & \beta & \beta' & \beta'' \\ z & \gamma & \gamma' & \gamma'' \\ t & \delta & \delta' & \delta'' \end{vmatrix} = \alpha'''x + \beta'''y + \gamma'''z + \delta'''t.$

Si le P.G.C.D. (α''', β''', γ''', δ''') est égal à 1, alors G/H est isomorphe à $\mathbb{Z}$.

2) Dire que la classe de $g = 2^a3^b5^c7^d$ est un générateur de G/H équivaut à dire que :

$$\begin{vmatrix} a & \alpha & \alpha' & \alpha'' \\ b & \beta & \beta' & \beta'' \\ c & \gamma & \gamma' & \gamma'' \\ d & \delta & \delta' & \delta'' \end{vmatrix} = \alpha'''a + \beta'''b + \gamma'''c + \delta'''d = \pm 1.$$

Or, nous avons $\begin{vmatrix} x & -19 & -4 & -5 \\ y & 12 & 4 & 2 \\ z & 0 & -1 & 2 \\ t & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 12x + 19y + 28z + 34t.$

P.G.C.D. (12, 19, 28, 34) = 1 et (a, b, c, d) = (-1, 1, 1, -1) est une solution de l'équation de Bezout.

En conséquence, G/H est isomorphe à $\mathbb{Z}$ et engendré par $\overline{\frac{3\times 5}{2\times 7}}$.

Notons d'ores et déjà que nous n'introduisons pas cette nouvelle harmonique dans le but d'améliorer les gammes obtenues précédemment, mais pour éclairer certains points de la construction eulérienne qui va suivre.
En effet, en 1712, Leibniz remarquait : *De même qu'on a coutume de dire que les primitifs - en arithmétique - sont incapables de compter au delà de trois, de même nos oreilles civilisées ne saisissent - en musique - que des rapports tirés des nombres 1,2,3 et 5; si elles étaient mieux exercées, elles seraient en mesure d'aller jusqu'à 7.*
Peut être y parviendront-elle un jour ?
Mais en revanche, il y a peu de chances que l'homme puisse jamais accéder aux nombres 11 et13.
Et Euler, s'inspirant de cette réflexion, va alors utiliser en particulier les nombres du groupe multiplicatif <2,3,5>.

b) La construction eulérienne :

Euler associe à chaque entier du sous groupe engendré par 3 et 5 un « genre » et il classe les éléments de ce sous groupe dans l'ordre suivant :

$$1\ ,\ \underline{3\ ,5}\ ,\ \underline{3^2\ ,3\times 5\ ,5^2}\ ,\ \underline{3^3\ ,3^2\times 5\ ,3\times 5^2\ ,5^3}\ ,\ \underline{3^4\ ,3^3\times 5\ ,3^2\times 5^2\ ,3\times 5^3\ ,5^4}\ ,\ \underline{3^5\ ,3^4\times 5\ ,3^3\times 5^2 ...}\quad \text{etc.}$$

Autrement dit, il construit la bijection $f : \langle 3, 5\rangle \longrightarrow \mathbb{N}^*$

$$3^p.5^q \longmapsto \frac{(p+q)(p+q+1)}{2} + q + 1$$

Soit *e* un élément de ce sous groupe, appelé <u>exposant du genre</u>. Euler construit une gamme dont le nombre de notes dans une octave sera égal au nombre de diviseurs de *e*, c'est-à-dire $(p + 1)(q + 1)$.

De plus, si *d* est un diviseur de *e*, la construction revient à lui associer l'intervalle $\frac{d}{2^{n(d)}}$ où $n(d)$ désigne la partie entière de $\log_2(d) = \frac{\ln d}{\ln 2}$.

Notons que ceci n'est en rien surprenant : $n(d) = \lfloor \log_2(d) \rfloor \Leftrightarrow n(d) \leq \log_2(d) < n(d) + 1$

$$\Leftrightarrow 2^{n(d)} \leq d < 2^{n(d)+1}$$

$$\Leftrightarrow 1 \leq \frac{d}{2^{n(d)}} < 2.$$

Euler range ensuite les intervalles par ordre croissant et leur donne des noms. On peut étonnamment constater que ceux-ci sont invariablement $\varphi(x)$, à une exception près !

Quelle est donc cette « erreur » commise par Euler ? Elle concerne une note du quatorzième genre (genre d'exposant $e = 3.5^2$). Euler classe l'intervalle $\frac{3.5^3}{2^8}$ dans les quartes augmentées (tritons), mais on trouve que $\varphi(\frac{3.5^3}{2^8}) = \varphi(\frac{3}{2} \times \left(\frac{5\times2^4}{3^4}\right)^3 \times \frac{3^{12}}{2^{19}}) = \varphi(\frac{3}{2}) = 7$.

En effet, $\overline{\frac{3}{2}} = \left(\overline{\frac{3\times5}{2\times7}}\right)^7$. Et, ceci signifie, nous le verrons, que c'est une quinte !

c) Les premiers genres :

Selon cette méthode, les premiers genres considérés sont d'une extrême simplicité. On peut s'en faire une idée, jusqu'au 17$^{\text{ème}}$ genre, en parcourant les tableaux issus du *Tentamen* qui sont répertoriés en annexe.

Remarquons simplement que le genre d'exposant 3^4 , ou 11$^{\text{ème}}$ genre, n'est autre que la gamme pentatonique chinoise (cf. p 37). En effet, $e = 3^4$ admet 5 diviseurs, à savoir 1, 3, 3^2, 3^3 et 3^4, et nous sommes par là même ramenés à déterminer une succession de 4 quintes ascendantes…

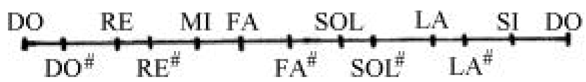
d) Le genre diatonico – chromatique :

Arrivé au genre diatonico – chromatique ou 18$^{\text{ème}}$ genre, la gamme musicale construite est plus intéressante. En effet, $e = 3^3\times5^2$ et si on cherche tous les diviseurs de e et qu'on calcule la valeur de chaque intervalle $\frac{d}{2^{n(d)}}$ pour finalement ranger ces valeurs par ordre croissant, on obtient :

d	n(d)	$\frac{d}{2^{n(d)}}$	⇒ dans l'ordre croissant	nom de la note
1	0	1	1	do
3	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{3^3\times5}{2^7}$	do#
3^2	3	$\frac{3^2}{2^3}$	$\frac{3^2}{2^3}$	ré
3^3	4	$\frac{3^3}{2^4}$	$\frac{3\times5^2}{2^6}$	ré#
5	2	$\frac{5}{2^2}$	$\frac{5}{2^2}$	mi
3×5	3	$\frac{3\times5}{2^3}$	$\frac{3^3\times5^2}{2^9}$	fa
$3^2\times5$	5	$\frac{3^2\times5}{2^5}$	$\frac{3^2\times5}{2^5}$	fa#
$3^3\times5$	7	$\frac{3^3\times5}{2^7}$	$\frac{3}{2}$	sol

5^2	4	$\frac{5^2}{2^4}$	$\frac{5^2}{2^4}$	sol#
3×5^2	6	$\frac{3\times5^2}{2^6}$	$\frac{3^3}{2^4}$	la
$3^2\times5^2$	7	$\frac{3^2\times5^2}{2^7}$	$\frac{3^2\times5^2}{2^7}$	la #
$3^3\times5^2$	9	$\frac{3^3\times5^2}{2^9}$	$\frac{3\times5}{2^3}$	si

La représentation linéaire est la suivante :



Et on remarque bien que chaque type d'intervalle est associé à une unique valeur de φ :

Nom de l'intervalle	Intervalle	φ(x)
demi-tons	$\frac{25}{24}, \frac{27}{25}, \frac{16}{15}, \frac{135}{128}$	1
tons	$\frac{9}{8}, \frac{10}{9}, \frac{256}{225}$	2
tierces mineures	$\frac{75}{64}, \frac{6}{5}, \frac{32}{27}$	3
tierces majeures	$\frac{5}{4}, \frac{32}{25}$	4
quartes	$\frac{675}{512}, \frac{4}{3}, \frac{27}{20}$	5

quartes augmentées	$\frac{25}{18}, \frac{45}{32}, \frac{64}{45}, \frac{36}{25}$	6
quintes	$\frac{40}{27}, \frac{3}{2}, \frac{1024}{675}$	7
sixtes mineures	$\frac{25}{16}, \frac{8}{5}$	8
sixtes majeures	$\frac{5}{3}, \frac{27}{16}, \frac{128}{75}$	9
septièmes mineures	$\frac{9}{5}, \frac{16}{9}, \frac{225}{128}$	10
septièmes majeures	$\frac{15}{8}, \frac{48}{25}, \frac{50}{27}, \frac{256}{135}$	11

Ainsi, la quinte est bien associée au nombre 7.

Nous nous arrêterons là, mais il faut savoir qu' Euler est en fait allé jusqu'à l'étude du 25ème genre, en constatant que ces derniers ne présentaient aucun avantage par rapport au 18ème genre.

2 – Le problème de la transposition

a) Définition :

Un problème s'est posé très tôt aux musiciens, dès qu'il a été question de chanter une mélodie entendue, ou de la jouer sur un instrument. En effet, il est souvent nécessaire d' « adapter » cette mélodie au registre de la voix ou de l'instrument, et donc de la « déplacer » vers l'aigu ou vers le grave. Il ne faut cependant pas dénaturer la matière musicale, et donc conserver la valeur de chaque intervalle.

