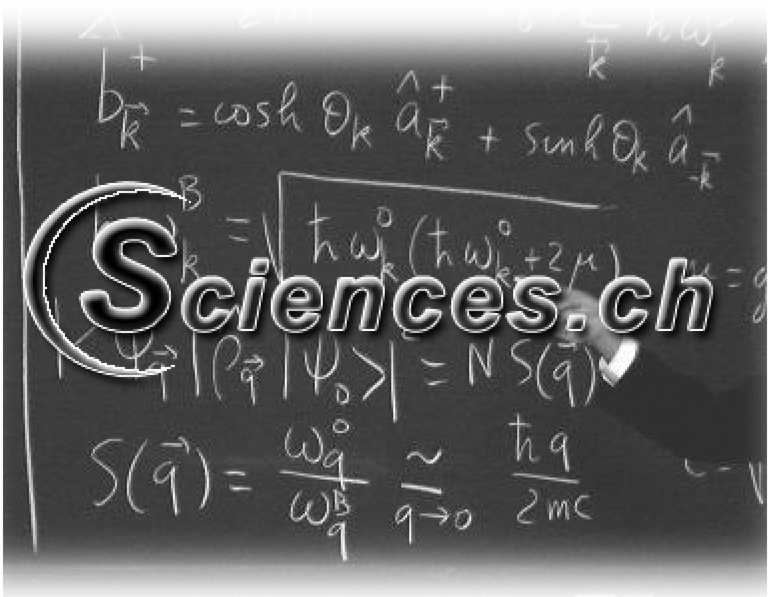


EXERCICES DE

STATIQUE

(version 2.0 du 28.02.2010)

EXERCICE 1.

Niveau : Collège (Cycle d'orientation)
Auteur : -
Mots-clés : Sphères de Magdeburg

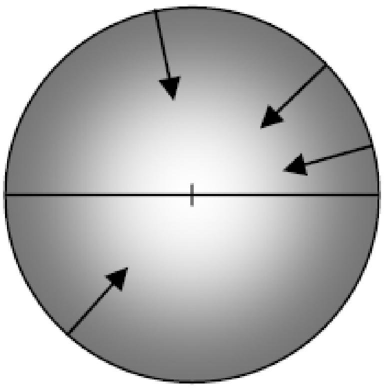
Enoncé :

Dans l'expérience historique des hémisphères de Magdebourg réalisée par von Guericke en 1654, des chevaux tentent de séparer deux hémisphères plaqués l'un contre l'autre sous l'effet de la pression atmosphérique, la sphère ayant été préalablement vidée de son air .

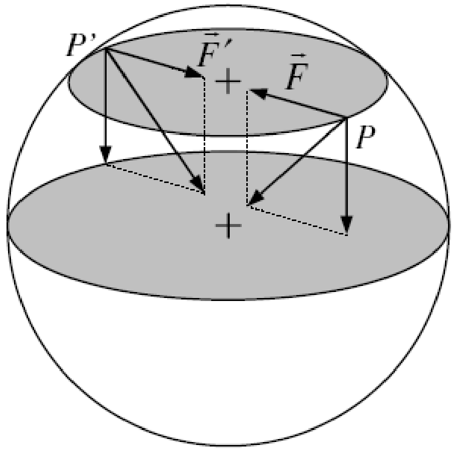
Nous proposons de calculer la force que ces chevaux doivent exercer sur ces hémisphères pour les séparer.

Solution :

En tout point de la sphère, l'atmosphère exerce une force pressante perpendiculaire:



En décomposant l'une de ces forces dans la direction perpendiculaire au plan de séparation des hémisphères d'une part et dans le plan parallèle à celui-ci d'autre part, nous constatons que cette dernière composante est compensée par la composante dans ce même plan de la force diamétralement opposée, où le diamètre dont il est ici question est celui du cercle passant par le point d'application de la force et le plan est parallèle au plan de séparation des hémisphères.



Des forces pressante exercées par l'atmosphère sur la surface de la sphère, seules les composantes dans la direction perpendiculaire au plan de séparation des hémisphères sont à prendre en considération. Ce sont celles-ci qui plaquent les deux hémisphères l'une contre l'autre.

La force subie par un élément de surface dS de la sphère est donnée par:

$$dF = PdS$$

où P est la pression atmosphérique.

Nous avons démontré dans le chapitre sur les Formes Géométrique que pour une sphère:

$$dS = R^2 \sin\theta d\theta d\phi$$

La composante dF_z de la force dans la direction z est alors donnée par:

$$dF_z = \cos\theta dF = PR^2 \sin\theta \cos\theta d\theta d\phi$$

La contribution de toutes les forces s'exerçant en chaque point de chaque hémisphère, s'obtient en intégrant cette expression sur toute la surface d'une demi-sphère de surface S:

$$F_z = \oint_S dF_z = PR^2 \int_0^{\pi/2} \sin\theta \cos\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi$$

La dernière intégrale vaut trivialement 2π et pour la deuxième nous utilisons la relation démontrée dans le chapitre de Trigonométrie:

$$\sin(2\alpha) = 2\sin(\alpha)\cos(\alpha)$$

Il vient alors:

$$\int_0^{\pi/2} \sin\theta \cos\theta d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \sin(2\theta) d\theta$$

et comme nous l'avons démontré dans le chapitre de Calcul Intégral et Différentiel:

$$\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\sin(2\theta)d\theta = -\frac{1}{4}\cos(2\theta)\Big|_0^{\pi/2} = -\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\sin(2\theta)d\theta = -\frac{1}{4}\cos(2\theta)\Big|_0^{\pi/2}$$
$$= +\frac{1}{4}-\left(-\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{2}$$

D'où finalement:

$$F_z = PR^2\int_0^{\pi/2}\sin\theta\cos\theta d\theta\int_0^{2\pi}d\phi = PR^2\,\frac{1}{2}2\pi = PR^2\pi$$

Les hémisphères sont plaqués l'un contre l'autre avec une force dont l'intensité est égale à la pression atmosphérique multipliée par la surface de leur plan de séparation (un disque de rayon *R*). Le résultat est le même que celui que l'on obtiendrait en remplaçant les deux hémisphères par deux demi-cylindres de même rayon: