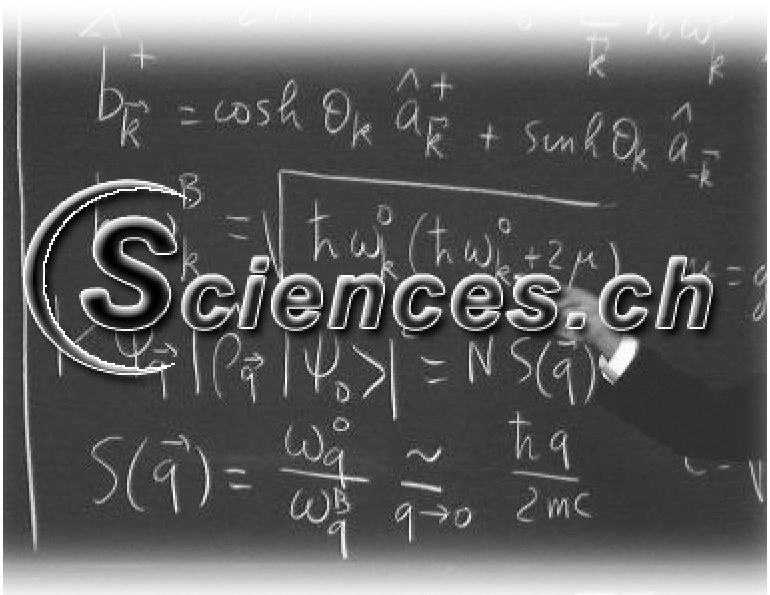


EXERCICES DE

THÉORIE DES JEUX (DÉCISION)

(version 2.0 du 28.02.2010)

EXERCICE 1.

Niveau : Gymnase (lycée)
Auteur : V. Isoz (isozv@hotmail.com)
Mots-clés : Critères décisionnels classiques

Enoncé :

Un marchand ambulant a comme décisions possibles de remplir son chariot de glaces ou (exclusif) de boissons. L'événement qui peut se produire est beau temps ou (exclusif) temps couvert. Dans chaque case, on porte les profits attendus par le marchand de plage.

Gains	Temps	
	Beau	Couvert
Glaces	500	100
Boissons	200	700

Le coût d'opportunité est le manque à gagner par le fait que le décideur, face à un événement, n'a pas forcément pris la meilleure décision possible. Ici on a mis le coût d'opportunité entre parenthèses :

Gains	Temps	
	Beau	Couvert
Glaces	500 (0)	100 (600)
Boissons	200 (300)	700 (0)

Si l'on se place dans le cas du beau temps, la meilleure décision était de vendre des glaces. Si c'est cette décision qui a été prise, on ne pouvait pas gagner plus le coût d'opportunité est donc nul. Si par contre on avait rempli le chariot de boissons, le manque à gagner était de 500- 200 = 300. En fait le coût d'opportunité est aussi le prix de l'information certaine.

Soit le tableau suivant :

Gains	Temps		
	Beau	Couvert	Pluie
Glaces	500	100	0
Boissons	250	800	350
Journaux	150	400	800
Jouets	600	300	260

Il est demandé :

E1. Choisir la décision qui rend maximale la moyenne arithmétique des gains (critère de Laplace).

E2. Choisir la solution qui rend maximal le gain minimal de chaque décision (critère de Wald ou du maximin)

E3. Prendre la décision qui rend maximal le résultat pondéré entre valeurs maximale et minimale de chaque décision : a(mini) + (1-a)(maxi) avec $a = 0.5$ (critère de Hurwitz).

E4. Choisir la décision pour laquelle on rend minimal le maximum des regrets (critère de Savage ou du minimax regret). Le regret est défini comme le coût d'opportunité (calculé entre parenthèses).

E5. Si nous retenons P(Beau)=0.5; P(Couvert) =0.3; P(Pluie) = 0.2 quelle est la décision ayant la plus grande espérance (critère de l'espérance).