<u>Transposer une mélodie</u>, c'est donc multiplier toutes les fréquences par un même nombre k ($k \in \mathbb{R}_+^*$).

Nous appellerons transposition associée à l'intervalle I_k, l'application :

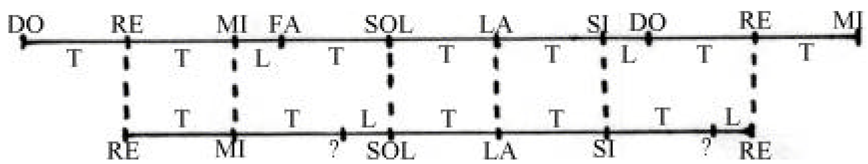
$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R}_+^* \\ f & \longmapsto & kf = f + I_k \end{array}$$

Ainsi, du point de vue de la transposition, une gamme musicale sera parfaite si l'on peut y transposer toute mélodie en partant d'un son quelconque. Ceci sera réalisé si et seulement si la gamme $\{f_0, f_1 \ldots f_{n-1}\}$ est invariante par toute transposition associée à un intervalle quelconque.

Prenons le cas des gammes que nous avons étudiées. Comment se comportent-elles vis-à-vis de la transposition ?

b) La transposition dans les gammes pythagoriciennes :

Intéressons-nous maintenant à la gamme diatonique de Pythagore. Soit par exemple la transposition faisant passer de DO à RE (et donc associée à $I_{9/8}$). Visualisons-la grâce à la représentation linéaire :



Nous voyons qu'il nous faudra changer deux notes de la gamme si l'on veut obtenir le même effet musical. Plus précisément, il faudra hausser le FA et le DO d'un intervalle T – L : FA sera donc remplacé par $FA^{\#}$ et DO par $DO^{\#}$.

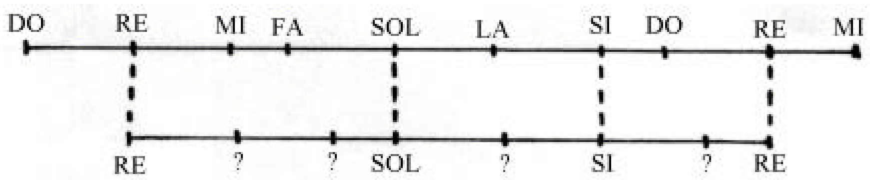
On peut établir un tableau des gammes transposées où l'on va retrouver, numériquement, l'exemple précédent :

	DO	DO$^\#$	RE	RE$^\#$	MI	MI$^\#$	FA$^\#$	SOL	SOL$^\#$	LA	LA$^\#$	SI	SI$^\#$
		RE^b		MI^b		FA	SOL^b		LA^b		SI^b		DO
DO^b		$\frac{2^8}{3^5}$		$\frac{2^5}{3^3}$	$\frac{2^{13}}{3^8}$		$\frac{2^{10}}{3^6}$		$\frac{2^7}{3^4}$		$\frac{2^4}{3^2}$	$\frac{2^{12}}{3^7}$	
SOL^b		$\frac{2^8}{3^5}$		$\frac{2^5}{3^3}$		$\frac{2^2}{3}$	$\frac{2^{10}}{3^6}$		$\frac{2^7}{3^4}$		$\frac{2^4}{3^2}$	$\frac{2^{12}}{3^7}$	
RE^b	1	$\frac{2^8}{3^5}$		$\frac{2^5}{3^3}$		$\frac{2^2}{3}$	$\frac{2^{10}}{3^6}$		$\frac{2^7}{3^4}$		$\frac{2^4}{3^2}$		2
LA^b	1	$\frac{2^8}{3^5}$		$\frac{2^5}{3^3}$		$\frac{2^2}{3}$		$\frac{3}{2}$	$\frac{2^7}{3^4}$		$\frac{2^4}{3^2}$		2
MI^b	1		$\frac{3^2}{2^3}$	$\frac{2^5}{3^3}$		$\frac{2^2}{3}$		$\frac{3}{2}$	$\frac{2^7}{3^4}$		$\frac{2^4}{3^2}$		2
SI^b	1		$\frac{3^2}{2^3}$	$\frac{2^5}{3^3}$		$\frac{2^2}{3}$		$\frac{3}{2}$		$\frac{3^3}{2^4}$	$\frac{2^4}{3^2}$		2
FA	1		$\frac{3^2}{2^3}$		$\frac{3^4}{2^6}$	$\frac{2^2}{3}$		$\frac{3}{2}$		$\frac{3^3}{2^4}$	$\frac{2^4}{3^2}$		2
DO	**1**		$\mathbf{\frac{3^2}{2^3}}$		$\mathbf{\frac{3^4}{2^6}}$	$\mathbf{\frac{2^2}{3}}$		$\mathbf{\frac{3}{2}}$		$\mathbf{\frac{3^3}{2^4}}$		$\mathbf{\frac{3^5}{2^7}}$	**2**
SOL	1		$\frac{3^2}{2^3}$		$\frac{3^4}{2^6}$		$\frac{3^6}{2^9}$	$\frac{3}{2}$		$\frac{3^3}{2^4}$		$\frac{3^5}{2^7}$	2
RE		$\mathbf{\frac{3^7}{2^{11}}}$	$\mathbf{\frac{3^2}{2^3}}$		$\mathbf{\frac{3^4}{2^6}}$		$\mathbf{\frac{3^6}{2^9}}$	$\mathbf{\frac{3}{2}}$		$\mathbf{\frac{3^3}{2^4}}$		$\mathbf{\frac{3^5}{2^7}}$	
LA		$\frac{3^7}{2^{11}}$	$\frac{3^2}{2^3}$		$\frac{3^4}{2^6}$		$\frac{3^6}{2^9}$		$\frac{3^8}{2^{12}}$	$\frac{3^3}{2^4}$		$\frac{3^5}{2^7}$	
MI		$\frac{3^7}{2^{11}}$		$\frac{3^9}{2^{14}}$	$\frac{3^4}{2^6}$		$\frac{3^6}{2^9}$		$\frac{3^8}{2^{12}}$	$\frac{3^3}{2^4}$		$\frac{3^5}{2^7}$	
SI		$\frac{3^7}{2^{11}}$		$\frac{3^9}{2^{14}}$	$\frac{3^4}{2^6}$		$\frac{3^6}{2^9}$		$\frac{3^8}{2^{12}}$		$\frac{3^{10}}{2^{15}}$	$\frac{3^5}{2^7}$	
FA$^\#$		$\frac{3^7}{2^{11}}$		$\frac{3^9}{2^{14}}$		$\frac{3^{11}}{2^{17}}$	$\frac{3^6}{2^9}$		$\frac{3^8}{2^{12}}$		$\frac{3^{10}}{2^{15}}$	$\frac{3^5}{2^7}$	
DO$^\#$		$\frac{3^7}{2^{11}}$		$\frac{3^9}{2^{14}}$		$\frac{3^{11}}{2^{17}}$	$\frac{3^6}{2^9}$		$\frac{3^8}{2^{12}}$		$\frac{3^{10}}{2^{15}}$		$\frac{3^{12}}{2^{19}}$

Et, même si on ajoute les cinq notes diésées ou les cinq notes bémolisées qui apparaissent en poursuivant le « cycle des quintes » vers le haut ou vers le bas (gamme chromatique), le problème n'en sera pas résolu pour autant, puisque ces nouvelles notes en introduiront à leur tour de nouvelles, et ainsi de suite…

c) La transposition dans les gammes zarliniennes :

Intéressons-nous au devenir de la gamme diatonique de Zarlino vis-à-vis de la transposition. Examinons, là encore, la transposition faisant passer de DO à RE, grâce à une représentation linéaire :



On remarque immédiatement que le problème est encore plus complexe que précédemment, puisque il faudra changer quatre notes de la gamme pour ne pas dénaturer le morceau. Plus précisément, il faudra hausser le FA et le DO d'un intervalle I = $\frac{3^3\times 5}{2^7}$ et le MI et le LA d'un comma de Didyme.

Le tableau des gammes transposées suivant nous persuade totalement de la difficulté :