Solutions :

S1. Tous calculs faits, c'est Boissons qui est la meilleure décision selon le critère de Laplace :

Gains	Temps			Laplace
	Beau	Couvert	Pluie	moy. arith.
Glaces	500 (100)	100 (700)	0 (800)	200
Boissons	250 (300)	800 (0)	350 (450)	<u>467</u>
Journaux	150 (450)	400 (400)	800 (0)	450
Jouets	600 (0)	300 (500)	260 (540)	387

S2. Selon le critère de Wald, il faut retenir ici les jouets :

Gains	Temps			Laplace	Wald
	Beau	Couvert	Pluie	moy. arith.	maximin
Glaces	500 (100)	100 (700)	0 (800)	200	0
Boissons	250 (300)	800 (0)	350 (450)	<u>467</u>	250
Journaux	150 (450)	400 (400)	800 (0)	450	150
Jouets	600 (0)	300 (500)	260 (540)	387	<u>260</u>

S3. Selon le critère de Hurwitz c'est le Jouet qui est la meilleure décision.

Gains	Temps			Laplace	Wald	Hurwitz
	Beau	Couvert	Pluie	moy. arith.	maximin	a = 0.5
Glaces	500 (100)	100 (700)	0 (800)	200	0	250
Boissons	250 (300)	800 (0)	350 (450)	<u>467</u>	250	<u>525</u>
Journaux	150 (450)	400 (400)	800 (0)	450	150	475
Jouets	600 (0)	300 (500)	260 (540)	387	<u>260</u>	430

S4. Les décisions Boissons et Journaux sont les meilleures et équivalentes.

Gains	Temps			Laplace	Wald	Hurwicz	Savage
	Beau	Couvert	Pluie	moy. arith.	maximin	a = 0.5	minimax
Glaces	500 (100)	100 (700)	0 (800)	200	0	250	800
Boissons	250 (300)	800 (0)	350 (450)	<u>467</u>	250	<u>525</u>	<u>450</u>

Journaux	150 (450)	400 (400)	800 (0)	450	150	475	<u>450</u>
Jouets	600 (0)	300 (500)	260 (540)	387	<u>260</u>	430	540

S5. C'est l'application des probabilités aux combinaisons décisions / événements tel que $E(X)=\sum_i p_i x_i$.

Si nous retenons P(Beau)=0.5; P(Couvert) =0.3; P(Pluie) = 0.2 c'est la décision Jouet qui est la meilleure.

Gains	Temps			Laplace	Wald	Hurwicz	Savage	Esperance
	Beau	Couvert	Pluie	moy. arith.	maximin	a = 0.5	minimax	-
Glaces	500 (100)	100 (700)	0 (800)	200	0	250	800	280
Boissons	250 (300)	800 (0)	350 (450)	<u>467</u>	250	<u>525</u>	<u>450</u>	435
Journaux	150 (450)	400 (400)	800 (0)	450	150	475	<u>450</u>	355
Jouets	600 (0)	300 (500)	260 (540)	387	<u>260</u>	430	540	<u>442</u>

EXERCICE 2.

Niveau : Université (Fac.)
Auteur : V. Isoz (isozv@hotmail.com)
Mots-clés : Critères décisionnels classiques

Enoncé :

Une entreprise envisage les trois projets suivants P_1, P_2, P_3 avec leurs gains respectifs.

Etat de la nature	Défavorable	Favorable	Très favorable
Projet P_1	1’200	1’500	1’800
Projet P_2	700	900	1’200
Projet P_3	-500	1’200	1’600

Nous remarquons tout de suite qu’il s’agit ici d’un jeu unilatéral. Il n’y donc pas de confrontation avec un autre décisionnaire comme c’est le plus souvent le cas en théorie de la décision.