	DO	DO#	RE	RE#	MI	MI#	FA#	SOL	SOL#	LA	LA #	SI	SI#
		REb		MIb		FA	SOLb		LA b		SIb		DO
DOb		$\frac{2^8}{3^5}$		$\frac{2^9\times5}{3^7}$	$\frac{2^{13}}{3^8}$		$\frac{2^{10}}{3^6}$		$\frac{2^{11}\times5}{3^8}$		$\frac{2^8\times5}{3^6}$	$\frac{2^{12}}{3^7}$	
SOLb		$\frac{2^8}{3^5}$		$\frac{2^9\times5}{3^7}$		$\frac{2^6\times5}{3^5}$	$\frac{2^{10}}{3^6}$		$\frac{2^7}{3^4}$		$\frac{2^8\times5}{3^6}$	$\frac{2^{12}}{3^7}$	
REb		$\frac{2^8}{3^5}$		$\frac{2^5}{3^3}$		$\frac{2^6\times5}{3^5}$	$\frac{2^{10}}{3^6}$		$\frac{2^7}{3^4}$		$\frac{2^8\times5}{3^6}$		$\frac{2^5\times5}{3^4}$
LA b		$\frac{2^8}{3^5}$		$\frac{2^5}{3^3}$		$\frac{2^6\times5}{3^5}$		$\frac{2^3\times5}{3^3}$	$\frac{2^7}{3^4}$		$\frac{2^4}{3^2}$		$\frac{2^5\times5}{3^4}$
MIb			$\frac{2\times5}{3^2}$	$\frac{2^5}{3^3}$		$\frac{2^2}{3}$		$\frac{2^3\times5}{3^3}$	$\frac{2^7}{3^4}$		$\frac{2^4}{3^2}$		$\frac{2^5\times5}{3^4}$
SIb	1		$\frac{2\times5}{3^2}$	$\frac{2^5}{3^3}$		$\frac{2^2}{3}$		$\frac{2^3\times5}{3^3}$		$\frac{5}{3}$	$\frac{2^4}{3^2}$		2
FA	1		$\frac{2\times5}{3^2}$		$\frac{5}{2^2}$	$\frac{2^2}{3}$		$\frac{3}{2}$		$\frac{5}{3}$	$\frac{2^4}{3^2}$		2
DO	**1**		**$\frac{3^2}{2^3}$**		**$\frac{5}{2^2}$**	**$\frac{2^2}{3}$**		**$\frac{3}{2}$**		**$\frac{5}{3}$**		**$\frac{3´5}{2^3}$**	**2**
SOL	1		$\frac{3^2}{2^3}$		$\frac{5}{2^2}$		$\frac{3^2\times5}{2^5}$	$\frac{3}{2}$		$\frac{3^3}{2^4}$		$\frac{3\times5}{2^3}$	2
RE		**$\frac{3^3´5}{2^7}$**	**$\frac{3^2}{2^3}$**		**$\frac{3^4}{2^6}$**		**$\frac{3^2´5}{2^5}$**	**$\frac{3}{2}$**		**$\frac{3^3}{2^4}$**		**$\frac{3´5}{2^3}$**	
LA		$\frac{3^3\times5}{2^7}$	$\frac{3^2}{2^3}$		$\frac{3^4}{2^6}$		$\frac{3^2\times5}{2^5}$		$\frac{3^4\times5}{2^8}$	$\frac{3^3}{2^4}$		$\frac{3^5}{2^7}$	
MI		$\frac{3^3\times5}{2^7}$		$\frac{3^5\times5}{2^{10}}$	$\frac{3^4}{2^6}$		$\frac{3^6}{2^9}$		$\frac{3^4\times5}{2^8}$	$\frac{3^3}{2^4}$		$\frac{3^5}{2^7}$	
SI		$\frac{3^7}{2^{11}}$		$\frac{3^5\times5}{2^{10}}$	$\frac{3^4}{2^6}$		$\frac{3^6}{2^9}$		$\frac{3^4\times5}{2^8}$		$\frac{3^6\times5}{2^{11}}$	$\frac{3^5}{2^7}$	

$FA^{\#}$		$\frac{3^7}{2^{11}}$		$\frac{3^5\times5}{2^{10}}$		$\frac{3^7\times5}{2^{13}}$	$\frac{3^6}{2^9}$		$\frac{3^8}{2^{12}}$		$\frac{3^6\times5}{2^{11}}$	$\frac{3^5}{2^7}$	
$DO^{\#}$		$\frac{3^7}{2^{11}}$		$\frac{3^9}{2^{14}}$		$\frac{3^7\times5}{2^{13}}$	$\frac{3^6}{2^9}$		$\frac{3^8}{2^{12}}$		$\frac{3^6\times5}{2^{11}}$		$\frac{3^8\times5}{2^{14}}$

d) La transposition dans les gammes eulériennes :

Enfin, le même problème se pose pour les gammes eulériennes.

A ce sujet, Euler consacre un long chapitre de son *Tentamen*, que nous n'avons pu développer faute de connaissances suffisantes en latin.

En résumé, il y a bien, dans toutes les gammes étudiées jusqu'à présent, un véritable problème de transposition.

Ce problème ne se poserait pas si tous les instruments étaient capables de « fabriquer » leurs sons tels le violon, alto, contrebasse… etc… Mais, beaucoup d'instruments doivent être accordés dès le départ et il est impossible d'y toucher pendant l'exécution d'une œuvre : nous pensons par exemple au piano, à l'orgue, la guitare… etc… En conséquence, les musiciens qui pratiquent ces instruments ne peuvent pas jouer une certaine quantité d'intervalles, au risque de blesser les oreilles de leurs auditeurs.

3 – Notre gamme tempérée

a) Construction :

Puisqu'aucune solution envisagée jusqu'ici n'est satisfaisante pour les besoins de transpositions, pourquoi ne pas tout simplement placer les notes régulièrement dans la gamme, i.e. à égale distance les unes des autres ? On appelle cette solution le tempérament égal et la gamme obtenue est appelée gamme tempérée.

Divers tempéraments égaux ont alors été imaginés, mais celui qui a été retenu est celui de Andreas Werckmeister (1645-1706) qui divise l'octave en 12 intervalles égaux.

Le choix de la division en 12 vient de l'étude de la gamme pythagoricienne à 12 notes (voir p. 38) dans laquelle on remarque que les deux intervalles successifs sont à peu près égaux. En effet, l'un est le limma pythagoricien $L = 2^8/3^5 \sim 1.0535$ et l'autre la différence entre le ton et le limma pythagoricien, c'est à dire $3^7/2^{11} \sim 1.0679$. Il ne reste donc plus qu'à les rendre réellement égaux.

Si on note chacun de ces 12 intervalles égaux I_k, on doit avoir :$12I_k = I_2$ ou encore $k^{12} = 2$ d'où $k = 2^{1/12}$.

Ainsi, toutes les notes de la gamme tempérée appartiennent au groupe multiplicatif $<2^{1/12}>$, c'est-à-dire au groupe multiplicatif engendré par $2^{1/12}$.

On obtient le tableau suivant:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Fréquence	f	$2^{1/12}$ f	$2^{1/6}$ f	$2^{1/4}$ f	$2^{1/3}$ f	$2^{5/12}$ f	$2^{1/2}$ f	$2^{7/12}$ f	$2^{2/3}$ f	$2^{3/4}$ f	$2^{5/6}$ f	$2^{11/12}$ f
Nom de la note	DO	$DO^{\#}$ RE^{b}	RE	$RE^{\#}$ MI^{b}	MI	FA	$FA^{\#}$ SOL^{b}	SOL	$SOL^{\#}$ LA^{b}	LA	$LA^{\#}$ SI^{b}	SI

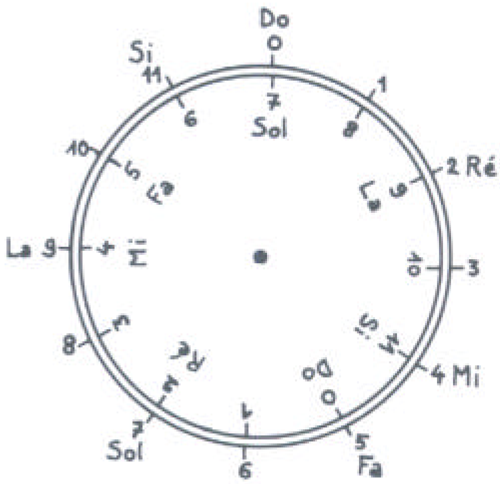
I_k est appelé le <u>demi-ton tempéré</u> et $I_k^2 = 2\ I_k$ le <u>ton tempéré</u>.

Remarquons que cette échelle n'est encore que relative, puisque les fréquences de tous les sons dépendent de l'une d'elles. Il suffit alors, pour que toutes les fréquences soient déterminées, d'en fixer une. Par convention, en 1939, il a été décrété que la fréquence du neuvième son de la troisième octave (ou La_3) serait de 440 Hertz.

b) La transposition comme avantage :

Une question mérite d'être posée : en gamme tempérée, avons-nous, là encore, l'existence d'un comma ? La réponse est non. L'égalité des demi-tons et tons fait régner l'enharmonie. Ainsi, le $DO^{\#}$ est rigoureusement égal au RE^{b}, le $FA^{\#\#}$ est exactement égal au SOL… etc…

Cette absence de comma nous laisse entrevoir que l'on peut alors effectuer toutes les transpositions souhaitées, ce qui était le but recherché.
Il suffira pour s'en convaincre d'utiliser le disque transpositeur qui suit:



Transposer de n demi-tons revient à faire correspondre au 0 du disque extérieur le n du disque intérieur.
Ainsi, pour transposer de 4 demi-tons, nous plaçons le 4 du disque intérieur en face du 0 du disque extérieur. Il ne reste plus qu'à lire la correspondance entre les deux disques.

c) La perte de l'harmonie comme inconvénient :