Il est demandé de classer les projets en fonction des critères suivants :

E1. Critère du Maximin (ou de Wald)

E2. Critère du Maximax

E3. Critère de Hurwitz avec p=0.7

E4. Critère de Laplace

E5. Critère de Savage (ou du Minimax regret)

Solutions :

S1. Pour appliquer le critère de Wald il faut dans un premier temps déterminer pour le décisionnaire le gain (utilité) minimum de chacune des stratégies :

Pour le projet P_1 : Min{1'200, 1'500,1’800}=1’200

Pour le projet P_2 : Min{700, 900,1’200}=700

Pour le projet P_3 : Min{-500, 1'200,1'600}=-500

Selon ce critère, c’est le projet 1 qu’il convient de retenir, en effet, parmi les résultats les plus faibles des trois projets, c’est celui qui correspond au plus élevé.

S2. Pour applique le critère du Maximax il suffit de retenir le plus élevé de chaque projet en fonction des différents états de la nature, soit :

Pour le projet P_1 : Min{1'200, 1'500,1’800}=1’800

Pour le projet P_2 : Min{700, 900,1’200}=1’200

Pour le projet P_3 : Min{-500, 1'200,-500}=1’600

Le maximum des maximums étant 1'800 c’est à nouveau le projet 1 qui est retenu.

S3. Pour appliquer le critère de Hurwitz (dans sa version simple) on choisit (on peut démontrer d’où vient cette valeur mais cela sort du cadre ce cours) p=0.7 et la théorie de base nous impose d’utiliser que deux issues. Nous prendrons alors seulement les optimistes et pessimistes :

Etat de la nature	Défavorable	Très favorable
Projet P_1	1’200	1’800
Projet P_2	700	1’200
Projet P_3	-500	1’600

L’espérance de gain est alors :

Pour le projet P_1 : $1'800 \cdot 0.7 + 1'200(1-0.7) = 1'620$

Pour le projet P_2 : $1'200 \cdot 0.7 + 700(1-0.7) = 1'050$

Pour le projet P_3 : $1'600 \cdot 0.7 - 500(1-0.7) = 970$

Ainsi avec ce critère c’est le projet 1 à nouveau qu’il convient de choisir.

Remarque : cette méthode est à prendre avec des pincettes si non appliquée avec un spécialiste qui connaît les outils mathématiques qui se cachent derrière

S4. Pour appliquer le critère de Laplace, il suffit d’appliquer donc une à chaque stratégie de projet. Ainsi :

Pour le projet P_1 : $E(P_1) = \frac{1}{3}1'200 + \frac{1}{3}1'500 + \frac{1}{3}1'800 = 1'500$

Pour le projet P_2 : $E(P_2) = \frac{1}{3}700 + \frac{1}{3}900 + \frac{1}{3}1200 = 933.34$

Pour le projet P_3 : $E(P_3) = -\frac{1}{3}500 + \frac{1}{3}1200 + \frac{1}{3}1600 = 766.67$

Ainsi avec ce critère c’est le projet 1 à nouveau qu’il convient de choisir.

S5. Pour applique le critère de Savage il faut d’abord créer la matrice des regrets.

Si l’état de la nature est défavorable, le résultat le plus élevé est de 1'200, nous allons alors tout report à cette valeur numérique et faires les différences arithmétiques avec les autres gains de la même colonne, et de même pour chaque autre colonne avec 1'500 et 1'800.

Etat de la nature	Défavorable	Favorable	Très favorable
Projet P_1	0	0	0
Projet P_2	500	600	600
Projet P_3	1700	300	200

Nous avons alors :

Regret maximum pour le projet P_1 : 0

Regret maximum pour le projet P_2 : 600

Regret maximum pour le projet P_3 : 1700

Il convient enfin de choisir le projet qui présente le regret le moins élevé, donc dans cet exemple simple, c’est à nouveau le projet 1.

Pour conclure, il convient de rappeler qu’une décision d’investissement est une opération complexe qui fait intervenir plusieurs variables tant quantitatives que qualitatives et qu’elle ne peut s’appuyer que sur un seul critère ou même sur cinq !

EXERCICE 3.

Niveau : Université (Fac.)
Auteur : V. Isoz (isozv@hotmail.com)
Mots-clés : Fixation des prix

Enoncé :

Deux compagnies aériennes que nous nommerons respectivement *A* et *B* ont pour un trajet donné (Paris/Budapest) la possibilité de fixer le prix à 700.- ou à 1000.- pour l'aller/retour.