Euler souligne que *beaucoup de musiciens ont cru que la véritable harmonie consistait dans l'égalité des intervalles plutôt que dans leur simplicité ; et voulant avant tout faire triompher leur opinion, ils n'ont pas balancé à diviser l'octave en 12 parties égales, et à créer ainsi les 12 sons habituels. Ils furent d'autant plus affermis dans leur opinion que, cette division rendant tous les intervalles égaux, un morceau de musique quelconque peut être exécuté sans aucun changement (*c'est à dire sur un instrument à sons fixes*), dans tous les modes, et être transposé du mode primitif dans un autre quelconque.*
A cet égard, ils ne se sont pas trompés ; ***mais ils n'ont pas remarqué que l'égalité des intervalles ne laissait pas un seul mode où il ne fut porté atteinte à l'harmonie.***

En effet, force est de constater que, $2^{1/12}$ étant un irrationnel ($q^{12}=2$ n'admet aucune solution rationnelle), il n'y a, dans la gamme tempérée, pas d'autres intervalles consonants que l'unisson et l'octave.
Le tableau suivant permet une comparaison entre les quelques intervalles consonants et leurs homologues dans la gamme tempérée :

nom de l'intervalle	**rapport théorique**	**Gamme tempérée**	**% erreur**
octave	$\frac{2}{1}$	2	0 %
quinte	$\frac{3}{2}$	$2^{7/12}$	0,11 % plus grave
quarte	$\frac{4}{3}$	$2^{5/12}$	0,11 % plus aigu
tierce	$\frac{5}{4}$	$2^{1/3}$	0,79 % plus aigu
seconde	$\frac{9}{8}$	$2^{1/6}$	0,23 % plus grave

On constate que si les quintes, les quartes et les secondes restent correctes, les tierces par contre sont franchement fausses !

d) La justesse expressive des chanteurs et instrumentistes à cordes :

Contrairement au piano qui ne comporte que des sons de hauteur fixe, le violon n'a pour contrainte que la hauteur des 4 cordes à vide. Quant au chanteur, sa liberté est pour ainsi dire totale. Pour remédier à ce problème d'impureté des notes, ils ont alors la possibilité d'utiliser ce que l'on appelle la justesse expressive. Ainsi, ils sont conduits à abandonner les valeurs des notes indiquées par la gamme tempérée pour revenir à des notes déterminées par des rapports consonants.
A titre d'exemple, ils pourront différencier un sol# d'un la*b* en fonction du contexte musical (tonalité, instruments qui les accompagnent...).

e) Un autre tempérament égal, la gamme de S.Cordier des pianistes :

On peut remarquer qu'un piano accordé selon la gamme tempérée sonne tout à fait faux (E. Leipp, *Acoustique musicale,* Masson, 1971).
Partant de là, S. Cordier a imaginé de construire une gamme pour l'accordage des pianos.

Il s'agit de diviser non plus l'octave en 12 intervalles égaux, mais la quinte en 7 intervalles égaux. Ainsi, si on note I_k l'un de ces intervalles, on doit avoir $7I_k = I_{3/2}$ ou encore $k^7 = 3/2$ d'où $k = (3/2)^{1/7}$. Nous obtenons alors le tableau suivant:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
fréquence	f	$(\frac{3}{2})^{1/7}$ f	$(\frac{3}{2})^{2/7}$ f	$(\frac{3}{2})^{3/7}$ f	$(\frac{3}{2})^{4/7}$ f	$(\frac{3}{2})^{5/7}$ f	$(\frac{3}{2})^{6/7}$ f	$\frac{3}{2}$ f	$(\frac{3}{2})^{8/7}$ f	$(\frac{3}{2})^{9/7}$ f	$(\frac{3}{2})^{10/7}$ f	$(\frac{3}{2})^{11/7}$ f
nom de la note	DO	$DO^{\#}$ RE^{b}	RE	$RE^{\#}$ MI^{b}	MI	FA	$FA^{\#}$ SOL^{b}	SOL	$SOL^{\#}$ LA^{b}	LA	$LA^{\#}$ SI^{b}	SI

4 – Bilan comparatif

Il est intéressant de comparer les différentes gammes chromatiques étudiées.
En effet, on retrouve les intervalles consonants, ou « justes », de ces différentes gammes, en gras, dans les tableaux suivants :