Les profits en milliards d'Euros correspondants à chaque niveau de prix sont indiqués ci-dessous.

Stratégie A/ Strat. B	700	1000
700	100 100	200 50
1000	50 200	150 150

Quel est le choix optimum?

Solution :

A et *B* ont toutes deux intérêt à fixer un prix de 1000 € (150 m€ de profit chacune).

Elles ne sont cependant pas en équilibre car celui qui change unilatéralement son prix est gagnant (profit de 200 millions.-).

Les stratégies 700-700 correspondent à un équilibre de Nash car pour cette combinaison, seul celui qui change est pénalisé.

EXERCICE 4.

Niveau : Université (Fac.)
Auteur : V. Isoz (isozv@hotmail.com)
Mots-clés : Arbre de décision

Enoncé :

Imaginons une société informatique *B* en concurrence potentielle, pour une migration informatique internationale avec une autre société *A* (cette dernière pouvant être vue comme un ensemble de concurrents aussi!).

En simplifiant quelque peu, mais sans être toutefois hors de la réalité, considérons que deux choix sont ouverts à *B*: viser "cher" ou viser "bas".

Supposons que nous savons également que dans le passé *B* a soumis une proposition pour chaque appel d'offres de ce type, alors que le groupe *A* ne l'a fait que dans 60% des cas (pas de fonction de distribution de probabilité dans notre scénario!).

Nous savons également que:

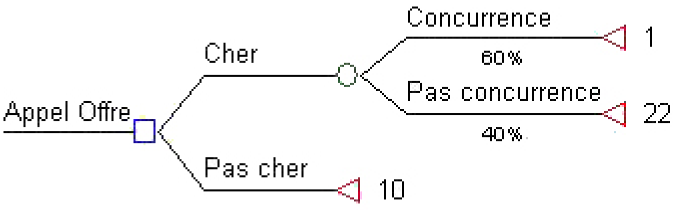
- Si *B* soumet cher et est le seul à soumettre une proposition, le bénéfice attendu est de 22 millions.
- Si *B* soumet un prix élevé mais se trouve en concurrence avec le groupe *A*, il obtiendra le contrat selon le niveau de prix demandé par le groupe *A*. Dans ce cas, il sait qu'il obtiendra en moyenne 1 million.
- Si enfin *B* soumet à un prix bas, il est sûr d'obtenir le contrat et de réaliser un bénéfice de 10 millions.

Donc dans le cadre où le choix du projet est déterminé uniquement par son prix (au détriment de la qualité comme dans la réalité...) la question qui se pose est alors la suivante: Que doit faire *B*, si aucune information complémentaire ne peut être obtenue?

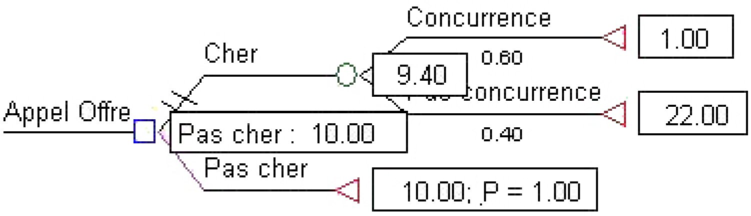
Remarque: Ceci constitue une situation du type "décision sans information"

Solution :

Pour répondre à cette question, nous représentons tout d'abord le problème à résoudre sous une forme graphique fort logique (qui est pour l'instant assez simple à mettre aussi sous forme de tableau) avec le logiciel TreeAge:



Ensuite en lançant le calcul de l'espérance à chaque branchement, TreeAge nous donne simplement:



Ainsi, la réponse à la première question est que la stratégie donnant l'espérance de gain la plus grande est la stratégie "Pas Cher" car il y a un gain espéré de 10 millions.

Avec la première décision (Cher) nous gagnerions en moyenne que:

$$22 \cdot 0.4 + 1 \cdot 0.6 = 9.4$$