	Do		**Re**		**Mi**	**Fa**		**Sol**		**La**		**Si**	**Do**
Gamme de Pythagore	**1**	$\frac{2^8}{3^5}$	$\mathbf{\frac{3^2}{2^3}}$	$\frac{2^5}{3^3}$	$\frac{3^4}{2^6}$	$\mathbf{\frac{2^2}{3}}$	$\frac{3^6}{2^9}$	$\mathbf{\frac{3}{2}}$	$\frac{2^7}{3^4}$	$\frac{3^3}{2^4}$	$\frac{2^4}{3^2}$	$\frac{3^5}{2^7}$	**2**
Gamme de Zarlino	**1**	$\frac{2^4}{3\times5}$	$\mathbf{\frac{3^2}{2^3}}$	$\frac{2\times3}{5}$	$\mathbf{\frac{5}{2^2}}$	$\mathbf{\frac{2^2}{3}}$	$\frac{5^2}{2\times3^2}$	$\mathbf{\frac{3}{2}}$	$\frac{2^3}{5}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{3^2}{5}$	$\frac{3\times5}{2^3}$	**2**
Gamme d'Euler	**1**	$\frac{3^3\times5}{2^7}$	$\mathbf{\frac{3^2}{2^3}}$	$\frac{3\times5^2}{2^6}$	$\mathbf{\frac{5}{2^2}}$	$\frac{3^3\times5^2}{2^9}$	$\frac{3^2\times5}{2^5}$	$\mathbf{\frac{3}{2}}$	$\frac{5^2}{2^4}$	$\frac{3^3}{2^4}$	$\frac{3^2\times5^2}{2^7}$	$\frac{3\times5}{2^3}$	**2**
Gamme Tempérée	**1**	$2^{1/12}$	$2^{1/6}$	$2^{1/4}$	$2^{1/3}$	$2^{5/12}$	$2^{1/2}$	$2^{7/12}$	$2^{2/3}$	$2^{3/4}$	$2^{5/6}$	$2^{11/12}$	**2**

Soit, par valeurs approchées arrêtées à la quatrième décimale :

	Do	**Ré**	**Mi**	**Fa**	**Sol**	**La**	**Si**	**Do**
Gamme de Pythagore	1	1.125	1.2656	1.3333	1.5	1.6875	1.8984	2
Gamme de Zarlino	1	1.125	1.25	1.3333	1.5	1.6667	1.875	2
Gamme d'Euler	1	1.125	1.25	1.3184	1.5	1.6875	1.875	2
Gamme Tempérée	1	1.1225	1.2599	1.3348	1.4983	1.6818	1.8877	2

Ainsi, la nature de compromis inhérente à toute construction d'une gamme musicale apparaît nettement dans cette étude. En effet, il n'y a pas de solution idéale car deux exigences différentes sont visées, qui ne peuvent jamais être atteintes simultanément, à savoir obtenir des intervalles consonants et pouvoir transposer librement.

D'un côté, la première contrainte est privilégiée dans le choix pythagoricien de progression par quintes, dans le choix zarlinien de juxtaposition d'accords parfaits majeurs, ou encore, dans le choix eulérien. De l'autre, Werckmeister satisfait pleinement la seconde par un découpage de l'octave en intervalles égaux.

Nous avons pu constater que la démarche effectuée pour construire des gammes musicales est en fait purement algébrique et revient simplement à imposer un certain nombre de relations dans un groupe multiplicatif, qu'il s'agisse de $<2, 3>$, $<2, 3, 5>$ ou $<2^{1/12}>$.

En ce sens, nous aurons atteint notre but si nous avons amené le lecteur à considérer, comme nous le pensons nous-mêmes, que les mathématiques peuvent constituer une bonne approche de la musique.

Au demeurant, il faut bien admettre que ce travail est loin d'être exhaustif. On peut imaginer des divisions égales de l'octave autres que par 12, ce qui est par exemple le cas en Thaïlande. De même, si les divisions inégales ont été abandonnées en Occident, elles sont en revanche toujours utilisées dans certains pays, tels que l'Inde. Quant à l'Indonésie, elle présente la particularité d'avoir deux systèmes musicaux :

- l'un pentatonique, composé d'intervalles quasiment égaux (le Sléndro),
- l'autre heptatonique, composé de différents intervalles (le Pélog).

Le fait est que nos considérations mathématiques partent de constructions musicales historiques occidentales. Un regard attentif croisé sur les gammes orientales ne pourrait qu'apporter de nouvelles perspectives d'étude et de recherche.

Bibliographie :

[A] Adolphe DANHAUSER, Théorie de la musique, Editions Lemoine, 1929

[B] Leonhardo EULERO, Tentamen Novae Theoriae Musicae, ex certissimis harmoniae principiis dilucide expositae, Saint-Petersburg, 1739

[C] G.H. HARDY and E.M. WRIGHT, An introduction to the theory of numbers, Oxford University Press, 5th edition, 1989

[D] Yves HELLEGOUARCH, Kreisleriana, Cahier du groupe Mathématique et Musique n°1, 1985

[E] Yves HELLEGOUARCH, A la recherche de l'arithmétique qui se cache dans la musique, Gazette des mathématiciens n°33, 1987

[F] Yves HELLEGOUARCH, Gammes naturelles, Gazette des mathématiciens n°81-82, 1999

[G] Bernard PARZYSZ, Musique et Mathématique, Publication de l'A.P.M.E.P. n°53, 1983

Remerciements à Jean-Louis Rame pour son intervention.